

Betreuer: Harald Tiesler

Fortgeschrittenen-Praktikum am
Institut für Kernphysik

Analoge Elektronik¹

Oliver Flimm
Oberstraße 74
51149 Köln

Uwe Münch
Schmittgasse 92
51143 Köln

Wintersemester 93/94²

e-mail: flimm@ph-cip.uni-koeln.de
muench@ph-cip.uni-koeln.de

¹Versuch 8a

²Durchführung des Versuchs: 31.1.94

Vorwort

Wir wollen hier zunächst ein paar Worte zum Aufbau unseres Versuchsprotokolls verlieren. Denn auf den nächsten Seiten zierte ein „© by Oliver Flimm und Uwe Münch“ die letzte Zeile. Warum dies? Sind diese beiden Praktikanten so eingebildet oder übergeschnappt? Nein, das sind wir nicht, und wir wollen jetzt also begründen, warum wir diese Zeile am Ende jeder Seite für nötig halten.

Viele Praktikanten bereiten ihre Versuche im CIPLAB vor und werten sie auch dort aus. Nur einige davon schützen ihre Arbeit vor Zugriff durch andere. Das bedeutet, daß man sich vielfach die `.dvi`-Dateien anschauen kann, aber auch daß man direkt auf `.tex`-Sourcen zugreifen könnte. Dieser Zustand ist ja allgemein bekannt. Wie ist nun unsere Einstellung dazu?

Wir denken, daß es nicht Sinn der Sache (d. h. des FP's) sein kann, sich einfach die Sourcen zu kopieren. Zumeist sind diese Vorlagen auch lückenhaft oder enthalten Fehler. Kurz gesagt, aus diesen Gründen benutzen wir keine solchen Textvorlagen. (Über unser Verfahren, was Bilder angeht, werden wir uns gleich äußern.) Wie sieht das nun mit `.dvi`-Files aus? Wir denken, daß ein Aspekt des Fortgeschrittenpraktikums ist, daß wir lernen, wie man durchgeführte Versuche protokolliert, beschreibt und (später mal) veröffentlicht. Zu diesem Lernprozeß gehört es sicherlich auch, anhand von Beispielen zu sehen, wie so etwas geschieht. (Allerdings bezweifeln wir, daß dazu die Vorlagen immer so geeignet sind.) Zumindest halten wir es für keinen Frevel, wenn man sich anhand anderer Ausarbeitungen eine Idee holt, wie Versuchsprotokolle anzufertigen sind. Daher beabsichtigen auch wir, unsere `.dvi`-Dateien im CIPLAB allgemein lesbar zur Verfügung zu stellen. Dies wird *nicht* mit unseren `.tex`-Sourcen geschehen! Diese halten wir natürlich geschützt. Wir wollen nämlich nicht, daß unsere Mühen *einfach so* von anderen, uns bekannten oder unbekanntenen Studenten weiter genutzt werden. Wie oben dargelegt, haben wir aber nichts dagegen, wenn unsere Ausarbeitung als Beispiel und Denkanstoß dient. Für Nachfragen, etc. haben wir unsere vollständigen Normal- und unsere e-mail-Adressen angegeben. Damit niemand auf die Idee kommt, sich das Leben doch zu einfach zu machen und die `.dvi`-Datei einfach ausdruckt und in der Hoffnung, daß sie keiner wiedererkennt, abgibt, haben wir die Copyright-Zeile eingefügt. Diese dürfte so etwas effektiv verhindern. Außerdem (wovon wir weniger überzeugt sind) dient sie vielleicht als psychologische Sperre, zu wörtlich von uns abzuschreiben.

Nachdem wir uns so ausführlich über diese Vorgehensweise ausgelassen haben, wollen wir dann auch noch ein paar Worte über Bildvorlagen verlieren. Bei manchen Versuchen benutzen wir aus Büchern eingescannte Graphiken. Wir haben dann jeweils die Herkunft vollständig (also am Bild und im Literaturverzeichnis) dokumentiert. Alle sonstigen Bilder sind von uns mittels `xfig`, `gnuplot` oder ähnlichen Programmen selbst erstellt worden.

Ein paar abschließende Worte zur benutzten $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ -Umgebung: Wir erstellten unsere Ausarbeitungen bereits mit der Testversion des neuen Formats $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X} 2_{\epsilon}$. Die benutzten Classes und Packages sind allerdings noch von Hand von uns angepaßt worden. Aber nun in medias res. . . .

Inhaltsverzeichnis

| | |
|---|-----------|
| 1. Vorbereitung | 1 |
| 1.1 Einleitung | 1 |
| 1.2 Zeit- und Frequenzbereich | 1 |
| 1.3 RC-Glieder | 3 |
| 1.3.1 Tiefpaß und Sinussignale | 4 |
| 1.3.2 Hochpaß und Sinussignale | 8 |
| 1.3.3 Tiefpaß mit Stufensignalen | 11 |
| 1.3.4 Tiefpaß als Integrierglied | 13 |
| 1.3.5 Hochpaß mit Stufensignalen | 13 |
| 1.3.6 Hochpaß als Differenzierglied | 14 |
| 1.4 Leitungsvorgänge im Kabel | 15 |
| 1.5 Diskriminatoren | 18 |
| 1.5.1 Die Diode | 18 |
| 1.5.2 Verschiedene Begrenzer | 21 |
| 2. Auswertung | 22 |
| 2.1 Hoch- und Tiefpaß | 22 |
| 2.1.1 Kapazitätenbestimmung über Grenzfrequenzen (Sinussignale) | 22 |
| 2.1.2 Kapazitätenbestimmung über Zeitkonstanten (Stufensignale) | 27 |
| 2.2 Laufzeit des Kabels | 28 |
| 2.3 Übertragungsfunktion des Begrenzers | 30 |
| Literaturverzeichnis | 32 |
| Index | 33 |

Abbildungsverzeichnis

| | | |
|------|---|----|
| 1.1 | Schematisches Bild eines Vierpols | 1 |
| 1.2 | Tiefpaß ohne Tastkopf | 4 |
| 1.3 | Wirkung der Übertragungsfunktion graphisch | 5 |
| 1.4 | Frequenzverhalten von g^* beim Tiefpaß | 6 |
| 1.5 | Phase beim Tiefpaß | 7 |
| 1.6 | Tiefpaß mit Tastkopf | 7 |
| 1.7 | Hochpaß ohne Tastkopf | 8 |
| 1.8 | Frequenzverhalten von g^* beim Hochpaß | 9 |
| 1.9 | Phase beim Hochpaß | 10 |
| 1.10 | Hochpaß mit Tastkopf | 10 |
| 1.11 | Prototyp eines Stufensignals | 11 |
| 1.12 | Ein- und Ausgangsspannung beim Stufensignal im Falle eines Tiefpasses | 12 |
| 1.13 | Ein- und Ausgangsspannung beim Stufensignal im Falle eines Hochpasses | 14 |
| 1.14 | Ersatzschaltbild eines Kabels | 16 |
| 1.15 | Schematisches Bild einer Diode | 18 |
| 1.16 | Bänder einer Diode mit und ohne Sperrspannung | 19 |
| 1.17 | In Sperrichtung geschaltete Diode | 20 |
| 1.18 | In Durchlaßrichtung geschaltete Diode | 20 |
| 1.19 | Kennlinie einer Diode | 20 |
| 1.20 | Verschiedene Begrenzer- bzw. Diskriminatorschaltungen | 21 |
| 2.1 | Zusammenhang von $g^*(\nu)$ und $\log_{10}(\nu)$ für die Tiefpässe | 24 |
| 2.2 | Zusammenhang von $g^*(\nu)$ und $\log_{10}(\nu)$ für die Hochpässe | 25 |
| 2.3 | Reflexionen am offenen Ende | 29 |
| 2.4 | Reflexionen am kurzgeschlossenen Ende | 29 |
| 2.5 | Angepaßtes Ende | 30 |
| 2.6 | Spannungs-Charakteristik des Begrenzers | 31 |

1. Vorbereitung

1.1 Einleitung

In diesem Versuch betrachten wir elementare Probleme und Bauteile der analogen Elektronik. Hierbei untersuchen wir zunächst das Zeit- und Frequenzverhalten von Hochpaß und Tiefpaß, die uns als RC-Glieder vorliegen. Dann beschäftigen wir uns mit dem Kabel, wobei wir unser Hauptaugenmerk auf dessen Reflexionsverhalten legen. Schließlich betrachten wir die Eigenschaften von Diodenschaltungen als Begrenzer.

Doch was ist nun eigentlich *analoge Elektronik* und inwieweit unterscheidet sie sich von der *digitalen Elektronik*? Oder anders ausgedrückt, mit welcher Art von Signalen beschäftigen wir uns in dem jeweiligen Teil der Elektronik?

Analoge Signale: Analoge Signale sind zeit- und wertkontinuierlich. Ihr Informationsgehalt steckt im allgemeinen in der Amplitude.

Digitale Signale: Im Gegensatz zu den analogen Signalen sind die digitalen Signale weder zeit- noch wertkontinuierlich, sondern zeit- und wertdiskret, d.h. ihr Informationsgehalt steckt in der zeitlichen Abfolge von Impulsen einer festgelegten Amplitude. Hiermit haben wir uns näher in Versuch [FP-8c] beschäftigt.

Alle Schaltungen lassen sich als Vierpole deuten. Hierbei stellen wir uns einen Vierpol ganz einfach als eine „Black Box“ mit je zwei Ein- und Ausgängen vor (vgl. Abb. 1.1). Wir werden die Vierpole unbelastet betrachten, d. h. wir fordern, daß der Ausgangstrom verschwindet: $I_a = 0$. Daß alle unsere Schaltungen Vierpolcharakter haben, zeigt sich damit schon durch Betrachtung der zugehörigen Schaltpläne.

1.2 Zeit- und Frequenzbereich

Die Information analoger Signale steckt also im zeitlichen Verlauf der sich im wesentlichen kontinuierlich verändernden Amplitude dieses Signals. Ist das Signal lange vor der Messung konstant geblieben

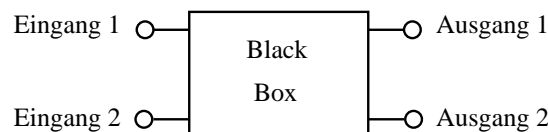


Abb. 1.1: Schematisches Bild eines Vierpols

und ist dies auch während der Messung der Fall, dann ändert sich die Amplitude nicht und man hat Gleichspannungen vorliegen. Zum einen kann man den Einfluß der Bauteile auf solche Gleichspannungen untersuchen; bei Kondensatoren und Spulen ist dies allerdings wenig ergiebig und somit uninteressant. Wir befassen uns nun mit Funktionen, bei denen sich die Amplitude zumindest irgendwann ändert. Dazu geben wir kurze Abrisse zur Fouriertheorie und der Laplace-Theorie. Nähere Informationen zur Fouriertheorie findet man in den Tischvorlagen zu den Vorträgen [Sem-10], [Sem-12] und [Sem-14] und außerdem im Buch [Za]. Zur Laplace-Transformation gibt es Genaueres in [Elek], wo sich auch Tabellen für die Laplace-Transformation einiger einfacher Funktionen befinden.

Fourier-Reihen

Als erstes wollen wir uns für den Fall zeitlich periodischer Funktionen interessieren, also Funktionen, bei denen es eine Konstante T , die Periodendauer, gibt, nach der sich das Signal wiederholt: $f(t) = f(t + T)$. Man kann den Parameterbereich nun so umtransformieren, daß $T = 2\pi$ (dann stimmen die Formeln mit [Sem-10], etc. überein). Wenn die Funktionen Lebesgue-integrierbar sind, so kann man Fourierkomponenten berechnen:

$$c_k := \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt ,$$

wobei $k \in \mathbb{Z}$. Um die komplexe Darstellung loszuwerden und einfachere Gleichungen für gerade und ungerade Funktionen f zu erhalten, kann man auch die Fourierkomponenten

$$a_k := \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt) dt \quad \text{und} \quad b_k := \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(t) \sin(kt) dt$$

berechnen. Wenn die Funktion f stetig differenzierbar ist, so gilt dann:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)] .$$

Wenn die *Fourier-Reihen* auf der rechten Seite bereits überall punktweise konvergieren, kann man die Voraussetzung der stetigen Differenzierbarkeit auch fallen lassen. Man nennt diese Reihendarstellung auch *Spektralzerlegung*, man sieht, daß neben der Grundfrequenz (allgemein: $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$; hier: $\omega_1 = 1$) alle Vielfachen $\omega_k = k \cdot \omega_1$ mit $k \in \mathbb{N}$ vorkommen. Außerdem sehen wir die eben schon erwähnten Vereinfachungen: Für gerade Funktionen verschwinden alle b_k , für ungerade alle a_k .

Wir haben also gesehen, daß man alle periodischen Funktionen als Superposition von Oberschwingungen der einfachen Sinusfunktion $\sin(\omega_1 t)$ und der – was im zeitlichen Verlauf dasselbe ist – Kosinusfunktion darstellen kann. Die Untersuchung des Verhaltens unserer Bauteile ist für Sinusfunktionen besonders einfach. Wir werden daher im folgenden auch nur Sinusfunktionen als Eingangssignale betrachten. Alle anderen periodischen Signale können wir ja fourierzerlegen (d.h. wir bilden die Fourier-Reihe) und ermitteln dann den Einfluß unserer linearen Bauteile über diese Superpositions-Zerlegung.

Fourier-Transformation

Nun möchte man eine solch praktische Zerlegung natürlich auch auf nichtperiodische Funktionen erweitern. Die Spektral-Zerlegung kann nun aber nicht mehr nur über den Zahlenbereich \mathbb{N} laufen, denn sonst ist ja die Frequenz ω_1 diejenige, die eine Periodendauer induzieren könnte. Zumindest sollte man z. B. inkommensurable Frequenzen in einer solchen Summe erwarten.

Wenn man sich anschaut, wie eine Theorie für auf ganz \mathbb{R} definierte Funktionen aussehen kann, so erhält man schließlich das folgende Ergebnis: Für Lebesgue-integrierbare Funktionen $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ beschränkter Variation kann man die *Fourier-Transformierte*

$$F(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-ist} dt$$

berechnen. Ist diese Funktion wieder aus $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, so kann man zurücktransformieren und man erhält die Funktion, von der wir ausgingen:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} F(s)e^{ist} ds .$$

Wir sehen also, daß unser bisheriges Linienspektrum \mathcal{N} zu einem kontinuierlichen Spektrum wurde.

Man kann diese Fourier-Transformation nun auch auf quadrat-integrierbare Funktionen $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ erweitern (vgl. insbesondere [Sem-12]). In diesem Fall erübrigt sich die Voraussetzung an die Fourier-Transformierte F für die Rücktransformation; da die Fouriertransformation \mathcal{L}^2 -normerhaltend ist, ist die Fourier-Transformierte F automatisch $\in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und damit auf die Funktion f zurücktransformierbar.

Laplace-Transformation

Die bisherigen Betrachtungen decken aber noch nicht alle der Fälle ab, die in der Elektronik auftreten können. Es kommt häufig vor, daß man zu einem festen Zeitpunkt ein Signal einschaltet, das im Zeitverlauf nicht Lebesgue-integrierbar ist. Solche Signale sind nun aber meist Laplace-transformierbar und wir wollen kurz angeben, was nun dies ist.

In der Fourier-Transformation benutzt man den Faktor e^{-ist} , weil diese Funktionen ein vollständiges Funktionensystem bilden. Man kommt nun auf die Idee, von diesem imaginären Exponenten zu einem komplexen überzugehen und mit den Faktoren $e^{-\sigma t - ist}$ zu transformieren, wobei $\sigma > 0$ eine feste Konstante. Der Anteil $e^{-\sigma t}$ bewirkt dann eine Dämpfung der zukünftigen Signale und macht viele Funktionen über \mathbb{R}^+ doch noch integrierbar, $f(t)e^{-\sigma t}$ ist dann aus $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, bzw. $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. Allerdings würde dieser Anteil vergangene Signale deutlich verstärken, sodaß wir diese Art der Transformation nur auf Signale anwenden können, die eingeschaltet werden, für die also $F(t) = 0$ für $t < 0$ gilt.

Die *Laplace-Transformation* ist nun nach der Beschreibung genau festgelegt und sieht mit $x = \sigma + is$ explizit so aus:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(t)e^{-xt} dt ,$$

für die Rücktransformation gilt nun:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{-2\pi}} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(x)e^{xt} dx .$$

Als Beispiel ist jetzt das Einschalten einer Gleichspannung transformierbar geworden: Die Laplace-Transformierte eines Stufensignal (vgl. Abbildung 1.11) ist

$$LT(x) = \frac{U_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-xt} dx = \frac{U_0}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(-\frac{1}{x} e^{-xt} \right) \Big|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{U_0}{\sqrt{2\pi} \cdot x} .$$

Da die Betrachtungen, die wir später für solche Einschaltvorgänge durchführen werden, aber auch im Zeitbereich (also ohne Transformation) recht durchschaubar sind, werden wir allerdings im folgenden auf die Anwendung der Laplace-Transformation verzichten.

1.3 RC-Glieder

Hochpaß und Tiefpaß sind elementare Schaltungen aus dem Bereich der analogen Elektronik, die sich unter anderem, wie in unserem Versuch, als RC-Glieder realisieren lassen. Im Frequenzbereich fungieren sie als Frequenzfilter, d.h. der Hochpaß läßt vor allem hohe Frequenzen und der Tiefpaß vor allem

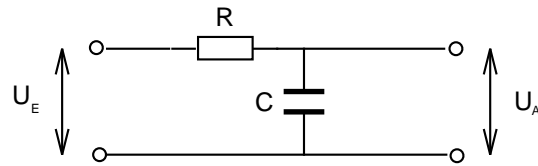


Abbildung 1.2: Tiefpaß ohne Tastkopf

niedrige Frequenzen durch. Dabei bedeutet ‚läßt vor allem durch‘, daß eben jener Bereich fast ohne Abschwächung übertragen wird, der jeweils andere aber stark gedämpft wird.

Im Zeitbereich kommt beiden Schaltungen besondere Bedeutung in der Impulsformung zu. Hierbei fungiert der Hochpaß als Differenzierglied und der Tiefpaß als Integrierglied.

Im folgenden werden nun Hoch- und Tiefpaß mit und ohne *Tastkopfkapazität*¹ explizit durchgerechnet:

1.3.1 Tiefpaß und Sinussignale

Ohne Tastkopf

In diesem und den folgenden Abschnitten beschäftigen wir uns mit Hoch- und Tiefpaß mit und ohne Tastkopfkapazität. Hierbei wird die Schaltung immer mit einem reinen Sinus-Signal gespeist, was nach unseren Ausführungen über die Fouriertransformation zur Untersuchung aller periodischen Signale ausreicht.

Zunächst analysieren wir aber die Schaltung (Bild 1.2) mittels elementarer Regeln (Kirchhoffsche Gesetze²). Hierbei gilt für die einzelnen Widerstände bzw. Leitwerte der Bauteile, wobei diese komplexen Größen die Beeinflussung der Amplitude und der Phase des Signals beinhalten:

| Bauteil | Widerstand | Leitwert |
|---------------------|-----------------------|-----------------------|
| Ohmscher Widerstand | R | $\frac{1}{R}$ |
| Kondensator | $\frac{1}{i\omega C}$ | $i\omega C$ |
| Spule | $i\omega L$ | $\frac{1}{i\omega L}$ |

¹Bei der Messung mit einem Oszilloskop kommt durch dessen Tastkopf eine nicht zu vernachlässigende Kapazität hinzu. Sie wird Tastkopfkapazität genannt.

²Diese folgen natürlich aus den Maxwellgleichungen:

- Knotenregel: Aus $\text{div } D = 4\pi\rho$ und $\text{rot } H = \frac{4\pi}{c}j + \frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t}$ folgt die Kontinuitätsgleichung:

$$0 = \text{div rot } H = \frac{4\pi}{c}\text{div } j + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\text{div } D = \frac{4\pi}{c}(\text{div } j + \dot{\rho}) .$$

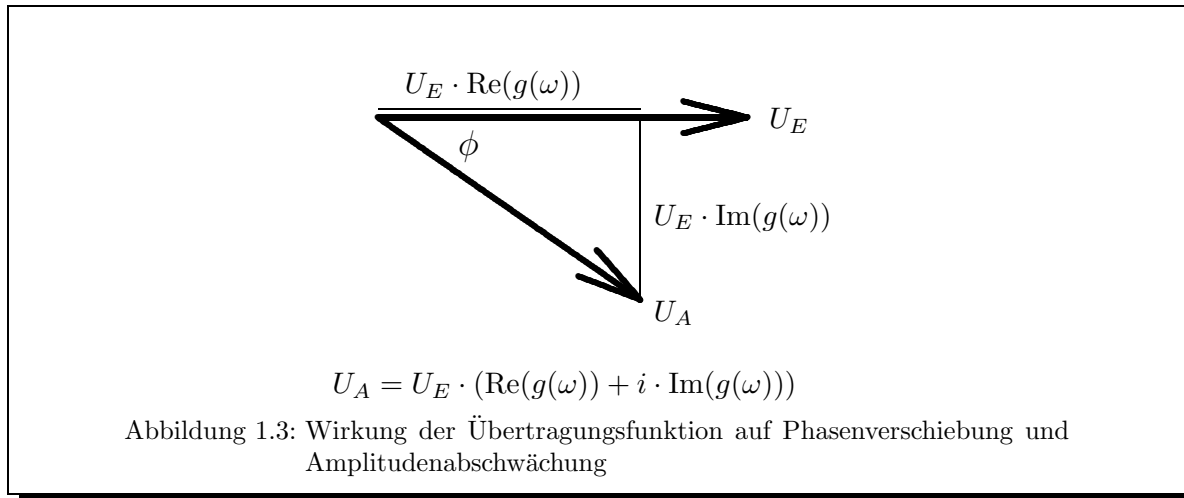
An einem Knoten entstehen keine Ladungen, deswegen ist $\text{div } j = 0$. Daher auch $\dot{\rho} = 0$, d. h. die Summe aller ab- und zufließenden Ströme muß Null sein:

$$\sum_k (\pm 1) I_k = 0 \quad \text{wobei } +1 \text{ für zufließenden und } -1 \text{ für abfließenden Strom.}$$

- Maschenregel: Es gilt $\text{rot } E = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}$. In unseren kleinen geschlossenen Schleifen sollen keine veränderlichen Magnetfelder auftreten. Dann kann man mittels Stokes $\oint E dl = 0$ schreiben. Dies besagt, daß entlang geschlossener Schleifen keine Potentialdifferenzen auftreten dürfen. Also:

$$\sum_l (\pm 1) U_l = 0 \quad \text{wobei } +1 \text{ für Verbraucher und } -1 \text{ für Spannungsquellen.}$$

Wir werden im folgenden diese beiden Regeln benutzen, ohne dies jedesmal zu erwähnen.



Nun aber zu der eigentlichen Herleitung. Es gilt:

$$U_a = U_c = \underbrace{R_C}_{\frac{1}{i\omega C}} I_C = \frac{1}{i\omega C} \cdot I_C$$

und

$$U_e = U_c + U_R = I_R R + \frac{1}{i\omega C} I_C = \left(\frac{1}{i\omega C} + R \right) I,$$

wobei wir ausgenutzt haben, daß $I_R = I_C$, wenn der Tiefpaß unbelastet ist, also $I_a = 0$. Als Verhältnis von Ausgangs- und Eingangsspannung ergibt sich damit:

$$\frac{U_a}{U_e} = \frac{\frac{1}{i\omega C}}{\frac{1}{i\omega C} + R} = \frac{1}{1 + i\omega CR} =: g(\omega)$$

Dieses $g(\omega)$ wird *Übertragungsfunktion* genannt. Man kann nun weiter umformen:

$$g(\omega) = \frac{1}{\omega^2 R^2 C^2 + 1} - \frac{i\omega RC}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

und den Betrag bilden:

$$|g(\omega)|^2 = \frac{1 + \omega^2 R^2 C^2}{(1 + \omega^2 R^2 C^2)^2} = \frac{1}{1 + \omega^2 C^2 R^2}$$

Hieraus folgt nun ein Ausdruck für die *Amplitudenabschwächung*:

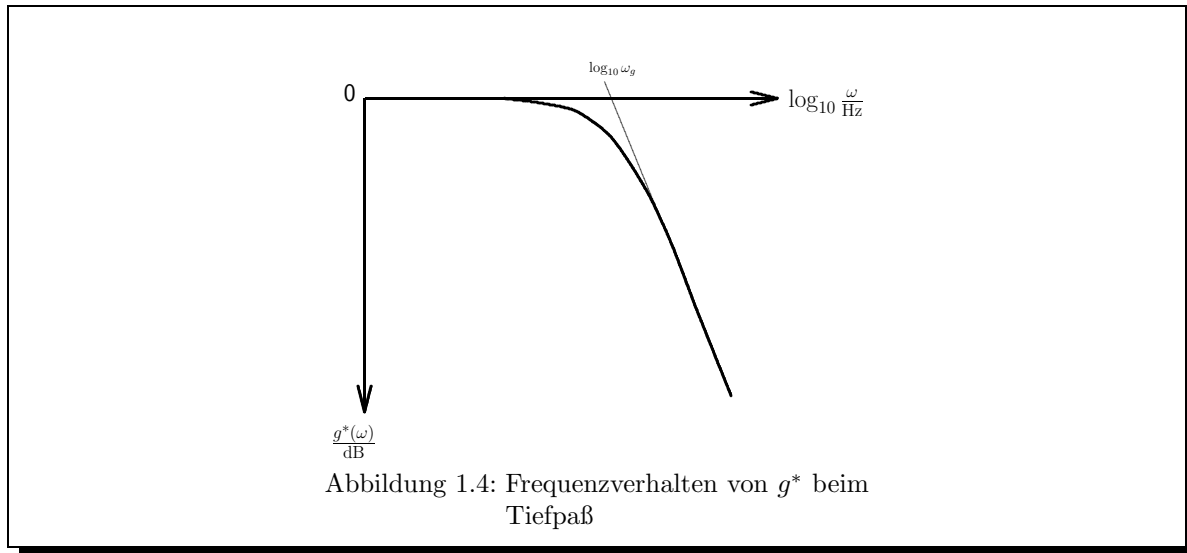
$$|U_a| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}} |U_e|.$$

Die *Phasenverschiebung* ergibt sich als $\frac{\operatorname{Im}(g(\omega))}{\operatorname{Re}(g(\omega))}$ (vgl. auch Abbildung 1.3):

$$\tan \Phi = -\omega RC$$

und somit

$$\Phi = \arctan(-\omega RC) < 0.$$



Als *Grenzfrequenz* ω_g bezeichnet man die Frequenz für die $|U_a| = \frac{1}{\sqrt{2}}|U_e|$ gilt. Damit bekommen wir

$$\omega_g = \frac{1}{RC} .$$

Man definiert nun

$$g^*(\omega) := \log_{10} \left(\underbrace{\left| \frac{U_a}{U_e} \right|^2}_{=|g(\omega)|^2} \right) = -\log_{10}(1 + \omega^2 C^2 R^2) = -10 \log_{10} \left(1 + \underbrace{\omega^2 C^2 R^2}_{\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2} \right) \text{dB}$$

und unterscheidet 3 Grenzfälle (vgl. Abb. 1.4):

$$\begin{aligned} \omega \gg \omega_g : \quad & g^*(\omega) = -20 \log_{10} \frac{\omega}{\omega_g} = -20 \log_{10} \omega + 20 \log_{10} \omega_g , \\ \omega \ll \omega_g : \quad & g^*(\omega) = -10 \log_{10} 1 = 0 , \\ \omega = \omega_g : \quad & g^*(\omega_g) = -10 \log_{10} 2 \approx -3,0103 . \end{aligned}$$

Für die Phasenverschiebung können wir jetzt in Abhängigkeit von der Grenzfrequenz

$$\Phi = \arctan \left(-\frac{\omega}{\omega_g} \right)$$

schreiben. Auch hier führen wir die Fallunterscheidung durch

$$\begin{aligned} \omega \gg \omega_g : \quad & \Phi = -\frac{\pi}{2} , \\ \omega \ll \omega_g : \quad & \Phi = 0 , \\ \omega = \omega_g : \quad & \Phi = -\frac{\pi}{4} . \end{aligned}$$

Tiefpaß mit Tastkopf

Im Gegensatz zu oben wird nun die Tastkopfkapazität mitberücksichtigt (siehe Bild 1.6). Da bei Parallelschaltung von Kondensatoren sich ihre Kapazitäten addieren, kann man obige Rechnung nun mit

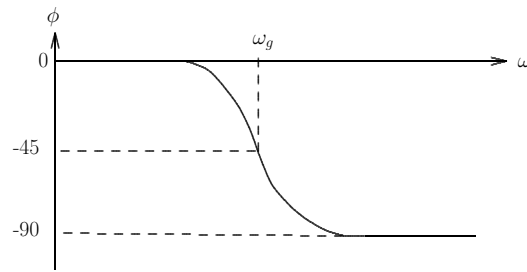


Abbildung 1.5: Phase beim Tiefpaß

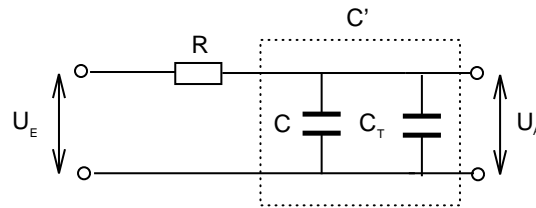


Abbildung 1.6: Tiefpaß mit Tastkopf

$C + C_T$ statt mit C durchführen. Grundsätzlich gilt daher wieder

$$U_a = U_c = \frac{1}{i\omega(C + C_T)} \cdot I,$$

$$U_e = U_c + U_R = \left(\frac{1}{i\omega(C + C_T)} + R \right) \cdot I$$

und als neue Übertragungsfunktion ergibt sich:

$$\frac{U_a}{U_e} = \frac{\frac{1}{i\omega(C+C_T)}}{\frac{1}{i\omega(C+C_T)} + R} = \frac{1}{1 + i\omega(C + C_T)R} =: g(\omega).$$

Nach den weiteren Umformungen wie oben ohne Tastkopfkorrektur

$$g(\omega) = \frac{1}{\omega^2 R^2 (C + C_T)^2 + 1} - \frac{i\omega R (C + C_T)}{1 + \omega^2 R^2 (C + C_T)^2},$$

$$|g(\omega)|^2 = \frac{1 + \omega^2 R^2 (C + C_T)^2}{(1 + \omega^2 R^2 (C + C_T)^2)^2} = \frac{1}{1 + \omega^2 (C + C_T)^2 R^2}$$

ergibt sich die Amplitudenabschwächung nun als

$$|U_a| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 (C + C_T)^2 R^2}} \cdot |U_e|$$

und die Phasenverschiebung ergibt sich diesmal durch

$$\tan \Phi = -\omega R (C + C_T)$$

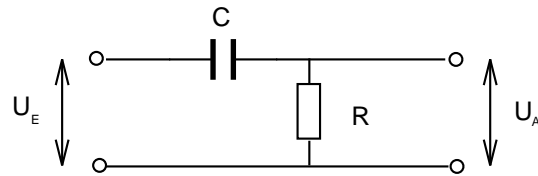


Abbildung 1.7: Hochpaß ohne Tastkopf

d. h.

$$\Phi = \arctan(-\omega R(C + C_T)) < 0.$$

Die Grenzfrequenz ist nun zu

$$\omega_g = \frac{1}{(C + C_T)R}$$

modifiziert. Wir erkennen, daß durch die Korrektur des Tastkopfes der Schnittpunkt mit der x -Achse nach links wandert.

In ausgeschriebener Form sieht unser $g^*(\omega)$ auch leicht verändert aus:

$$g^*(\omega) := -10 \log_{10} \left(1 + \underbrace{\omega^2 (C + C_T)^2 R^2}_{\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2} \right) \text{dB};$$

wenn man aber ω_g in die Formeln schreibt, ändern sich diese nicht (z. B. obige Fallunterscheidungen), man muß halt nur beachten, daß wir das modifizierte ω_g in die Formeln einsetzen müssen.

1.3.2 Hochpaß und Sinussignale

Ohne Tastkopf

Es gilt nach elementarer Betrachtung der Schaltung in Bild 1.7:

$$U_a = U_R = RI$$

und (auch der Hochpaß sei unbelastet, also $I_a = 0$, und daher $I_R = I_C =: I$)

$$U_e = U_C + U_R = \left(\frac{1}{i\omega C} + R \right) \cdot I$$

Damit ergibt sich die Übertragungsfunktion des Hochpasses zu

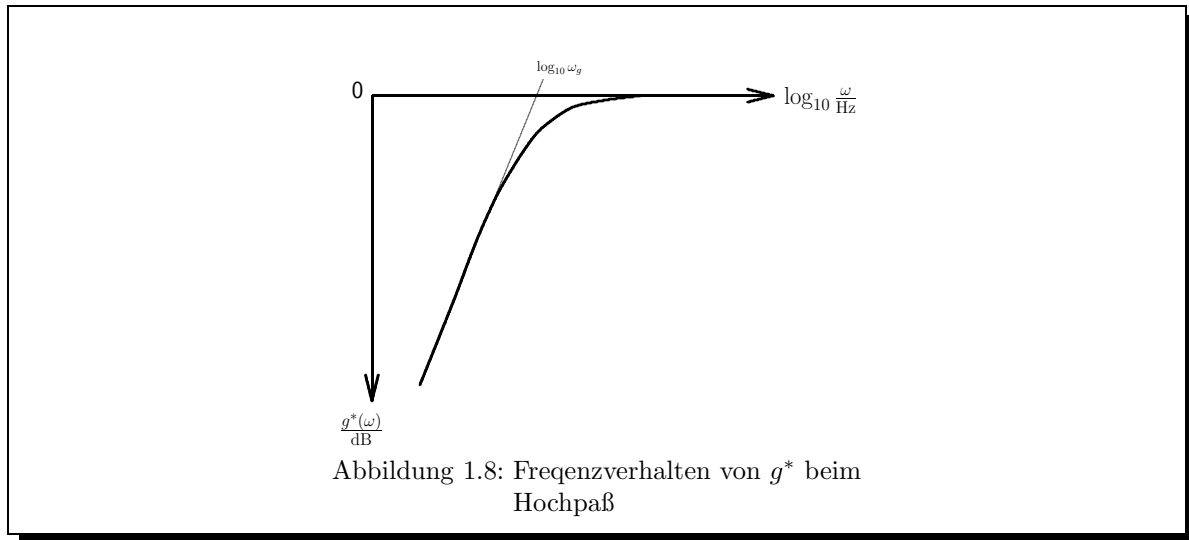
$$g(\omega) = \frac{U_a}{U_e} = \frac{R}{R + \frac{1}{i\omega C}} = \frac{\omega^2 R^2 C^2}{1 + \omega^2 C^2 R^2} + i \frac{\omega RC}{1 + \omega^2 C^2 R^2}$$

und weiter über

$$|g(\omega)|^2 = \frac{\omega^2 R^2 C^2}{1 + \omega^2 C^2 R^2}$$

als Amplitudenabschwächung der Ausdruck

$$|U_a| = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}} |U_e|.$$



Weiterhin ganz analog zum Tiefpaß bekommen wir als Phasenverschiebung

$$\tan \Phi = \frac{1}{\omega RC} ,$$

d. h.

$$\Phi = \arctan \left(\frac{1}{\omega RC} \right) > 0 .$$

Weiterhin berechnen wir auch die Grenzfrequenz nach gleichem Muster wie oben; es ergibt sich dergleiche Ausdruck wie beim Tiefpaß:

$$\omega_g = \frac{1}{RC} .$$

Wir definieren nun wiederum ein $g^*(\omega)$:

$$g^*(\omega) = 10 \log_{10} \left(\frac{\omega^2 R^2 C^2}{1 + \omega^2 C^2 R^2} \right) \text{ dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2} \right) \text{ dB}$$

Erneut können wir 3 Grenzfälle unterscheiden (vgl. Abb. 1.8):

$$\begin{aligned} \omega \gg \omega_g : \quad & g^*(\omega) = 10 \log_{10} 1 = 0 , \\ \omega \ll \omega_g : \quad & g^*(\omega) = 20 \log_{10} \omega - 20 \log_{10} \omega_g , \\ \omega = \omega_g : \quad & g^*(\omega_g) = 10 \log_{10} \frac{1}{2} = -10 \log_{10} 2 \approx -3.0103 . \end{aligned}$$

Entsprechend auch bei der Phasenverschiebung $\Phi = \arctan \left(\frac{1}{\omega RC} \right)$:

$$\begin{aligned} \omega \gg \omega_g : \quad & \Phi = 0 , \\ \omega \ll \omega_g : \quad & \Phi = \frac{\pi}{2} , \\ \omega = \omega_g : \quad & \Phi = \frac{\pi}{4} . \end{aligned}$$

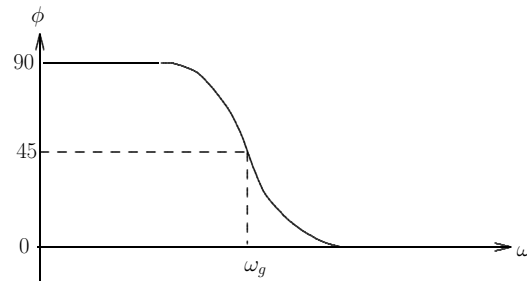


Abbildung 1.9: Phase beim Hochpaß

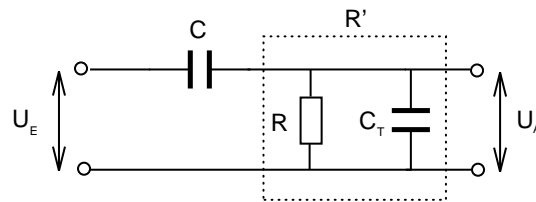


Abbildung 1.10: Hochpaß mit Tastkopf

Hochpaß mit Tastkopf

Man kann nun wieder die Tastkopfkapazität des Oszilloskops berücksichtigen und gelangt so zu einem Ersatzschaltbild eines Hochpasses mit Tastkopf (siehe Bild 1.10).

Für die Widerstände gilt $\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_{C_T}}$, wobei $\frac{1}{R_{C_T}} = i\omega C$. Den komplexen Gesamtwiderstand R' , den die parallelgeschalteten R und C_T bilden, erhalten wir also durch den Ausdruck:

$$R' = \frac{R}{1 + i\omega C_T R}$$

Für den Gesamtwiderstand der ganzen Anordnung ergibt sich somit

$$R_{\text{ges}} = \frac{1}{i\omega C} + R' = \frac{1 + i\omega R(C + C_T)}{i\omega C(1 + i\omega R C_T)}$$

Weiterhin gilt wieder nach elementaren Regeln $U_a = U_{C_T} = U_R$ und $U_e = U_C + U_R$, somit also $U_a = U_e - U_C$. Mit $U_C = I_C R_C = \frac{U_e}{R_{\text{ges}}} R_C$ erhält man daher

$$U_a = \frac{i\omega R C}{1 + i\omega R(C + C_T)} \cdot U_e$$

und so für die Übertragungsfunktion des Hochpasses mit Tastkopfkorrektur

$$g(\omega) = \frac{U_a}{U_e} = \frac{i\omega R C}{1 + i\omega R(C + C_T)}$$

Für den Betrag gilt dann:

$$|g(\omega)| = \frac{|U_a|}{|U_e|} = \frac{\sqrt{\omega^2 R^2 C^2 + \omega^4 R^4 C^2 (C + C_T)^2}}{1 + \omega^2 R^2 (C + C_T)^2}$$

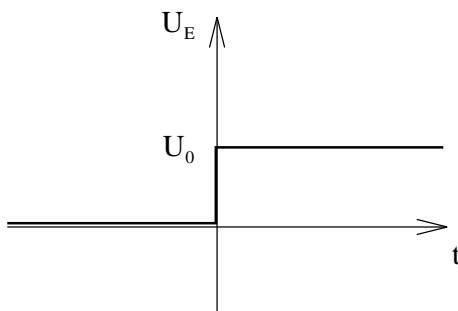
Für den Phasenwinkel Φ ergibt sich (man vergleiche zur Erinnerung mal wieder mit Abbildung 1.3)

$$\tan \Phi = \frac{\omega RC}{\omega^2 R^2 C(C + C_T)} = \frac{1}{\omega R(C + C_T)}$$

und somit schließlich

$$\Phi = \arctan \left(\frac{1}{\omega R(C + C_T)} \right).$$

1.3.3 Tiefpaß mit Stufensignalen



Während wir uns in den obigen Schaltungen mit sinusförmigen Signalen beschäftigt haben, betrachten wir nun diskrete *Stufensignale* (vgl. Abb. 1.11). Dafür werden wir nun nach einer DGL suchen, die uns Aufschluß über das zeitliche Verhalten der Schaltungen geben soll. Dieses Verhalten wird sich dann als wichtig in der Impulsformung erweisen.

Es gilt $Q = CU_C$ und $I = \dot{Q} = C\dot{U}_c = C\dot{U}_a$ (wir betonen nochmal, daß der Tiefpaß unbelastet ist, also $I_a = 0$ und daher $I_R = I_C$). Weiterhin gilt

$$U_e = U_R + U_C = R\dot{Q} + U_a = RC\dot{U}_a + U_a.$$

Abb. 1.11: Prototyp eines Stufensignals

Daraus ergibt sich nun die Differentialgleichung

$$\frac{dU_a}{dt} = \frac{U_e - U_a}{RC},$$

die man nach bekanntem Muster lösen kann.

Zuerst zum homogenen Fall: Dort gilt:

$$\frac{dU_a}{dt} = -\frac{U_a}{RC}.$$

Durch Trennung der Variablen ergibt sich daraus:

$$\frac{dU_a}{U_a} = -\frac{1}{RC} dt,$$

was integriert

$$\ln U_a = -\frac{t}{RC} + \text{const}_1$$

ergibt. Nach der Ausgangsspannung aufgelöst, lautet die homogene Lösung:

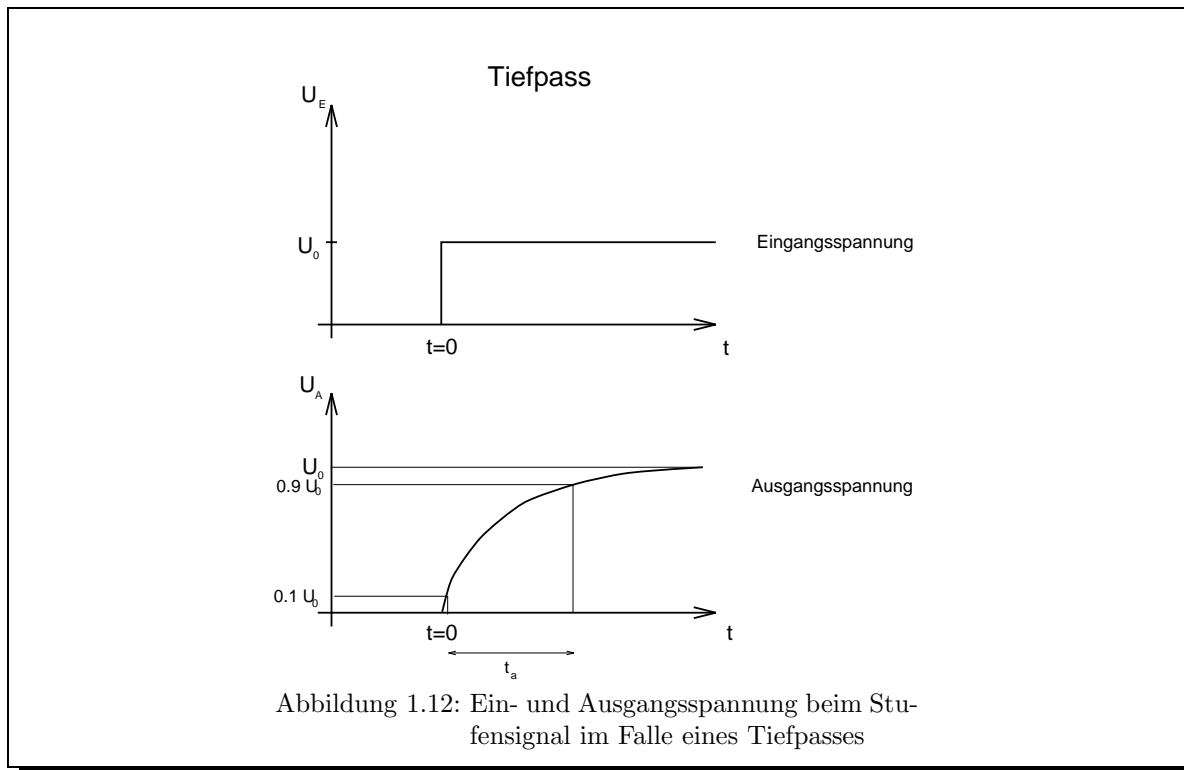
$$U_a = k e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Im inhomogenen Fall findet man mit $U_e = \text{const}$ natürlich die inhomogene Lösung

$$U_a = k e^{-\frac{t}{RC}} + U_e.$$

Zur Bestimmung der Konstanten k machen wir uns folgendes klar: Da es sich um ein Stufensignal handelt, wären für einen Sprung bei $U_a(0)$ hohe Frequenzen notwendig, wie an der Laplacedarstellung deutlich wird. Da wir aber einen Tiefpaß haben, wissen wir, daß eben diese nur sehr schlecht durchgelassen werden. Daher muß

$$U_a(0) = 0$$



gelten, was mit unserer inhomogenen Gleichung folgende Konstante fordert:

$$U_a = 0 = k + U_e \quad \Rightarrow \quad k = -U_e .$$

Insgesamt ergibt sich also als Lösung für die Ausgangsspannung bei Einschalten eines Stufensignals

$$U_a = U_e \cdot (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) . \quad (1.1)$$

Die Anstiegszeit t_a ist als die Zeit definiert, in der die Ausgangsspannung von $0,1 U_e$ auf $0,9 U_e$ ansteigt. Sie ergibt sich demnach als Differenz der Zeitpunkte, die wir mittels

$$\begin{aligned} U_a = 0,1 U_e &= U_e \cdot (1 - e^{-\frac{t_{10\%}}{RC}}) \\ \Rightarrow e^{-\frac{t_{10\%}}{RC}} &= 0,9 \\ \Rightarrow -\frac{t_{10\%}}{RC} &= \ln 0,9 \\ \Rightarrow t_{10\%} &= -RC \ln 0,9 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} U_a = 0,9 U_e &= U_e \cdot (1 - e^{-\frac{t_{90\%}}{RC}}) \\ \Rightarrow e^{-\frac{t_{90\%}}{RC}} &= 0,1 \\ \Rightarrow -\frac{t_{90\%}}{RC} &= \ln 0,1 \\ \Rightarrow t_{90\%} &= -RC \ln 0,1 \end{aligned}$$

bestimmen, also:

$$t_a = t_{90\%} - t_{10\%} = +RC(\ln 0,9 - \ln 0,1) = RC \ln 9 .$$

Wenn eine Tastkopfkapazität vorliegt, so wissen wir schon, daß wir wieder einfach nur C durch $C + C_T$ ersetzen müssen. Es gilt dann für den Tiefpaß mit Tastkopf:

$$t_a = R \cdot (C + C_T) \ln 9 .$$

1.3.4 Tiefpaß als Integrierglied

Wenn die bestimmenden Frequenzen des Eingangssignal groß sind gegenüber der Grenzfrequenz des Tiefpasses, so wirkt dieser als Integrierer. Um dies auch in Formeln darstellen zu können, vergleichen wir die Größe der auftretenden Widerstände miteinander:

$$\omega \gg \omega_g = \frac{1}{RC} \quad \Rightarrow \quad R \gg \frac{1}{\omega C} = |R_C| .$$

Also ist R_C vernachlässigbar klein. Mit $U_a = U_C = R_C \cdot I \approx 0$, vereinfacht sich die Differentialgleichung zu

$$U_e = RC \frac{dU_a}{dt} + \underbrace{R_C I}_{\approx 0} \approx RC \frac{dU_a}{dt}$$

und dies ergibt nach U_a aufgelöst

$$U_a = \frac{1}{RC} \int U_e dt .$$

In der letzten Gleichung wird also deutlich, daß der Tiefpaß bei hohen Frequenzen in der Tat als Integrierglied wirkt. So kann man denn aus Rechtecksignalen Dreieckssignale erzeugen, wenn nur die Zeitkonstante des Tiefpasses $\tau = RC$ groß genug ist.

1.3.5 Hochpaß mit Stufensignalen

Es gelten die Gleichungen $Q = CU_C$, bzw. $U_C = \frac{Q}{C}$ und $U_a = U_R = RI = R\dot{Q}$ (auch hier rechnen wir mit einem unbelasteten Hochpaß: $I_a = 0$). Setzt man diese Zusammenhänge in die außerdem geltende Beziehung $U_e = U_C + U_R$ ein, so ergibt sich

$$U_e = \frac{Q}{C} + U_a \quad \text{bzw.} \quad Q = C(U_e - U_a) .$$

Nach Differenzieren erhält man unter Beachtung von $\dot{Q} = I = \frac{U_a}{R}$ die Differentialgleichung:

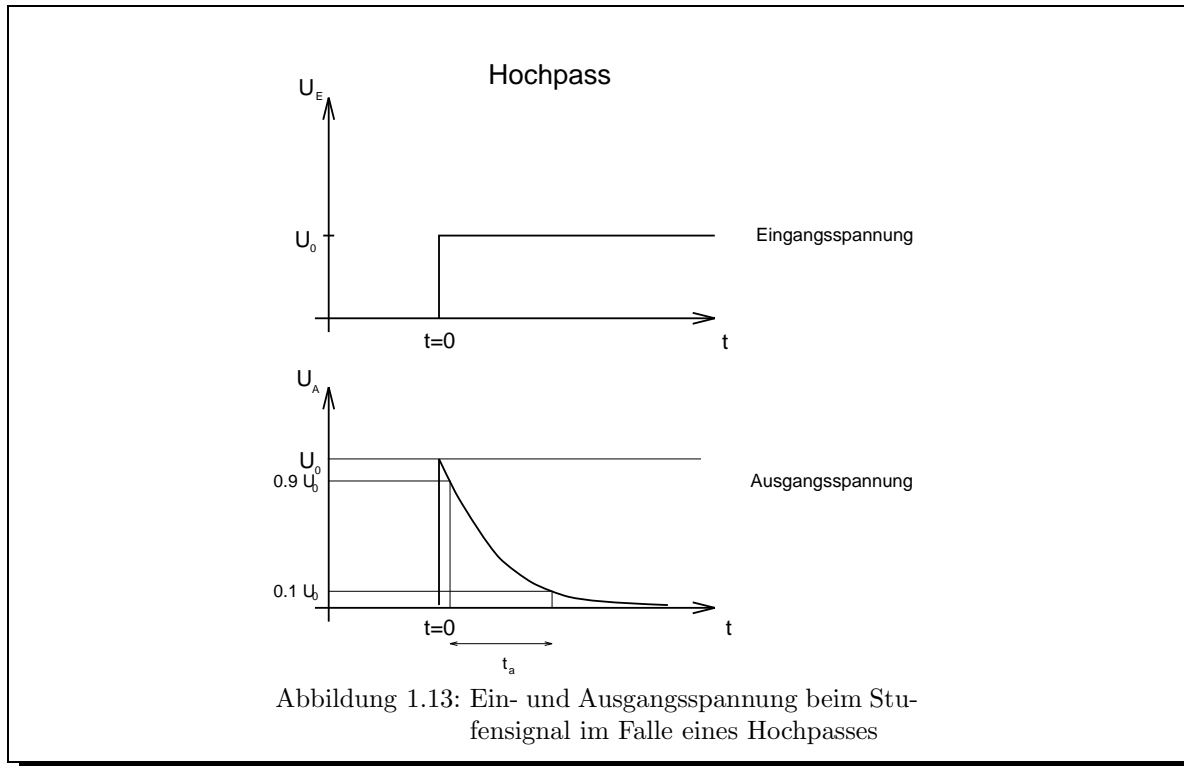
$$U_a = -RC \cdot \left(\frac{dU_a}{dt} - \frac{dU_e}{dt} \right) .$$

Die homogene Gleichung entspricht der Differentialgleichung des Tiefpasses, hat also dieselbe Lösung; der inhomogene Term fällt bei uns aber weg, da $U_e = \text{const}$ für positive Zeiten. Also:

$$U_a = ke^{-\frac{t}{RC}} .$$

Da der Hochpaß hohe Frequenzen ungehindert durchläßt, liegt die Eingangsspannung direkt zum Zeitpunkt Null am Ausgang an. Also gilt die Anfangsbedingung $U_a(0) = U_e$ und man kann die Konstante k ersetzen. Man erhält also endlich die Lösung

$$U_a = U_e e^{-\frac{t}{RC}} .$$



Nun wieder zur Anstiegszeit, die man hier besser Abfallzeit nennen sollte, denn die Ausgangsspannung sinkt ja diesmal von $0,9 U_e$ auf $0,1 U_e$.

$$\begin{aligned}
 U_a = 0,1 U_e &= U_e e^{-\frac{t_{10\%}}{RC}} \\
 &\Rightarrow t_{10\%} = -RC \ln 0,1, \\
 U_a = 0,9 U_e &= U_e e^{-\frac{t_{90\%}}{RC}} \\
 &\Rightarrow t_{90\%} = -RC \ln 0,9.
 \end{aligned}$$

Somit also:

$$t_a = t_{10\%} - t_{90\%} = +RC(\ln 0,9 - \ln 0,1) = RC \ln 9.$$

Also ist auch hier wieder RC eine Zeitkonstante. Nach einer länglichen Rechnung, die wir hier nicht explizit durchführen wollen, erhält man für die Anstiegszeit des Hochpasses mit Tastkopf, den gleichen Term wie für den Tiefpaß mit Tastkopf. Für den Hochpaß mit Tastkopf gilt daher also auch:

$$t_a = R \cdot (C + C_T) \ln 9.$$

1.3.6 Hochpaß als Differenzierglied

Nun kommen wir zum Differenzierglied: Wenn die bestimmenden Frequenzen des Eingangssignals klein sind gegenüber der Grenzfrequenz des Hochpasses, so wirkt dieser als Differenzierer. In Formeln kann man das folgendermaßen nachvollziehen:

$$\omega \ll \omega_g = \frac{1}{RC} \quad \Rightarrow \quad R \ll \frac{1}{\omega C} = |R_C|$$

und somit kann man in

$$U_e = R_C I + \underbrace{RI}_{\approx 0} \approx R_C I = U_C = \frac{Q}{C}$$

den gekennzeichneten Term vernachlässigen. Nach Differenzieren erhält man unter Beachtung von $\dot{Q} = I = \frac{U_a}{R}$ die Gleichung

$$U_a = RC \dot{U}_e .$$

In der letzten Gleichung erkennen wir diesmal, daß ein Hochpaß bei niedrigen Frequenzen in der Tat als Differenzienglied wirkt.

1.4 Leitungsvorgänge im Kabel

In diesem Abschnitt wollen wir beschreiben, wie eine elektromagnetische Leitung in einem Kabel von-statten geht. Wir definieren zunächst einige Begriffe, leiten die Leitergleichungen her und folgern hieraus mit einigen Idealisierungen die Wellengleichung. Unter den Randbedingungen verschiedener Abschluß-widerstände untersuchen wir dann den Einfluß von Kabelenden durch Signal-Reflexionen.

Genauere Betrachtungen über Kabelphänomene befinden sich in [Elek]: Herr Nitsch ist ja Experte von elektromagnetischer Störeinkopplung in Kabel (in Autos und Flugzeugen. . .).

Begriffe und Leitergleichungen

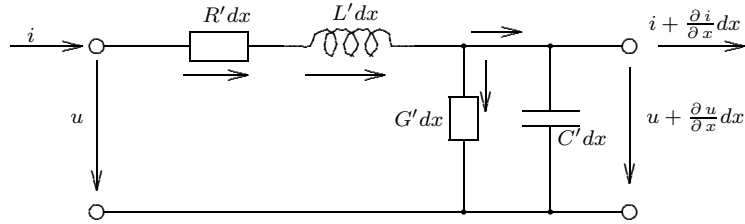
Die in der Elektronik verwendeten wichtigsten zweipoligen Leitungen sind

- Koaxialkabel,
- Doppeldrahtleitungen,
- Streifenleitungen.

Unabhängig von der Bauform kann jede zweipolige Leitung als Vierpol beschrieben werden und sie ist durch vier Größen charakterisiert, welche jeweils auf eine Längeneinheit bezogen wird und daher das Wortende ‚belag‘ erhält. Dabei handelt es sich um:

- *Widerstandsbelag* $R' = \frac{\text{Ohm'scher Widerstand}}{\text{Länge}}$: Diese Größe beschreibt den Energieverlust, der bei der elektromagnetischen Leitung durch Wärmeumwandlung, etc. entsteht.
- *Ableitungsbelag* $G' = \frac{\text{Ohm'scher Querleitwert}}{\text{Länge}}$: Hiermit wird der Kehrwert des Ohm'schen Widerstands zwischen den beiden Drähten beschrieben. Ein Teil des Signals wird also durch die nicht ganz ideale Isolierung zwischen den Drähten kurzgeschlossen.
- *Kapazitätsbelag* $C' = \frac{\text{Kapazität}}{\text{Länge}}$: Dies beschreibt die Kapazität, die durch die beiden Drähte und die dazwischenliegende Isolierschicht entsteht.
- *Induktivitätsbelag* $L' = \frac{\text{Induktivität}}{\text{Länge}}$: Die einzelnen Drähte widersetzen sich dem Anstieg des Stroms mit ihrer Induktivität.

Der Ableitungsbelag und der Widerstandsbelag führen zu einer Dämpfung des Signals. Diese ist meist ziemlich gering, sodaß wir R' und G' später vernachlässigen werden. Aber zunächst zu den Leiterglei-chungen: Ein Leitungselement mit Verlusten können wir mittels dem nachfolgendem Ersatzschaltbild darstellen. Am Ausgang des Ersatzschaltbildes sind der Strom i um $\frac{\partial i}{\partial x} dx$ und die Spannung u um $\frac{\partial u}{\partial x} dx$ verschieden vom Eingang.



An Längswiderstand und -induktivität verursacht i den Spannungsabfall

$$R' dx \cdot i + L' dx \cdot \frac{\partial i}{\partial t}$$

und es gilt mit der Maschenregel:

$$u = R' dx \cdot i + L' dx \cdot \frac{\partial i}{\partial t} + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx .$$

Dies führt zur 1. Leitergleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = - \left(R' + L' \frac{\partial}{\partial t} \right) i . \quad (1.2)$$

Durch den Querleitwert und die Querkapazität schickt u den Strom

$$G' dx \cdot u + C' dx \cdot \frac{\partial u}{\partial t}$$

und es gilt mit der Knotenregel:

$$i = G' dx \cdot u + C' dx \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + i + \frac{\partial i}{\partial x} dx .$$

Dies führt nun zur 2. Leitergleichung:

$$\frac{\partial i}{\partial x} = - \left(G' + C' \frac{\partial}{\partial t} \right) u . \quad (1.3)$$

Wellengleichung und Abschlußwiderstände

Wir setzen nun $R' = 0$ und $G' = 0$, wollen also eine dämpfungsfreie Leitung betrachten. Das Ersatzschaltbild einer solchen Leitung mit Abschlußwiderstand R_A sieht also nun folgendermaßen aus:

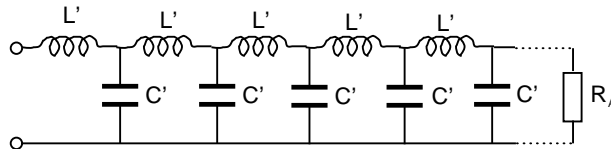


Abbildung 1.14: Ersatzschaltbild eines Kabels

Wir nehmen nun unsere Leitergleichungen und leiten diese nochmals nach x ab:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -L' \cdot \frac{\partial i}{\partial t} & \frac{\partial i}{\partial x} &= -C' \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -L' \cdot \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = L' C' \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} & \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} &= -C' \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = L' C' \cdot \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} . \end{aligned}$$

Mit $v_{\text{Ph}} := \frac{1}{\sqrt{L'C'}}$ erhält man nun also die zwei Wellengleichungen für Strom und Spannung:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{1}{L'C'} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = v^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} &= \frac{1}{L'C'} \cdot \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = v^2 \cdot \frac{\partial^2 i}{\partial x^2}.\end{aligned}$$

Das v beschreibt nun – wie bei jeder Wellengleichung – die *Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle* entlang der Leitung.

Die allgemeine Lösung einer Wellengleichung, die wir für die Spannung aufschreiben, lautet mit zwei zweimal stetig differenzierbaren Funktionen f und g :

$$u(x, t) = f\left(t - \frac{x}{v_{\text{Ph}}}\right) + g\left(t + \frac{x}{v_{\text{Ph}}}\right).$$

Hierbei beschreibt f die hinlaufende Welle, g die rücklaufende Welle. Aufgrund der Leitergleichungen sind nun die Ableitungen von i nach x bzw. t festgelegt. Daher muß nun die Lösung für i so aussehen:

$$i(x, t) = \sqrt{\frac{C'}{L'}} \cdot f\left(t - \frac{x}{v_{\text{Ph}}}\right) - \sqrt{\frac{C'}{L'}} \cdot g\left(t + \frac{x}{v_{\text{Ph}}}\right).$$

Mit der Definition

$$Z_W := \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

ergibt sich also $u = Z_W \cdot i$, d. h. Z_W entspricht einem Widerstand und wir bezeichnen ihn mit *Wellenwiderstand des Leiters*.

Während bei einer unendlich langen Leitung keine Kopplung zwischen der hinlaufenden Welle f und der rücklaufenden Welle g besteht, treten an Leitungsenden Verknüpfungen durch Reflexionsvorgänge auf. Wir beschränken uns auf den Abschluß der Leitung mit Ohm'schen Widerständen R_A . Dann gilt am Leitungsende $u(l, t) = R_A \cdot i(l, t)$. Also mit unseren Lösungen:

$$f\left(t - \frac{l}{v_{\text{Ph}}}\right) + g\left(t + \frac{l}{v_{\text{Ph}}}\right) = \frac{R_A}{Z_W} \cdot f\left(t - \frac{l}{v_{\text{Ph}}}\right) - \frac{R_A}{Z_W} \cdot g\left(t + \frac{l}{v_{\text{Ph}}}\right).$$

Nach der Auflösung nach g erhält man:

$$g\left(t + \frac{l}{v_{\text{Ph}}}\right) = \frac{R_A - Z_W}{R_A + Z_W} \cdot f\left(t - \frac{l}{v_{\text{Ph}}}\right), \quad (1.4)$$

d. h. am Ende der Leitung entsteht eine rücklaufende Welle, die in ihrer Form der hinlaufenden entspricht; man hat also eine Reflexion, die aber um den *Reflexionsfaktor*

$$r := \frac{R_A - Z_W}{R_A + Z_W}$$

gedämpft ist. Wir betrachten drei Spezialfälle:

- *reflexionsfreier Abschluß*: $R_A = Z_W$. Dann ist $r = 0$, eine hinlaufende Welle wird gar nicht reflektiert. Ein solcher Abschluß mit dem Wellenwiderstand verhindert also Mehrfachreflexionen, indem er praktisch eine unendlich lange Leitung vorgaukelt.
- *offenes Ende oder Leerlauf*: $R_A = \infty$. Dann ist $r = 1$, die hin- und rücklaufende Welle addieren sich also.

Man kann sich das folgendermaßen plausibel machen: Das Ende der Leitung wirkt wie ein Reihenresonanzkreis (Kondensator und Spule in Reihe), auch Spannungsresonanzkreis genannt. Während

der Kondensator noch geladen wird, baut die Spule ihr Magnetfeld wieder ab. Aufgrund der Lenz'schen Regel wird eine Spannung induziert, die die Aufladung weiter fortsetzt bis das Doppelte der ursprünglichen Ladung erreicht ist. Das reflektierte Signal ist also vom gleichen Vorzeichen, somit addieren sich hin- und rücklaufende Welle, wie eben ja schon nach unserer Rechnung festgestellt.

- *Kurzschluß*: $R_A = 0$. Dann ist $r = -1$, die hin- und rücklaufenden Wellen subtrahieren sich. Dies ist auch anschaulich direkt klar, da ja die Spannungen am Kurzschluß verschwinden müssen.

Abschließend erwähnen wir noch, daß die für die geeignete Wahl des Abschlußwiderstands wichtige Bestimmung des Wellenwiderstands für verschiedene Leitungstypen in [Elek, S. 101–108] durchgeführt wurde, für das Koaxialkabel ergibt sich z. B. $Z_W = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$ (r_1 : Radius des inneren Drahts, r_2 : Radius des äußeren Drahts).

1.5 Diskriminatoren

1.5.1 Die Diode

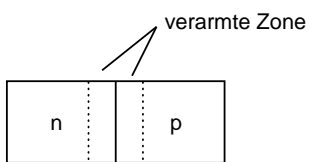


Abb. 1.15: Schematisches Bild einer Diode

Bringt man einen p-dotierten und einen n-dotierten Halbleiter zusammen, dann erhält man einen sogenannten pn-Übergang. An der Grenzfläche zwischen den Schichten diffundieren aufgrund der Konzentrationsdifferenzen Löcher in den n-Leiter und Elektronen in den p-Leiter. Es kommt zu einer an freien Ladungsträgern verarmten Zone durch Rekombination von Elektronen und Löchern; es bleiben nur die geladenen Atomrümpfe zurück. Diese dünne Schicht ohne freie Ladungsträger wirkt praktisch wie ein Isolator. Die Diffusion der Elektronen und Löcher hört auf, wenn die durch diese

Wanderung entstehende Spannung, die durch die geladenen festen Atomrümpfe erzeugt wird, *Antidiffusionsspannung* genannt wird und der Diffusion entgegenwirkt, gerade gleich der *Diffusionsspannung* ist. Es entsteht ein dynamisches Gleichgewicht. Die Diffusionsspannung ist insbesondere abhängig vom pn-Dichtegefälle und von der Temperatur. Letztere ist ein Maß für die mittlere Energie der Elektronen und somit für deren Diffusionsfähigkeit. In Abbildung 1.16 haben wir die Wirkungen der Diffusions- und Antidiffusionsspannung nochmal im Bändermodell dargestellt.

Die Diode hat die Eigenschaft eines Ventils für elektrischen Strom:

Wird an sie eine Spannung wie in Bild 1.17 angelegt, so werden Elektronen aus der n-Schicht und Löcher aus der p-Schicht abgesaugt, was die Sperrschicht noch vergrößert. Abgesehen vom Abzugsstrom fließt praktisch kein Strom mehr. Die Diode sperrt.

Schaltet man dagegen die Diode wie in Bild 1.18, so werden die Elektronen und Löcher durch die Sperrschicht gedrückt. Die Sperrschicht wird zugeschwemmt. Es fließt allerdings erst ein Strom durch die Diode, wenn die angelegte Spannung zusammen mit der Diffusionsspannung die Antidiffusionsspannung übersteigt, da erst dann Ladungsträger in die gegenüberliegende Schicht diffundieren können. Man spricht hierbei auch von *Schleusenspannung*. Wenn die Sperrschicht dann abgebaut ist, wird der pn-Übergang leitend und der Strom steigt exponentiell mit der Spannung an. Dieses Verhalten läßt sich graphisch darstellen: Man bekommt dann die sogenannte *Kennlinie einer Diode*, wie wir sie in Abbildung 1.19 gezeichnet haben.

Anwendungen der Sperrschicht der Diode z. B. zur Detektion von Teilchen wird in den entsprechenden Versuchen beschrieben. Wir wollen die Diode nur zur Begrenzung von Spannungen verwenden, was wir nun in den verschiedenen Begrenzerschaltungen beschreiben wollen.

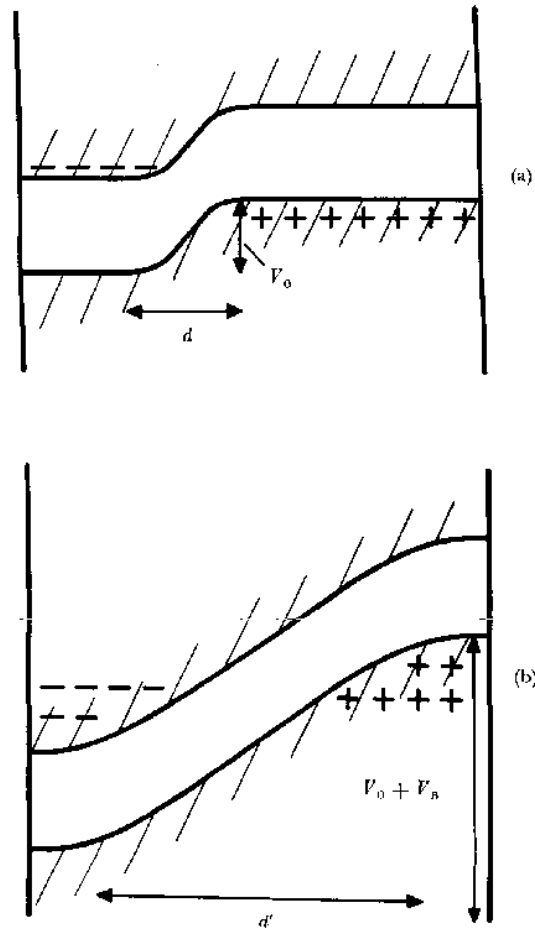
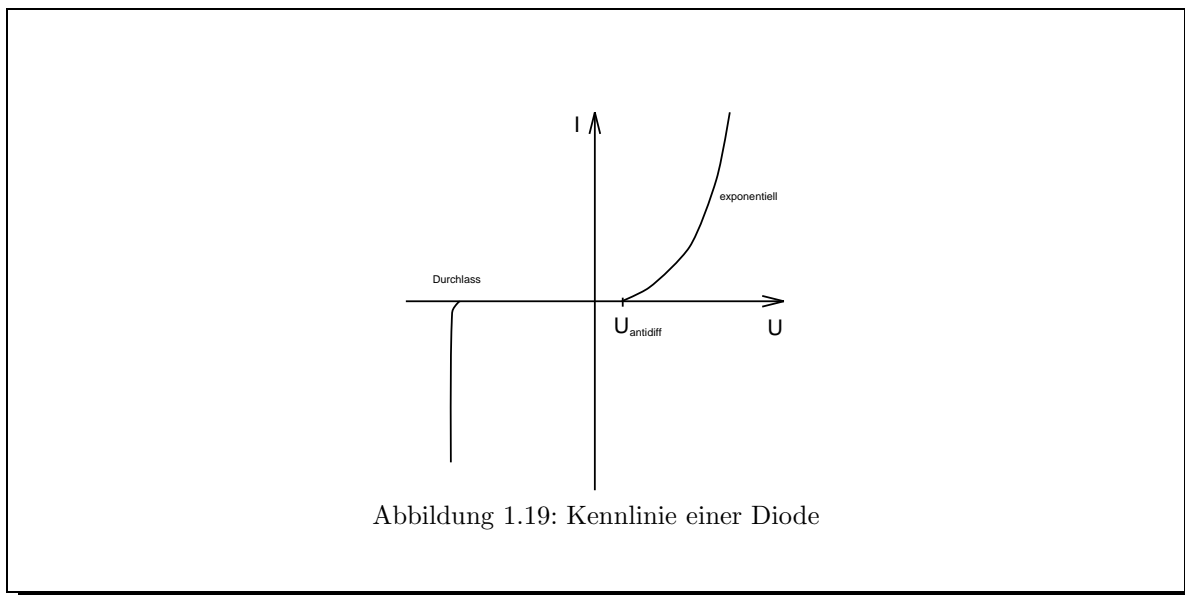
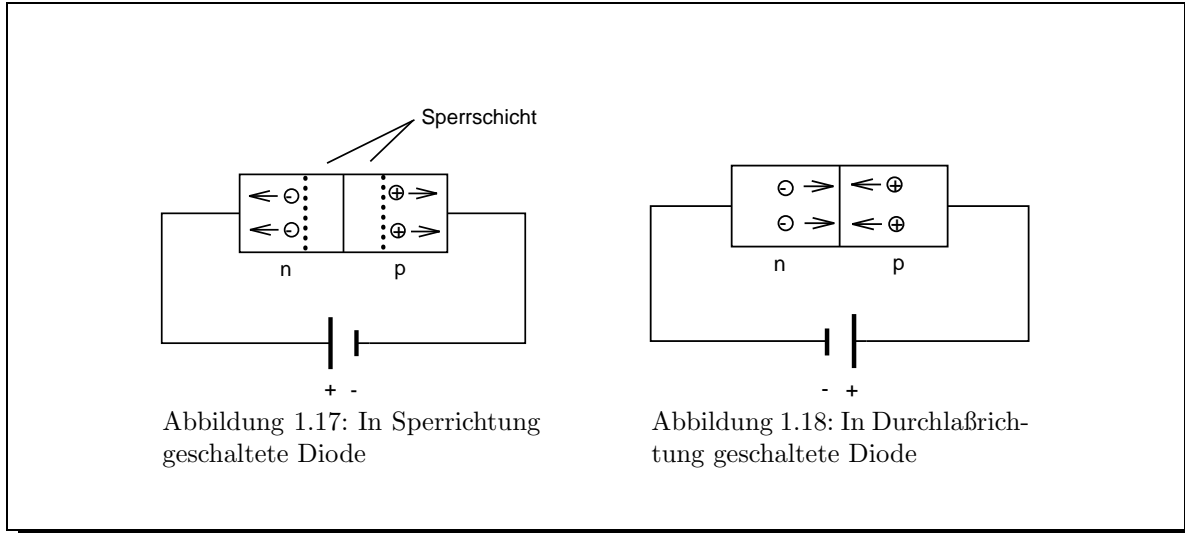
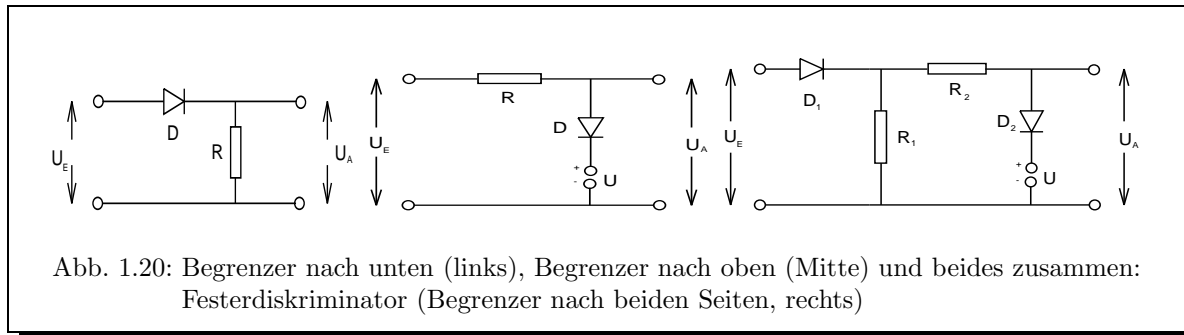


Abb. 1.16: Energy diagram of a p-n semiconductor junction (a) in absence; (b) in presence of an applied bias potential V_B . (Bild eingescannt und Bildunterschrift aus [MS]). Links befindet sich der p-dotierte Halbleiter, rechts der n-dotierte. Durch die Antidiffusionsspannung V_0 , angedeutet durch die + und - der Atomrümpfe, werden die Bänder des n-dotierten Halbleiters um diese Spannung angehoben. Die Diffusionsspannung wirkt einem weiteren Anwachsen dieser Verschiebung entgegen. Durch die angelegte Sperrspannung V_B wächst der Bandabstand dann doch. Das d und das d' zeigen die Breite der jeweiligen Sperrschicht.





1.5.2 Verschiedene Begrenzer

Begrenzer nach unten

Ein Begrenzer nach unten, auch Diskriminator genannt, begrenzt, wie der Name es schon sagt, ein Signal nach unten, d.h. er läßt nur die Teile eines Signals durch, die eine bestimmte Schwellenspannung U_0 überschreiten. Eine Realisierung eines Begrenzers nach unten ist in Abbildung 1.20 links gegeben.

Wie funktioniert nun aber solch ein Diskriminator?

Wir betreiben die Diode in Durchlaßrichtung gerade dann, wenn $U_E > 0$ ist. Die daraus resultierende Ausgangsspannung ist dann gegeben durch $U_A = U_E - U_D$. Legen wir jedoch eine Eingangsspannung $U_E < 0$ an, so sperrt die Diode und es fließt ein Sperrstrom ≈ 0 . Damit ergibt sich auch für die Ausgangsspannung $U_A \approx 0$.

Begrenzer nach oben

Ein Begrenzer nach oben, auch einfach nur Begrenzer genannt, verhindert das Übersteigen einer (i.a. einstellbaren) Spannung. Eine Realisierung eines Begrenzers ist in Abbildung 1.20 Mitte gegeben.

Falls wir bei dieser Schaltung eine Eingangsspannung $U_E < U$ anlegen, dann sperrt die Diode und es gilt für die Ausgangsspannung $U_A = U_E$. Wird jedoch eine Eingangsspannung $U_E > U$ angelegt, so wird die Diode in Durchlaßrichtung betrieben und wegen ihres geringen Widerstandes fällt nahezu die gesamte Spannung an R ab. Damit gilt $U_A \approx U$.

Begrenzer nach oben und unten

Ein Begrenzer nach oben und unten, auch Fensterdiskriminator genannt, besteht aus einem Begrenzer nach unten und einem Begrenzer nach oben. Er läßt somit nur Spannungen, die innerhalb eines bestimmten Intervalls (Fenster) liegen, durch. Der von uns zu bauende Fensterdiskriminator ist in Abbildung 1.20 rechts dargestellt. Hierbei liegt die untere Schwelle des Fensterdiskriminators bei $0V$ (D_1) und die obere bei der eingestellten Spannung U (D_2), wobei jeweils die Durchlaßspannungen der Diode noch abzuziehen sind.

2. Auswertung

2.1 Hoch- und Tiefpaß

2.1.1 Kapazitätenbestimmung über Grenzfrequenzen (Sinussignale)

In diesem Auswertungsteil werden wir die Grenzfrequenzen auf der Grundlage unserer Meßwerte berechnen. Dies können wir auf zwei verschiedene Arten machen, und zwar mit Hilfe der Amplitudenabschwächung oder mit Hilfe der Phasenverschiebung. Die dazu nötige Theorie wurde in der Vorbereitung schon in aller Ausführlichkeit dargelegt. Sobald wir die Grenzfrequenz bestimmt haben, werden wir daraus unter Berücksichtigung der Tastkopfkapazität auf die Kapazität des Kondensators zurückrechnen.

Grenzfrequenzen aus der Amplitudenabschwächung beim Tiefpaß

Wir haben eine Eingangsspannung U_E von 10 V angelegt und die Ausgangsspannung U_A bei verschiedenen Frequenzen gemessen.

Für $C = 150 \text{ pF}$ und $R = 47\,500 \Omega \pm 1\%$ hatten wir folgende Meßwerte:

| Tiefpaß 1 | | | |
|--------------------|------------------|-----------------|------------------------|
| $T[\mu\text{sec}]$ | $\nu[\text{Hz}]$ | $U_A[\text{V}]$ | $\Delta U_A[\text{V}]$ |
| 6 900 | 144 | 10 | 0,2 |
| 690 | 1 440 | 10 | 0,2 |
| 69 | 14 450 | 10 | 0,2 |
| 53 | 19 000 | 10 | 0,2 |
| 13,8 | 72 000 | 9,5 | 0,2 |
| 11 | 90 000 | 9 | 0,2 |
| 8,3 | 120 000 | 8,7 | 0,2 |
| 7,1 | 140 000 | 8,2 | 0,2 |
| 6,7 | 150 000 | 8,0 | 0,2 |
| 5,8 | 170 000 | 7,8 | 0,2 |
| 5,0 | 200 000 | 7,2 | 0,2 |
| 4,15 | 240 000 | 6,6 | 0,2 |
| 3,55 | 280 000 | 5,8 | 0,2 |
| 3,0 | 330 000 | 5,2 | 0,2 |
| 2,5 | 400 000 | 4,5 | 0,1 |
| 2,0 | 500 000 | 3,7 | 0,1 |
| 1,64 | 600 000 | 3,3 | 0,1 |
| 1,42 | 700 000 | 2,8 | 0,1 |
| 1,24 | 800 000 | 2,5 | 0,1 |
| 1,1 | 900 000 | 2,2 | 0,1 |
| 0,98 | 1 000 000 | 2,0 | 0,1 |

| Tiefpaß 1 | | | |
|--------------------|------------------|-----------------|------------------------|
| $T[\mu\text{sec}]$ | $\nu[\text{Hz}]$ | $U_A[\text{V}]$ | $\Delta U_A[\text{V}]$ |
| 0,89 | 1 100 000 | 1,8 | 0,05 |
| 0,815 | 1 200 000 | 1,65 | 0,05 |
| 0,75 | 1 300 000 | 1,5 | 0,05 |
| 0,7 | 1 400 000 | 1,4 | 0,05 |
| 0,65 | 1 500 000 | 1,3 | 0,05 |
| 0,61 | 1 600 000 | 1,25 | 0,05 |
| 0,58 | 1 700 000 | 1,15 | 0,05 |
| 0,55 | 1 800 000 | 1,1 | 0,05 |
| 0,52 | 1 900 000 | 1,05 | 0,05 |
| 0,49 | 2 000 000 | 1,0 | 0,05 |

Für $C = 15 \text{ nF}$ und $R = 47\,500 \Omega \pm 1\%$ hatten wir folgende Meßwerte:

| Tiefpaß 2 | | | |
|--------------------|------------------|-----------------|------------------------|
| $T[\mu\text{sec}]$ | $\nu[\text{Hz}]$ | $U_A[\text{V}]$ | $\Delta U_A[\text{V}]$ |
| 7 000 | 140 | 10 | 0,2 |
| 710 | 1 400 | 8,5 | 0,2 |
| 70 | 14 000 | 1,5 | 0,2 |
| 9,8 | 100 000 | 0,22 | 0,05 |
| 7,1 | 140 000 | 0,15 | 0,05 |
| 4,9 | 200 000 | 0,11 | 0,05 |
| 3,25 | 300 000 | 0,073 | 0,05 |
| 2,5 | 400 000 | 0,055 | 0,05 |
| 2,0 | 500 000 | 0,045 | 0,05 |
| 1,66 | 600 000 | 0,04 | 0,05 |
| 1,4 | 700 000 | 0,033 | 0,05 |
| 1,26 | 800 000 | 0,03 | 0,05 |
| 1,1 | 900 000 | 0,025 | 0,05 |
| 0,98 | 1 000 000 | 0,02 | 0,05 |

Aus diesen Meßwerten haben wir zuerst jeweils

$$g^*(\nu) = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{|U_A|^2}{|U_E|^2} \right) \text{ dB}$$

mit dem Fehler

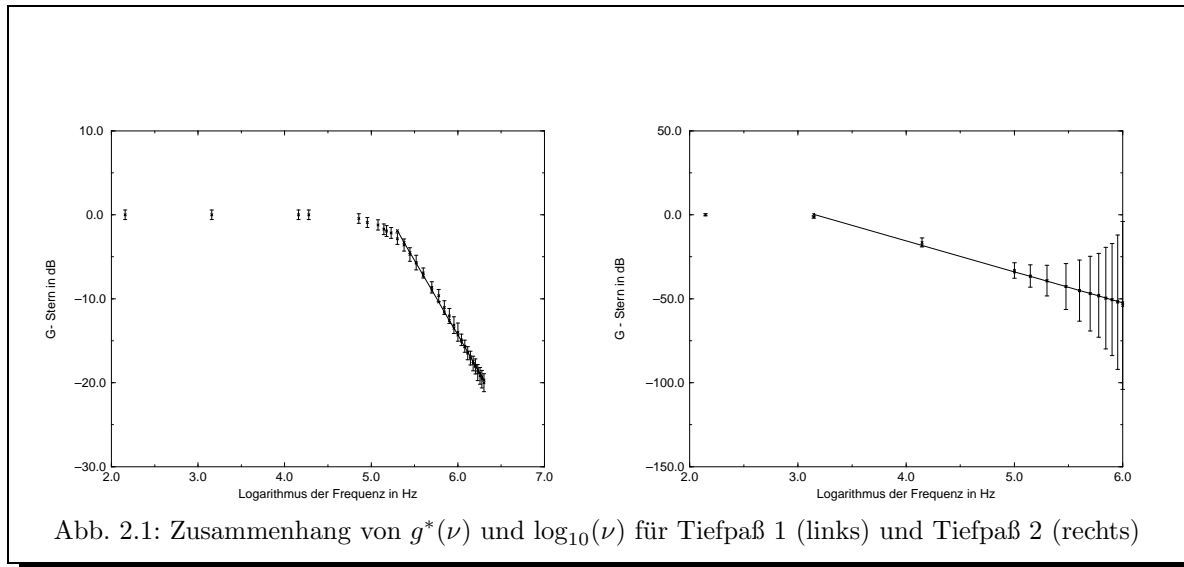
$$\Delta g^* = 20 \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta U_A}{U_A} \right)^2 + \left(\frac{\Delta U_E}{U_E} \right)^2}$$

berechnet. Die Frequenzen haben wir digital gemessen, somit können wir dort keinen Fehler angeben. Daraufhin haben wir den Zusammenhang von $g^*(\nu)$ und $\log_{10}(\nu)$ graphisch dargestellt. Wir erhalten dann die Diagramme in Abbildung 2.1.

Wie wir in in der Vorbereitung erläutert haben, schmiegen sich die Meßpunkte für große Frequenzen asymptotisch an eine Gerade an. Diese Gerade schneidet die x -Achse bei $\log_{10}(\nu_g)$. Mit rechnerischer Geradenanpassung, d. h. linearer Regression, erhalten wir folgende Geraden:

$$\begin{aligned} g_{T1}^*(x) &= (-17,79 \pm 0,29) \cdot x + (92,48 \pm 1,73) \quad \text{und} \\ g_{T2}^*(x) &= (-18,44 \pm 0,32) \cdot x + (58,22 \pm 1,73) . \end{aligned}$$

Für $\log(\nu_g)$ erhalten wir damit:



| | $\log(\nu_g)$ |
|-----------|-------------------|
| Tiefpaß 1 | $5,198 \pm 0,129$ |
| Tiefpaß 2 | $3,157 \pm 0,109$ |

Gemäß Vorbereitung gilt

$$\nu_g = \frac{1}{2\pi R(C + C_T)}$$

und somit können wir die Kapazität über

$$C = \frac{1}{2\pi\nu_g R} - C_T = \frac{1}{2\pi R \cdot 10^{\log(\nu_g)}} - C_T \quad (2.1)$$

berechnen. Für den Fehler gilt:

$$\Delta C = \sqrt{\left(\frac{\partial C}{\partial R} \Delta R\right)^2 + \left(\frac{\partial C}{\partial(\log(\nu_g))} \Delta(\log(\nu_g))\right)^2} = (C + C_T) \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2 + (\ln(10) \cdot \Delta(\log(\nu_g)))^2}. \quad (2.2)$$

Hierbei war die Toleranz für die Widerstände 1%. Also gilt $\frac{\Delta R}{R} = 0.01$. Die Tastkopfkapazität C_T war 16 pF.

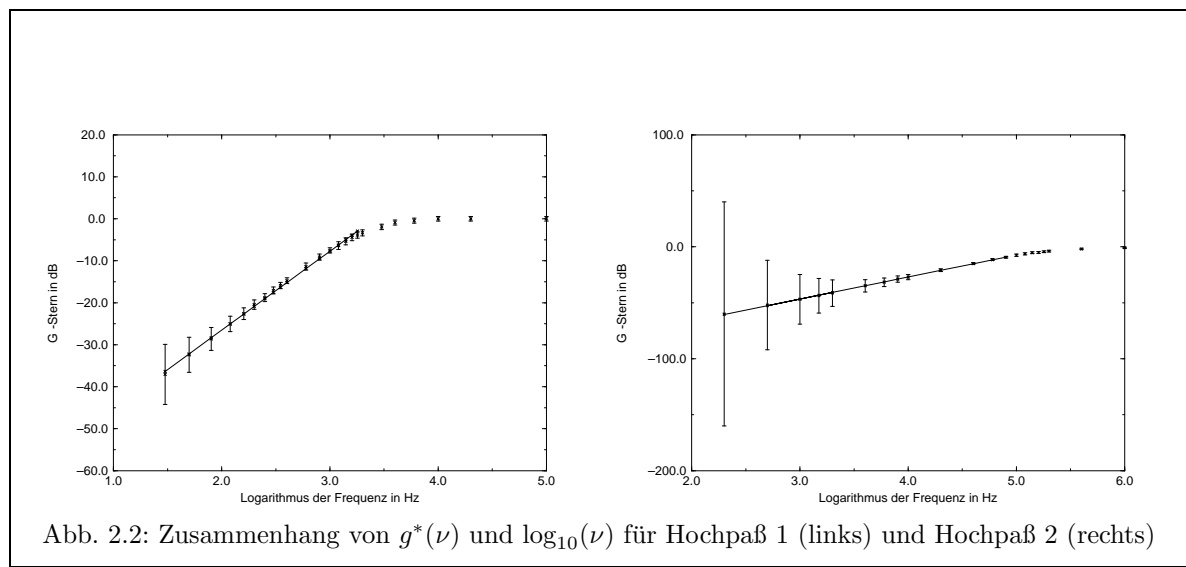
Für die Kapazitäten der beiden Tiefpässe erhalten wir somit:

| | $C_{\text{Experiment}}$ | $C_{\text{theoretisch}}$ |
|-----------|-------------------------|--------------------------|
| Tiefpaß 1 | $(5,24 \pm 6,31)$ pF | 150 pF |
| Tiefpaß 2 | $(2,32 \pm 0,79)$ nF | 15 nF |

Verglichen mit den gegebenen Werten für die Kapazitäten haben wir um mehr als eine Größenordnung danebengeht. Schade... Auf mögliche Fehlergründe und Schwierigkeiten der graphischen Auswertung werden wir weiter unten noch eingehen.

Grenzfrequenzen aus der Amplitudenabschwächung beim Hochpaß

Wir haben eine Eingangsspannung U_E von 10 V angelegt. Damit hatten wir nun bei dem ersten Hochpaß für $C = 15$ nF und $R = 47500 \Omega \pm 1\%$ (diese Werte entsprechen dem zweiten Tiefpaß) die Meßwerte in der linken Tabelle erhalten. Für $C = 150$ pF und $R = 47500 \Omega \pm 1\%$ als zweiten Hochpaß (entspricht der Kapazität und dem Widerstand des ersten Tiefpasses) hatten wir die Meßwerte der rechten Tabelle erhalten:



| Hochpaß 1 | | | |
|-------------------------|------------|-----------|------------------|
| T [μsec] | ν [Hz] | U_A [V] | ΔU_A [V] |
| 33 000 | 30 | 0,14 | 0,05 |
| 19 400 | 50 | 0,24 | 0,05 |
| 12 400 | 80 | 0,37 | 0,05 |
| 8 300 | 120 | 0,56 | 0,05 |
| 6 200 | 160 | 0,74 | 0,05 |
| 5 000 | 200 | 0,95 | 0,05 |
| 3 950 | 250 | 1,15 | 0,05 |
| 3 300 | 300 | 1,4 | 0,05 |
| 2 800 | 350 | 1,6 | 0,05 |
| 2 450 | 400 | 1,83 | 0,05 |
| 1 640 | 600 | 2,7 | 0,1 |
| 1 240 | 800 | 3,5 | 0,1 |
| 990 | 1 000 | 4,2 | 0,1 |
| 820 | 1 200 | 4,8 | 0,2 |
| 700 | 1 400 | 5,4 | 0,2 |
| 620 | 1 600 | 6,0 | 0,2 |
| 550 | 1 800 | 6,4 | 0,2 |
| 495 | 2 000 | 6,8 | 0,2 |
| 335 | 3 000 | 8,0 | 0,2 |
| 245 | 4 000 | 9,0 | 0,2 |
| 166 | 6 000 | 9,5 | 0,2 |
| 100 | 10 000 | 10,0 | 0,2 |
| 49,5 | 20 000 | 10,0 | 0,2 |
| 9,9 | 100 000 | 10,0 | 0,2 |

| Hochpaß 2 | | | |
|-------------------------|------------|-----------|------------------|
| T [μsec] | ν [Hz] | U_A [V] | ΔU_A [V] |
| 4 900 | 200 | 0,01 | 0,05 |
| 1 980 | 500 | 0,025 | 0,05 |
| 990 | 1 000 | 0,045 | 0,05 |
| 660 | 1 500 | 0,065 | 0,05 |
| 490 | 2 000 | 0,085 | 0,05 |
| 250 | 4 000 | 0,18 | 0,05 |
| 166 | 6 000 | 0,26 | 0,05 |
| 124 | 8 000 | 0,36 | 0,05 |
| 99 | 10 000 | 0,44 | 0,05 |
| 48,5 | 20 000 | 0,9 | 0,05 |
| 24,5 | 40 000 | 1,8 | 0,05 |
| 16,2 | 60 000 | 2,7 | 0,1 |
| 12,4 | 80 000 | 3,4 | 0,1 |
| 10,0 | 100 000 | 4,2 | 0,2 |
| 8,3 | 120 000 | 4,8 | 0,2 |
| 7,1 | 140 000 | 5,4 | 0,2 |
| 6,2 | 160 000 | 5,6 | 0,2 |
| 5,6 | 180 000 | 6,0 | 0,2 |
| 4,96 | 200 000 | 6,4 | 0,2 |
| 2,45 | 400 000 | 8,0 | 0,2 |
| 0,98 | 1 000 000 | 9,0 | 0,2 |

Aus der Vorbereitung wissen wir, daß für uns nun das asymptotische Verhalten bei Frequenzen $\nu \gg \nu_g$ wichtig wird. Die Auftragungen von $g^*(\nu)$ in dB gegen $\log_{10}(\nu)$ sind in den Diagrammen in Abbildung 2.2 aufgetragen.

Zur Abwechslung werden wir diesmal ohne Tastkopfkorrekturen rechnen. Aus der Vorbereitung wissen wir:

$$\nu_g = \frac{1}{2\pi RC} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{2\pi R \cdot 10^{\log_{10}(\nu_g)}}. \quad (2.3)$$

Der Fehler für C ist durch

$$\Delta C = C \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2 + (\ln(10) \cdot \Delta(\log(\nu_g)))^2} \quad (2.4)$$

gegeben. Wie schon beim Tiefpaß können wir auch diesmal eine Gerade an die Graphen asymptotisch anpassen. Mittels linearer Regression erhalten wir folgende Anpassungsgeraden:

$$g_{H1}^*(x) = (-18,80 \pm 0,22) \cdot x - (64,12 \pm 0,56)$$

und

$$g_{H2}^*(x) = (-18,44 \pm 0,32) \cdot x - (105,74 \pm 0,52).$$

Für $\log(\nu_g)$ erhalten wir damit auf die gleiche Weise wie beim Tiefpaß:

| | $\log(\nu_g)$ |
|-----------|-------------------|
| Hochpaß 1 | $3,411 \pm 0,050$ |
| Hochpaß 2 | $5,373 \pm 0,046$ |

Für die Kapazitäten der beiden Hochpässe erhalten wir somit:

| | $C_{\text{Experiment}}$ | $C_{\text{theoretisch}}$ |
|-----------|---------------------------------|--------------------------|
| Hochpaß 1 | $(1,300 \pm 0,394) \text{ nF}$ | 15 nF |
| Hochpaß 2 | $(14,195 \pm 1,510) \text{ pF}$ | 150 pF |

Auch hier haben wir also nur Mist gemessen.

Den Grund für unsere schlechten Werte sehen wir in der Wahl der Geraden. Wir konnten dort mehr oder weniger willkürlich die Grenze für die Punkte auswählen, mit denen die Geradenanpassung durchgeführt wurde. Je nachdem, wieviele Punkte wir zusätzlich noch dazugenommen hätten, würden wir eine andere Gerade und einen anderen Abszissenabschnitt bekommen. Bei einer graphischen Geradenanpassung, wir hatten ja rechnerisch angepaßt, hätten wir jedoch das gleiche Problem gehabt.

Wir können die Problematik der Geradenanpassung sehr einfach anhand einer „Rückwärtsrechnung“ veranschaulichen. Für den Tiefpaß 1 hatten wir einen Abszissenabschnitt von 5,198 berechnet. Hätten wir hingegen einen Abszissenabschnitt von 4,305, so wären unsere Berechnungen in voller Übereinstimmung mit den theoretischen Werten. Wir hätten also einfach noch ein paar Werte dazunehmen können, dann wären wir bei dem erwarteten Ergebnis angelangt. Bei den nun folgenden Rechnungen mit der Phasenverschiebung stehen wir vor einem anderen Dilemma. Dort hatten wir, so gut es uns möglich war, am Scope mit Augenmaß und ein wenig Rechnerei die gewünschte Phasenverschiebung $\pi/4$ eingestellt. In der Natur der Messung liegen also leider wieder einige Unzulänglichkeiten.

Grenzfrequenzen aus der Phasenverschiebung

Aus der Vorbereitung wissen wir, daß das Ausgangssignal gegenüber dem Eingangssignal genau dann um 45° (Hochpaß) bzw. -45° (Tiefpaß) phasenverschoben ist, wenn

$$\omega = \omega_g \quad \Leftrightarrow \quad \nu = \nu_g$$

gilt. Somit ist auch klar, was wir im Experiment zu tun hatten. Wir mußten dort die Frequenz solange verstellen, bis wir auf dem Scope die gewünschte Phasenverschiebung von $\pm 45^\circ$ eingestellt hatten.

Dann wurde die Zeitperiode zur eingestellten Frequenz auf dem Oszilloskop gemessen. Wie oben bei der Methode der Amplitudenabschwächung schon einmal angedeutet, liegen in dieser Vorgehensweise schon einige Unzulänglichkeiten, die vor allem aus der Arbeit mit dem Scope resultieren. Wir versuchten nun, diese Unzulänglichkeiten dadurch auszugleichen, indem wir den Vorgang der Einstellung und der Messung mehrfach ausführten. Dieser Vorgang der Einstellung und Messung wurde also insgesamt fünfmal durchgeführt ($N=5$). Der Mittelwert ist dann gegeben durch:

$$\bar{\nu}_g = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{T_i} .$$

Für die Fehlerabschätzung greifen wir auf die Varianz des Mittelwertes zurück:

$$\Delta\nu_g = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{T_i} - \bar{\nu}_g \right)^2} .$$

Wir erhalten dann folgenden Tabelle (die Einzelmeßwerte befinden sich im handschriftlichen Meßprotokoll) :

| | $\bar{\nu}_g$ [Hz] | $\Delta\nu$ [Hz] |
|-----------|--------------------|------------------|
| Tiefpaß 1 | 189120 | 1945 |
| Tiefpaß 2 | 2358,6 | 9,4 |
| Hochpaß 1 | 1996,1 | 7,5 |
| Hochpaß 2 | 194570 | 924 |

Für den Tiefpaß werden wir wieder mit Tastkopfkorrektur rechnen. Wir benutzen die Formel (2.1) und Formel (2.2) für den Fehler und erhalten somit für die Kapazitäten der beiden Tiefpässe:

| | $C_{\text{Experiment}}$ | $C_{\text{theoretisch}}$ |
|-----------|-------------------------|--------------------------|
| Tiefpaß 1 | $(1,71 \pm 0,04)$ pF | 150 pF |
| Tiefpaß 2 | $(1,42 \pm 0,02)$ nF | 15 nF |

Für den Hochpaß werden wir wieder mal ohne Tastkopfkorrektur rechnen. Es gelten die Gleichungen (2.3) und (2.4), sodaß wir für die Kapazitäten der beiden Hochpässe folgendes erhalten:

| | $C_{\text{Experiment}}$ | $C_{\text{theoretisch}}$ |
|-----------|-------------------------|--------------------------|
| Hochpaß 1 | $(1,68 \pm 0,02)$ nF | 15 nF |
| Hochpaß 2 | $(17,22 \pm 0,25)$ pF | 150 pF |

Wie schon bei der Amplitudenabschwächung, so liegen auch hier unsere Werte um mindestens eine Größenordnung daneben. Diesmal sehen wir den Grund in der Einstellung und dem Ablesen vom Oszilloskop. Es war zum Beispiel vielfach nicht genau möglich die $\frac{\pi}{4}$ genau einzustellen.

2.1.2 Kapazitätenbestimmung über Zeitkonstanten (Stufensignale)

Im Gegensatz zu obigen Auswertungspunkten, wo wir ein wunderschönes Sinus-Signal auf den Eingang gelegt haben, werden wir nun ein Sprungsignal auf die Eingänge der Hoch- und Tiefpässe geben und an den jeweiligen Ausgängen die Anstiegszeit t_a von 10% bis auf 90% der Eingangsspannung messen.

In beiden Fällen muß

$$t_a = R(C + C_T) \cdot \ln 9$$

gelten. Damit erhalten wir

$$C = \frac{t_a}{R \cdot \ln 9} - C_T$$

mit dem Fehler

$$\Delta C = \sqrt{\left(\frac{\partial C}{\partial t_a} \cdot \Delta t_a\right)^2 + \left(\frac{\partial C}{\partial R} \cdot \Delta R\right)^2} = \frac{t_a}{R \ln 9} \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta t_a}{t_a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2}$$

Die Zeit t_a wurde für jede Schaltung fünfmal gemessen (Meßwerte in handschriftlichem Meßprotokoll). Wir geben hier den Mittelwert \bar{t}_a an. Als Δt_a verwenden wir diesmal den Ablesefehler von $4 \mu\text{sec}$. Wir erhalten damit die folgenden Mittelwerte

| | $\bar{t}_a [\mu\text{sec}]$ |
|-----------|-----------------------------|
| Tiefpaß 1 | 1,75 |
| Tiefpaß 2 | 172 |
| Hochpaß 1 | 162 |
| Hochpaß 2 | 1,69 |

Damit bekommen wir folgende Endergebnisse

| | $C_{\text{Experiment}}$ | $C_{\text{theoretisch}}$ |
|-----------|------------------------------|--------------------------|
| Tiefpaß 1 | $(0,77 \pm 0,01) \text{ pF}$ | 150 pF |
| Tiefpaß 2 | $(1,63 \pm 0,04) \text{ nF}$ | 15 nF |
| Hochpaß 1 | $(1,54 \pm 0,04) \text{ nF}$ | 15 nF |
| Hochpaß 2 | $(0,19 \pm 0,45) \text{ pF}$ | 150 pF |

2.2 Laufzeit des Kabels

Unser Kabel hatte einen Wellenwiderstand von $Z_W = 1,5 \text{ k}\Omega$. Da ein Kabel zwei Enden hat, wir aber nur die Reflexionen an einem Ende studieren wollten, gaben wir die Eingangsspannung von 10 V über einen Widerstand $R_A = 1,5 \text{ k}\Omega$ auf das Kabel, sodaß hier keine Reflexionen auftraten. An diesem Ende griffen wir auch die Spannung zur Messung am Oszilloskop ab (jeweils einen Kontakt an einen der Drähte). Da wir mit dem Widerstand zur Vermeidung von Reflexionen und dem Kabel einen Spannungsteiler aufgebaut haben (und wir nur die Spannung am Kabel messen), messen wir effektiv nur eine Eingangsspannung von 5 V, die wir auf das Kabel gaben. Die Periodendauer unseres Eingangssignals betrug $10 \mu\text{sec}$, deutlich mehr als die doppelte Laufzeit auf unserem Kabel, was natürlich so gewählt ist, damit man nur die Effekte der Reflexionen nach einem Polaritätssprung des Rechtecksignals beobachtet.

Offenes Ende

Zunächst ließen wir das Ende des Kabels offen, schlossen dort also nichts an. Nach dem Wechsel des Eingangssignals von (effektiv) -5 V auf $+5 \text{ V}$ sprang die Spannung am Kabel von -10 V (Signal -5 V und reflektiertes Signal -5 V) nach 0 V um (Signal jetzt $+5 \text{ V}$, reflektiertes Signal noch -5 V). Auf dieses Ereignis haben wir getriggert und unser gleich dargestelltes Bild des Spannungsverlaufs beginnt hier. Nach $0,6 \mu\text{sec}$ sprang das Signal nach $+10 \text{ V}$ (Signal und reflektiertes Signal jetzt jeweils $+5 \text{ V}$). Diese Zeit ist natürlich die doppelte Laufzeit des Signals durch das Kabel, also

$$T = (0,3 \pm 0,02) \mu\text{sec} .$$

Bei $4T = 1,2 \mu\text{sec}$, $6T = 2,4 \mu\text{sec}$, usw. traten jeweils kleine Nachimpulse auf. Diese sind im wesentlichen dadurch verursacht, daß der Wellenwiderstand und unser Eingangswiderstand nicht exakt $1,5 \text{ k}\Omega$ sind, aufgrund der üblichen Schwankungen von Widerständen (bauabhängig, temperaturabhängig,...). Es handelt sich also um Mehrfachreflexionen. Nun noch das skizzierte Bild des Spannungsverlaufs auf unserem Oszilloskop:

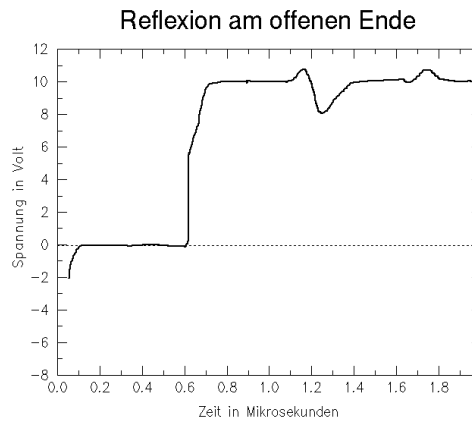


Abbildung 2.3: Reflexionen am offenen Ende

Kurzgeschlossenes Ende

Als zweites schlossen wir das Ende des Kabels mit einem Drahtstecker kurz. Hier nun das skizzierte Bild des Spannungsverlaufs auf unserem Oszilloskop für diesen Fall:

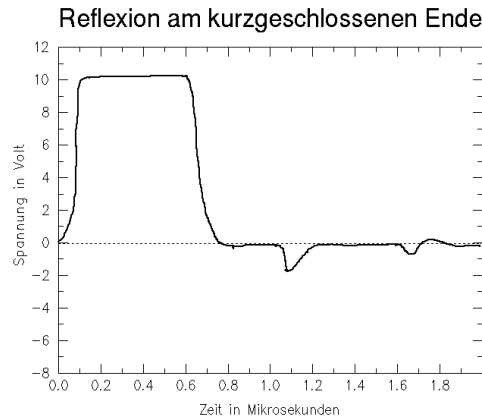


Abbildung 2.4: Reflexionen am kurzgeschlossenen Ende

Nun sprang nach dem Wechsel des Eingangssignals von (effektiv) -5 V auf $+5 \text{ V}$ die Spannung am Kabel von 0 V (Signal -5 V und reflektiertes Signal $+5 \text{ V}$) nach 10 V um (Signal jetzt $+5 \text{ V}$, reflektiertes Signal noch immer $+5 \text{ V}$). Auf dieses Ereignis haben wir nun wieder getriggert und erneut beginnt unser eben dargestelltes Bild des Spannungsverlaufs an dieser Stelle. Nach $0,6 \mu\text{sec}$ sprang das Signal nach 0 V (Signal $+5 \text{ V}$ und reflektiertes Signal nun -5 V). Diese Zeit ist natürlich wiederum die doppelte Laufzeit des Signals durch das Kabel, auch hier kann man

$$T = (0,3 \pm 0,02) \mu\text{sec}$$

ablesen. Bei $4T = 1,2 \mu\text{sec}$, $6T = 2,4 \mu\text{sec}$, usw. traten erneut jeweils kleine Nachimpulse auf. Die Gründe hierfür sind die gleichen wie bei dem offenen Ende.

Angepaßtes Ende

Und schließlich haben wir das Ende des Kabels angepaßt, indem wir einen Widerstand $R_A = 1,5 \text{ k}\Omega$ angeschlossen haben. Hier nun das skizzierte Bild des Spannungsverlaufs auf unserem Oszilloskop für diesen Fall:

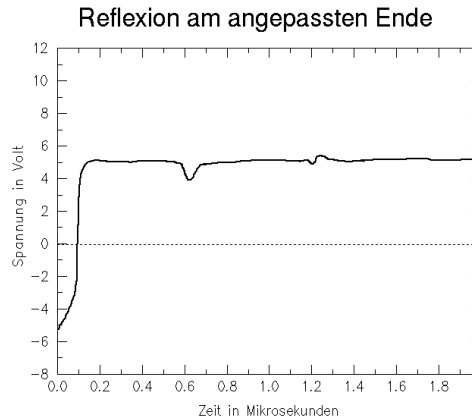


Abbildung 2.5: Angepaßtes Ende

Hier folgte die Spannung am Kabel dem Eingangssignal von (effektiv) -5 V auf $+5 \text{ V}$. Es treten nur Störungen durch Nachimpulse bei $2T = (0,6 \pm 0,04) \mu\text{sec}$, $4T = 1,2 \mu\text{sec}$, $6T = 2,4 \mu\text{sec}$, usw. auf. Die Ursache liegt wiederum darin, daß die Widerstände (jetzt an beiden Enden) nicht immer ganz exakt sind, also Mehrfachreflexionen auftreten können.

2.3 Übertragungsfunktion des Begrenzers

Für den Begrenzer haben wir die Frequenz ν der Sinusschwingung auf 1000 Hz eingestellt. Als Widerstand R haben wir 3900Ω genommen. Die Gegenspannung U_{gegen} wurde konstant auf 5 V eingestellt.

Danach wurde die Ausgangsspannung U_a in Abhängigkeit von der Eingangsspannung U_e gemessen. Die Messungen sind in nachfolgender Tabelle aufgeführt:

| $U_e [\text{V}]$ | $U_a [\text{V}]$ |
|------------------|------------------|
| 1 | 0,6 |
| 2 | 1,5 |
| 3 | 2,6 |
| 4 | 3,6 |
| 4,5 | 4,3 |
| 5 | 4,8 |
| 6 | 5,7 |
| 7 | 6,6 |
| 7,5 | 6,8 |
| 8 | 6,8 |
| 9 | 6,8 |
| 10 | 6,8 |

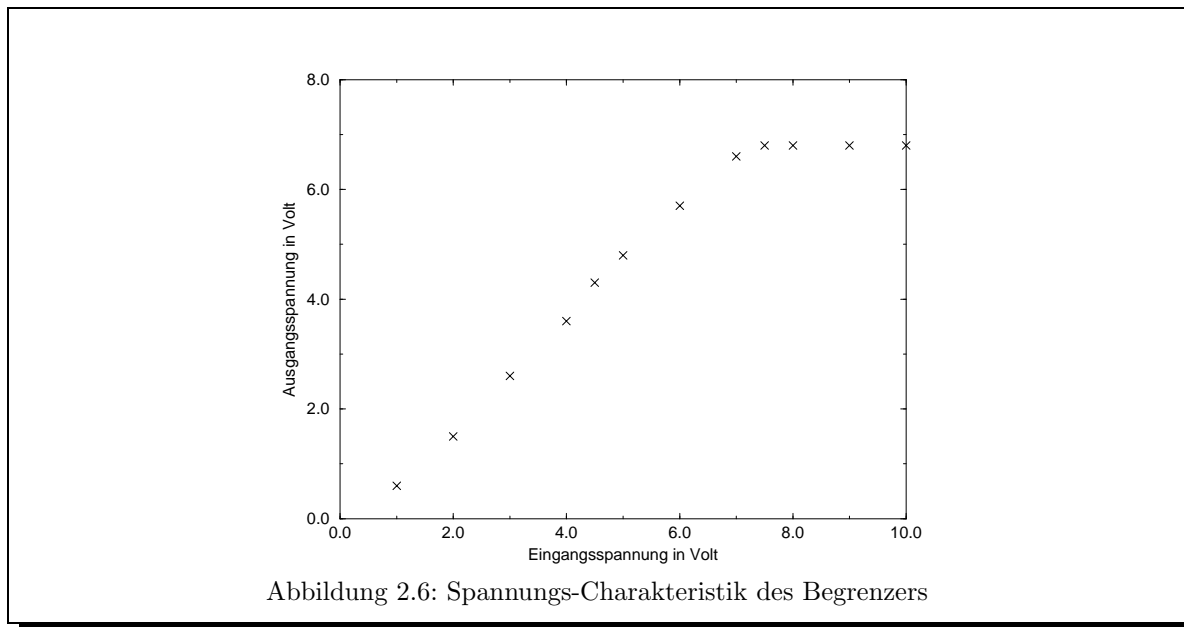


Abbildung 2.6: Spannungs-Charakteristik des Begrenzers

Eine graphische Darstellung unserer Meßwerte findet sich in Abbildung 2.6. Dort kann man sehr schön den von uns erwarteten Kurvenverlauf erkennen: Lineares Ansteigen der Ausgangsspannung mit der Eingangsspannung, bis eine Ausgangsspannung U_a von etwa 6,8V erreicht wurde. Dort trat dann der Begrenzer in Aktion und hielt die Ausgangsspannung konstant.

Diese Abbildung 2.6 gibt jeweils die Maximalspannungen an. Da wir Sinussignale an den Eingang gelegt haben, erkennt man die Wirkung des Diskriminators nach unten nur an der Form des Ausgangssignals. Solange die Eingangsspannung kleiner 6,8 V ist, wird durch den Begrenzer nur die negative Halbwelle gekappt. Wenn die Eingangsspannung aber über diesen Wert wächst, so wird zusätzlich auch die obere Kuppe des Sinussignals abgeschnitten und geglättet. Nach all den schlechten Ergebnissen bei den RC-Gliedern scheint neben dem Kabelteil wenigstens noch ein Versuchsteil funktioniert zu haben, auch wenn die Begrenzung idealerweise bei exakt 5 V einsetzen sollte.

Literaturverzeichnis

Im folgenden wollen wir auf die Versuchsprotokolle der anderen Experimente im Fortgeschrittenenpraktikum, die von uns durchgeführt wurden und das vorliegende Protokoll hinsichtlich der theoretischen Grundlagen ergänzen, verweisen¹. Außerdem stellen wir eine Liste der Literatur auf, die wir am stärksten (nicht als einzige) zur Vorbereitung und Auswertung nutzten.

- [FP-8c] O. Flimm, U. Münch: *Digitale Elektronik*, Versuch 8c im Fortgeschrittenenpraktikum am Institut für Kernphysik. Versuchsprotokoll. Köln, 1994
- [Sem-10] Ursula Radermacher: *Fourier-Reihen stetiger Funktionen*. Unveröffentlichter Seminarvortrag. Köln, 1992
- [Sem-12] Alexandra Vatter: *Fourier-Transformation, Fourier-Umkehr und der Satz von Plancherel*. Unveröffentlichter Seminarvortrag. Köln, 1993
- [Sem-14] Uwe Münch: *Anwendung der Fouriertransformation auf die Lösung partieller Differentialgleichungen*. Unveröffentlichter Seminarvortrag. Köln, 1993
- [Elek] J. Nitsch: *Elektronik I, Elektronik II*. Vorlesungsskript. Köln, 1992–1993
- [MS] P. Marmier, E. Sheldon: *Physics of nuclei and particles*, volume 1. Academic Press, 1969
- [Za] A. C. Zaanen: *Continuity, Integration and Fourier Theory*. Berlin/Heidelberg: Springer-Verlag, 1989

¹Wir möchten darauf hinweisen, daß wir hier auch Quellen angeben, die nicht allgemein verfügbar sind, bzw. gar nicht veröffentlicht wurden. Dies geschieht *ausschließlich*, damit *wir*, die Praktikanten, später noch wissen, wo sich in unseren Materialien noch ergänzende Hinweise befinden. Wir bitten den Betreuer des Versuches über solche Literaturzitate hinwegzusehen; wir sind natürlich bereit, auch solche Stellen z.B. als Kopie zur Verfügung zu stellen, wenn dies gewünscht wird.

Index

- Abfallzeit, 14
- Ableitungsbelag, 15
- Abschluß
 - Kurzschluß, 18
 - offener, 17
 - reflexionsfreier, 17
- Amplitudenabschwächung, 5
- analoge Signale, 1
- Anstiegszeit, 12
- Antidiffusionsspannung, 18
- Ausbreitungsgeschwindigkeit, 17

- Begrenzer, 21, 31
- Beläge, 15

- Differenzierglied, 15
- Diffusionsspannung, 18
- digitale Signale, 1
- Diode
 - Kennlinie, 18
- Diskriminator, 21
- Doppeldrahtleitungen, 15

- Elektronik
 - analoge, 1
 - digitale, 1

- Fensterdiskriminator, 21
- Fourier-Reihen, 2
- Fourier-Transformierte, 2

- Gesetze, Kirchhoff'sche, 4
- Grenzfrequenz, 6

- Induktivitätsbelag, 15
- Integrierglied, 13

- Kapazitätsbelag, 15
- Kennlinie einer Diode, 18
- Kirchhoff'sche Gesetze, 4
- Knotenregel, 4
- Koaxialkabel, 15
- Kurzschluß, 18

- Laplace-Transformation, 3
- Laufzeit am Kabel, 28

- Leerlauf, 17
- Leitergleichungen (erste und zweite), 16

- Maschenregel, 4

- offenes Ende, 17

- Periodendauer, 2
- Phasenverschiebung, 5

- Reflexionen: Kurzschluß, 18
- Reflexionen: offenes Ende, 17
- Reflexionsfaktor, 17
- reflexionsfreier Abschluß, 17

- Schleusenspannung, 18
- Signale
 - analoge, 1
 - digitale, 1
- Spannung
 - Antidiffusions-, 18
 - Diffusions-, 18
 - Schleusen-, 18
- Spektralzerlegung, 2
- Sperrschicht, 18
- Streifenleitungen, 15
- Stufensignale, 11

- Tastkopfkapazität, 4

- Übertragungsfunktion, 5

- Vierpol, 1

- Wellengleichung, 17
- Wellenwiderstand des Leiters, 17
- Widerstandsbelag, 15