

Diplomarbeit in Physik

Über teleparallele Gravitationstheorien

von
Uwe Münch

15. September 1997

Institut für Theoretische Physik
Universität zu Köln

Diese Diplomarbeit wurde mit L^AT_EX 2_ε <1996/12/01> patch level 1 gesetzt, wobei die Koma-Script Klasse scrbook benutzt wurde. Als Pakete wurden amsmath, exscale, bbm und ntheorem für die mathematische Typographie, die pstricks-Pakete für die Abbildungen, german für die deutsche Unterstützung und viele weitere Pakete, wie u. a. lineno, showkeys, caption2, fancyhdr und booktabs verwendet. Dank gebührt allen Autoren von T_EX-Paketen, insbesondere Donald E. Knuth für T_EX selbst, dem L^AT_EX-Team für L^AT_EX 2_ε und allen aktiven Mitgliedern von DANTE e. V. (Deutschsprachige Anwendervereinigung T_EX e.V.).

Referent: Prof. Dr. F. W. Hehl
Korreferent: Prof. Dr. H. Micklitz

Zusammenfassung

Motivation

Die Allgemeine Relativitätstheorie ist bis heute eine sehr erfolgreiche makroskopische Theorie der Gravitation:

Einstein's theory lives on, as *the* macroscopic theory of gravitation. It would be awfully nice, if it were microscopic too. But it isn't. Newton successfully wrote apple = moon, but you cannot write apple = neutron.

J. L. Synge

Wie das Zitat andeutet, ist es aber bisher nicht gelungen, die Einsteinsche Gravitationstheorie zu quantisieren. Aus diesem Grunde versucht man, alternative Gravitationstheorien zu formulieren, die eine einfachere Struktur aufweisen, z. B. sollen nur Felder und ihre ersten Ableitungen, die Feldstärken, in der die Natur beschreibenden Lagrangedichte auftreten. Außerdem erlaubt man, z. B. in sogenannten metrisch-affinen Gravitationstheorien, höhere Eichsymmetrien als in der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART), vgl. [He95, GrHe96]. Eine der ART äquivalente Theorie tritt dann nach einer Symmetriebrechung als niederenergetischer Grenzfall auf. Im Rahmen metrisch-affiner Gravitationstheorien sind dies u. a. die *teleparallelen* Theorien, mit denen sich diese Arbeit beschäftigt.

Teleparallele Formulierungen einer Gravitationstheorie haben außerdem den Vorteil, daß die Eichpotentiale der Translationen und deren Feldstärke, die Torsion, explizit auftreten. Diese Eigenschaft betont die Aussage des folgenden Zitats:

[. . .] gravity is that field, which corresponds to a gauge invariance with respect to displacement transformations.

R. P. Feynman

Bisher ist es aber nicht gelungen, eine solche Eichtheorie zu quantisieren. Eine Ursache dafür liegt auch darin begründet, daß Mannigfaltigkeiten mit Gravitation nur *lokal* für einen Beobachter wie eine flache Minkowski-Raumzeit „aussehen“. In einer Quantentheorie treten aber ausgedehnte Wellenfunktionen auf. Aus diesem Grunde versucht man u. a. alternative Theorien zu formulieren, die ein lokales Prinzip zu einem *globalen* erweitern oder die gravitative Felder teilweise als effektive Felder auf einem Minkowski-Hintergrund zu verstehen versuchen, vgl. [Na96, Ro73, Ro74].

Einleitender Überblick und Einteilung

In dieser Arbeit stellen wir im Kapitel 1 zunächst die geometrischen Objekte vor, die in einer Gravitationstheorie auftreten. Neben der Definition in unterschiedlichen Notationen, die je nach Aufgabenstellung verschieden gut geeignet sind, zeigen wir Abbildungen, die die geometrischen Objekte näherungsweise veranschaulichen. Daraufhin beschreiben wir, wie Translationen, Drehungen und allgemeine lineare Transformationen als Eichpotentiale auftreten. Der Beschreibung der Wechselwirkungen der anderen fundamentalen Naturkräfte angepaßt, benutzen wir quadratische Lagrangians zur Untersuchung metrisch-affiner Gravitationstheorien.

In Kapitel 2 untersuchen wir allgemeine teleparallele Gravitationstheorien mit quadratischem Lagrangian. Wir berechnen die Feldgleichungen in allgemeiner Form und konkret für den allgemeinen quadratischen Lagrangian. Wir leiten dann die allgemeinen Noether-Identitäten her und vergewissern uns, daß die konkreten kanonischen und metrischen Energie-Impulse und der Eichfeld-Impuls diese Identitäten tatsächlich erfüllen. Wir untersuchen spezielle sogenannte Konnexionen und zeichnen die teleparallele Theorie aus, die äquivalent zur Einsteinschen Gravitationstheorie ist. Für diese spezielle Theorie betrachten wir verschiedene mögliche Konnexionen und die daraus resultierenden Torsionen zweier bekannter Lösungen [Bae80, Bae88].

Im abschließenden Kapitel 3 beleuchten wir alternative Theorien etwas näher. Die Theorie von Kaniel und Itin [Ka97] erreicht durch eingeschränkte Variation eines teleparallelen Lagrangians eine Feldgleichung, die die Rosen-Yilmaz-Metrik (3.1) als Lösung besitzt. Diese erfüllt eine Art globales Äquivalenzprinzip. Außerdem versuchen wir die bi-metrische Theorie von Rosen [Ro73, Ro74] in eine teleparallele Version umzuformulieren.

Die Anhänge A und B enthalten mathematische Grundlagen zur Differentialgeometrie bzw. zum äußeren Kalkül reellwertiger Differentialformen. Der Beweis einer wichtigen Formel über die Variation einer Hodge-dualen Form befindet sich in Anhang C. In Anhang D sind die von uns in dieser Arbeit verwendeten Computeralgebra-Programme abgedruckt.

Notation

In dieser Arbeit folgen wir meist der Notation und den Konventionen von [He95]. An einigen Stellen wechseln wir – je nach Art des Problems – auch zur Index-Notation des Ricci-Kalküls oder zu einer koordinatenunabhängigen, die Geometrie betonenden Notation. Alle drei Notationen stellen wir kurz in Abschnitt 1.1.1 gegenüber. Wichtige Regeln in der [He95]-Notation sind im Anhang B zusammengestellt.

Einige Konventionen aus [He95] fassen wir hier nochmals zusammen:

Indizes

Für anholonome Indizes verwenden wir Buchstaben vom Anfang des griechischen Alphabets, also $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, die wir im vierdimensionalen Fall (z. B. für die Raumzeit) von $\hat{0}$ bis $\hat{3}$ durchzählen. Holonome Indizes werden durch Buchstaben aus der Mitte des lateinischen Alphabets, also i, j, k, \dots , gekennzeichnet; sie stehen bei vierdimensionalen Mannigfaltigkeiten für die Numerierung 0 bis 3.

Es gilt die Summenkonvention, d. h. wenn ein oberer und ein unterer Index gleich bezeichnet sind, so wird über diese sogenannten *toten Indizes* summiert. Für tote Indizes verwenden wir Buchstaben sowohl aus dem Anfang als auch aus der Mitte des griechischen Alphabets.

Eckige Klammern $A_{\dots[\alpha\beta]\dots}$ kennzeichnen eine Antisymmetrisierung der eingeschlossenen Indizes, entsprechend stehen runde Klammern $A_{\dots(\alpha\beta)\dots}$ für eine Symmetrisierung dieser Indizes. Sollen Indizes von der Symmetrisierung oder Antisymmetrisierung ausgeschlossen werden, wird dies durch zwei senkrechte Striche kenntlich gemacht: $A_{\dots[\alpha|\gamma\dots|\beta]\dots}$.

Symbole

Wir verwenden das Symbol $:=$, wenn wir den Ausdruck auf der Seite des Doppelpunkts durch die Gleichung definieren wollen.

Wenn eine i. a. ortsabhängige Größe gleich einem konstanten festen Wert ist, so drücken wir dies durch das Zeichen \equiv aus, z. B. $f(x) \equiv 1$.

Wenn eine Gleichung nur bezüglich vorher fest gewählter Basisfelder oder Tetraden gültig ist, so kennzeichnen wir diese „Gleichheit bezüglich bestimmter Basisfelder“ durch das Symbol $\stackrel{*}{=}$.

Lokale Minkowski-Metrik

Als lokale Minkowski-Metrik treffen wir die Wahl

$$o_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =: \text{diag}(+1, -1, -1, -1) .$$

Der Index (vgl. Anhang B.5) der Metriken für die vierdimensionalen Raumzeitmannigfaltigkeiten beträgt bei uns also 3.

Einheiten

Die fundamentalen Naturkonstanten Lichtgeschwindigkeit c , Newtonsche Gravitationskonstante G und Plancksches Wirkungsquantum \hbar kann man so kombinieren, daß man Größen der Dimension Energie, Masse, Zeit und Länge erhält, die sogenannte Planck-Energie, die Planck-Masse, die Planck-Zeit und die Planck-Länge. In

Zusammenfassung

SI-Einheiten ergibt sich für die Planck-Größen¹:

$$\begin{aligned}E_{\text{Planck}} &= \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}} = 1,96 \cdot 10^9 \text{ J} = 1,22 \cdot 10^{28} \text{ eV} , \\m_{\text{Planck}} &= \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 21,8 \text{ } \mu\text{g} , \\t_{\text{Planck}} &= \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} = 5,4 \cdot 10^{-44} \text{ s} , \\l_{\text{Planck}} &= \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1,6 \cdot 10^{-35} \text{ m} .\end{aligned}$$

Indem man eine oder zwei der Naturkonstanten gleich Eins setzt, erhält man einfachere, wenn auch physikalisch weniger intuitive Einheitensysteme, z. B. die *geometrischen Einheiten* und die *natürlichen Einheiten*.

Bei den *geometrischen Einheiten* wird $c = 1$ und $G = 1$ gesetzt [ON83]. Man erhält dann folgenden Zusammenhang zwischen den Dimensionen:

$$\begin{aligned}[\text{Energie}] &= [\text{Masse}] = [\text{Zeit}] = [\text{Länge}] \\E_{\text{Planck}} &= m_{\text{Planck}} = t_{\text{Planck}} = l_{\text{Planck}} = \sqrt{\hbar} .\end{aligned}$$

Hingegen wird für die sogenannten *natürlichen* bzw. *fundamentalen Einheiten* $c = 1$ und $\hbar = 1$ gesetzt. Für den Zusammenhang zwischen den Dimensionen ergibt sich hier:

$$\begin{aligned}[\text{Energie}] &= [\text{Masse}] = [\text{Zeit}]^{-1} = [\text{Länge}]^{-1} \\E_{\text{Planck}} &= m_{\text{Planck}} = t_{\text{Planck}}^{-1} = l_{\text{Planck}}^{-1} = 1/\sqrt{G} .\end{aligned}$$

¹Wenn man anstelle der Newtonschen Gravitationskonstante G die Einsteinsche Gravitationskonstante $\kappa := \frac{8\pi}{c^4}G$ zum Kombinieren der Naturkonstanten verwendet, erhält man Plancksche Größen, deren Werte um Faktoren $\sqrt{8\pi}/c^2$ bzw. $c^2/\sqrt{8\pi}$ von den oben Genannten abweichen.

Inhaltsverzeichnis

| | |
|--|------------|
| Zusammenfassung | iii |
| 1. Allgemeiner Rahmen: Metrisch-affine Eichtheorien der Gravitation | 1 |
| 1.1. Grundlegende Begriffe | 1 |
| 1.1.1. Koordinaten, physikalische Objekte und Notationen | 1 |
| 1.1.2. Geometrische Größen | 3 |
| 1.2. Die Eichprozedur | 11 |
| 1.2.1. Grundlagen zur Eichung | 11 |
| 1.2.2. Eichung der affinen Gruppe und horizontale Struktur | 13 |
| 1.2.3. Nach der Eichung der Translationen | 15 |
| 1.2.4. Zur Eichung der linearen Abbildungen | 16 |
| 1.2.5. Metrik und Eichgruppen | 16 |
| 1.3. Eichtheorien der Gravitation | 17 |
| 1.3.1. Metrisch-affine Gravitation (MAG) | 17 |
| 1.3.2. Poincaré-Eichtheorie der Gravitation (PG) | 19 |
| 2. Teleparallele Eichtheorien | 25 |
| 2.1. Teleparallelismus anschaulich | 25 |
| 2.2. Quadratischer Teleparallelismus-Lagrangian | 25 |
| 2.2.1. Der Eichfeld-Lagrangian $V_{ }$ und seine Aufspaltungen | 26 |
| 2.2.2. Feldgleichungen und Ströme | 28 |
| 2.3. Noether-Identitäten | 35 |
| 2.3.1. Translations-Invarianz | 35 |
| 2.3.2. Invarianz bezüglich linearer Abbildungen | 39 |
| 2.4. Unterschiedliche Konnexionen | 42 |
| 2.4.1. Spezielle Konnexionswahlen | 43 |

| | |
|--|-----------|
| 2.4.2. Äquivalenz unterschiedlicher Konnexionen? | 44 |
| 2.5. Äquivalenz eines speziellen Teleparallelismus zur Einsteinschen Theorie | 48 |
| 2.6. Lösungen des Teleparallelismus mit Einstein-Wahl | 50 |
| 3. Alternative Theorien | 53 |
| 3.1. Vorbetrachtungen | 53 |
| 3.1.1. Die Rosen-Yilmaz-Metrik | 53 |
| 3.1.2. Eingeschränkte Variation | 55 |
| 3.1.3. Maxwell-Theorie als Vergleichsobjekt | 57 |
| 3.2. Die Theorie von Kaniel und Itin | 58 |
| 3.2.1. Die Feldgleichung | 58 |
| 3.2.2. Zerlegung des Lagrangian von Kaniel und Itin | 59 |
| 3.2.3. Zerlegung der Feldgleichung | 61 |
| 3.2.4. Die Rosen-Yilmaz-Metrik und die K-I-Feldgleichung | 62 |
| 3.3. Die Theorie von Rosen in einer teleparallelen Version | 64 |
| 3.3.1. Einführung geeigneter Strukturen | 64 |
| 3.3.2. Der teleparallele Rosen-Lagrangian | 65 |
| 3.3.3. Feldgleichungen | 67 |
| A. Differentialgeometrische Definitionen | 69 |
| A.1. Affiner Raum | 69 |
| A.2. Mannigfaltigkeiten | 69 |
| A.3. Tangentialbündel | 70 |
| A.4. Faserbündel und Vektorraumbündel | 72 |
| A.5. Affines Tangentialbündel | 73 |
| B. Definitionen, Eigenschaften und Regeln des äußeren Kalküls | 75 |
| B.1. Definition alternierender Formen | 75 |
| B.2. Basisfelder | 76 |
| B.3. Äußeres Produkt \wedge | 78 |
| B.4. Inneres Produkt \lrcorner | 78 |
| B.5. Metrik | 79 |
| B.6. Hodge-Stern \star | 80 |
| B.7. Äußere Ableitung d | 81 |
| B.8. Lie-Ableitung | 82 |
| B.9. Spezielle Operatoren | 84 |

| | |
|---|------------|
| C. Variationen und äußerer Kalkül | 85 |
| C.1. Variation der Kobasis-Produkte | 85 |
| C.2. Variation und Metrik | 86 |
| C.3. Variation der $\eta^{\beta_1 \dots \beta_p}$ | 88 |
| C.4. Variation und der Hodge-Stern | 88 |
| | |
| D. Verwendete Computeralgebra-Programme | 91 |
| D.1. Die modularen Programmteile | 91 |
| D.2. Verwendete Ansätze und Lösungen | 93 |
| D.3. Die einzelnen Tests | 100 |
| D.3.1. Überprüfung der Feldgleichungen | 100 |
| D.3.2. Die Noether-Identitäten | 102 |
| | |
| E. A note on post-Riemannian structures of spacetime | 107 |
| E.1. Metric-affine spacetime | 107 |
| E.2. Riemann-Cartan spacetime | 108 |
| E.3. Megged's ansatz | 108 |
| | |
| Literaturverzeichnis | 109 |
| | |
| Danksagung | 113 |
| | |
| Erklärung | 115 |

1. Allgemeiner Rahmen: Metrisch-affine Eichtheorien der Gravitation

In diesem Kapitel führen wir die allgemeinen Grundlagen ein, die für die Betrachtung der teleparallelen Theorien und deren Vergleich benötigt werden.

Nach einer Vorstellung der unterschiedlichen Notationsmöglichkeiten gehen wir auf die geometrischen Objekte ein, die für Gravitationstheorien wesentlich sind. Daraufhin beschreiben wir die Eichprozedur für Eichtheorien der Gravitation genauer. Zum Schluß des Kapitels führen wir mit diesen Grundlagen die *metrisch-affine Gravitationstheorie* (MAG) und die *Poincaré-Eichtheorie der Gravitation* (PG) ein.

1.1. Grundlegende Begriffe

1.1.1. Koordinaten, physikalische Objekte und Notationen

Bei der Beschreibung der Natur gehen wir davon aus, daß Naturphänomene durch *universelle Objekte* beschrieben werden können, die auf der vierdimensionalen Raumzeit definiert sind. Auswirkungen dieser Objekte auf unsere Wahrnehmung stellen sich aber nur über deren *Messungen* ein. Messungen können wir aber meist erst nach Festlegung eines Koordinatensystems durchführen (Ausnahme sind skalare Größen). Die universelle Eigenschaft der Objekte spiegelt sich nun darin wider, daß wir davon ausgehen, zwischen Messungen in verschiedenen Koordinatensystemen durch Koordinatentransformationen wechseln zu können. Diese Grundannahmen werden mathematisch durch eine vierdimensionale C^∞ -Mannigfaltigkeit M und einem Atlas bzw. dem zugehörigen Tangentialbündel TM und den Basisvektorfeldern modelliert, vgl. mit den Anhängen A.2, A.3 und B.2 auf den Seiten 69, 70 und 77.

In der mathematischen Beschreibung der Natur kann man nun einerseits die Koordinatenunabhängigkeit der Objekte betonen, andererseits durch eine Beschreibung der Komponenten bezüglich Koordinatensystemen die Seite der Messungen hervorheben oder drittens einen pragmatischen Mittelweg gehen. Dies führt zu folgenden drei Notationsmöglichkeiten:

- **Ricci-Kalkül (Tensoranalysis):** Dies ist ein Kalkül, der in Komponenten bezüglich Koordinatensystemen rechnet. Dieser Kalkül gibt bei meßbaren Grö-

1.1. Grundlegende Begriffe

ßen also direkt die Werte an, die man bei Messungen erhält, die im für die Berechnung gewählten Koordinatensystem durchgeführt werden.

Da man in dieser Notation in Komponenten rechnet, tragen alle betrachteten Größen viele Indizes mit sich. Für unterschiedliche Koordinatenwahlen muß man die entsprechenden Koordinatentransformationen durchführen. In dieser Notation kann man also realitätsnahe, konkrete Rechnungen durchführen, insbesondere, wenn man angepaßte einfache Koordinatensysteme auswählen kann. Hingegen verliert man eher den Überblick über globale Eigenschaften der geometrischen Objekte.

Im Ricci-Kalkül kann man natürlich sowohl holonome als auch anholonome Basisfelder (vgl. Anhang B.2) wählen. Es zeigt sich aber, daß hier holonome Koordinaten meist eine einfachere Koordinatenwahl sind, denn: Alle Vektoren aus dem Tangentialraum der Mannigfaltigkeit $v \in TM$ wirken als Differentiale; wir können aber nur die Wirkung der holonomen Vektorfelder ∂_i (und reelle Vielfache davon) direkt angeben. So kennen wir $\partial_i f$ mit $f \in C^\infty(M)$; den Wert $e_\alpha(f)$ aber nur über die Entwicklung in die holonome Basis nach Gleichung (B.3): $e_\alpha(f) = e^i_\alpha \partial_i f$.

- Der **invariante Kalkül** ist ab Mitte dieses Jahrhunderts von verschiedenen Differentialgeometern entwickelt worden. Diese koordinatenunabhängige Notation betont die zu beschreibenden Größen als *invariante Objekte* auf der Mannigfaltigkeit. Dieser Kalkül findet also insbesondere dann Anwendung, wenn die geometrische Anschauung der betrachteten Objekte im Vordergrund steht, wie z. B. in Differentialgeometrie-Vorlesungen [Re92] oder bei Beweisen, die die Existenz spezieller, der Anschauung entstammender Vektorbasisfelder zeigen [Ha95].

Da die Objekte koordinatenunabhängig sind, ist diese Notationsform vollkommen indexfrei. Meist können die Objekte als vektorbündelwertige alternierende Differentialformen betrachtet werden, wobei als Vektorbündel z. B. das Tangentialbündel $V = TM$ oder auch Funktionenräume wie $V = \text{End}(TM, TM)$ auftauchen (vgl. auch Anhang A.3 und A.4 ab S. 70).

Die Regeln aus Anhang B lassen sich zwar prinzipiell auf solche vektorbündelwertige alternierende Differentialformen erweitern, aber nicht direkt anwenden. Insbesondere müßte man bei einer solchen Erweiterung z. B. das äußere Produkt \wedge (vgl. Anhang B.3) erst abstrakt mit der jeweiligen abstrakten Multiplikation auf dem Vektorbündel, z. B. mit der Lie-Klammer auf $V = TM$ oder der Komposition von Abbildungen auf $V = \text{End}(TM, TM)$, geeignet verbinden.

- **Cartan-Kalkül (äußerer Differentialkalkül)**: In zahlreichen Veröffentlichungen, so auch in [He95], wird aufgrund der genannten Vor- und Nachteile der bisherigen Notationen häufig ein Mittelweg gewählt: Die vektorbündelwertigen Anteile der Objekte werden in Komponenten berechnet, der verbleibende Anteil läßt sich mittels *reellwertiger alternierender Differentialformen* beschrei-

ben. Die Theorie und die wesentlichen Aussagen über reellwertige alternierende Differentialformen stammen von E. Cartan aus der Zeit um 1920.

Der Nachteil aus dem Ricci-Kalkül entfällt hierdurch, denn die äußere Ableitung d aus Anhang B.7 ist koordinatenunabhängig anwendbar, so daß die holonomen Koordinaten ihre ausgezeichnete Position verlieren. Und auch der Nachteil vektorbündelwertiger Differentialformen, abstrakt Multiplikationen in den Vektorräumen durchführen zu müssen, ist durch konkrete Berechnungen der Komponenten und die gewöhnliche reelle Multiplikation dieser Komponenten ersetzt. Diese Vorteile entstehen nicht ohne Kosten, denn nun muß man zusätzliche konkrete Objekte, die von den Basisfeldern abhängen, wie die Anholonomieform $C_{\alpha\beta}{}^\gamma e_\gamma = -[e_\alpha, e_\beta]$, anstelle der abstrakten Multiplikation einführen.

Natürlich verwenden wir jeweils die Notation, die dem jeweiligen Ziel am besten angepaßt ist.

1.1.2. Geometrische Größen

Hier stellen wir verschiedene universelle Größen vor, die für Gravitationstheorien unerlässlich sind. Andere einführende Darstellungen findet man z. B. in [He94, He95, MTW73, ON83, Do90]. Zugleich versuchen wir in den Abbildungen auf den Seiten 20 ff. die Wirkung dieser Größen zu veranschaulichen, vgl. mit [GrHe96] für die Torsion und [Do90] für die Krümmung. Da die einzuführenden Größen auf Ableitungen aufbauen, die über infinitesimale Grenzprozesse definiert sind, muß man sich im klaren darüber sein, daß die anschaulichen Bilder und Vorstellungen nur näherungsweise den exakten Definitionen entsprechen. Insbesondere können in den Abbildungen keine infinitesimal benachbarten Punkte verwendet werden, vgl. auch die Hinweise zu den Bildern auf Seite 20.

Basisfelder und Vektorfelder

Für die Notationen im Ricci- und Cartan-Kalkül müssen wir Koordinatensysteme auswählen. Dies geschieht über die Auswahl von *Basisvektorfeldern* e_α und den zugehörigen *Kobasisfeldern* ϑ^α . Siehe hierzu die Anhänge A.3 und B.2 auf Seite 70 bzw. 77.

Auf der Mannigfaltigkeit M seien nun Vektorfelder u und v gegeben. In verschiedenen Punkten p und q liegen also jeweils zwei Vektoren u_p und v_p bzw. u_q und v_q an. Sie wirken über die Gleichung (A.5) als Erzeugende von Differentialoperatoren, die auf Abbildungen f der Mannigfaltigkeit wirken. Anstelle des Werts $T_p f(w_p)$ schreiben wir auch häufig direkt $w_p f$.

Da die Abbildung $Tf(w)$ bzw. wf auf M ein Vektorfeld in das Tangentialbündel der Zielmannigfaltigkeit N von f ist, kann man eine zweite Ableitung *nicht* einfach definieren, denn man benötigt dazu den Tangentialraum des Tangentialbündels $T_w TN$, weil sowohl die Änderung von w als auch von f betrachtet werden muß. Wenn man

1.1. Grundlegende Begriffe

das Vektorfeld w bezüglich holonomer Basisfelder durch $w = w^i \partial_i$ in Abbildungen auf M und in Basisfelder in TM aufspaltet, kann man die Wirkung eines zweiten Vektorfeldes $v = v^j \partial_j$ in

$$vw(f) = w^j v^i \partial_i \partial_j f + v^i (\partial_i w^j) \partial_j f \quad (1.1)$$

aufspalten. Es ergibt sich also ein Vektorfeld-Anteil und ein Anteil mit zweiten Ableitungen der Abbildung. In Zeichnung 1.1 auf Seite 20, in der nur Vektorfelder dargestellt werden können, haben wir den Vektorfeld-Anteil dieser Differentiationswirkung veranschaulicht.

Kovariante Ableitung und Konnexion

In der Situation, in der zwei Vektorfelder u und v gegeben sind, legen wir nun fest, wann wir zwei Vektoren u_p und $u_p \parallel^v$ als *parallel* in Richtung des Vektors v_p bezeichnen. Dazu müssen wir eine neue Struktur, die sogenannte *kovariante Ableitung*, einführen.

Wir gehen dazu folgendermaßen vor: Wir nehmen eine Kurve $\alpha \in \mathcal{K}_p M$ mit $v_p = \dot{\alpha}(t)$, vgl. Anhang A.3 (Seite 70). Im infinitesimal benachbarten Punkt $q := \alpha(t + \Delta t)$ wählen wir den parallelen Vektor $u_p \parallel^v \in T_q M$ aus. Wir können diesen Vektor nun mit dem Vektor $u_q \in T_q M$, der durch das Vektorfeld u gegeben ist, vergleichen. Den Differenzvektor zwischen u_q und dem parallelen Vektor, dividiert durch Δt , bezeichnen wir nach dem Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$ als *kovariante Ableitung* $\nabla_v u$ des Vektorfeldes u entlang des Richtungsvektorfeldes v . Die kovariante Ableitung ist also die Operation

$$\begin{aligned} \nabla : TM \times TM &\rightarrow TM, \\ (v, u) &\mapsto \nabla_v u := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u_{\alpha(t+\Delta t)} - u_p \parallel^v |_{\alpha(t+\Delta t)}}{\Delta t}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

wobei wir am parallel verschobenen Vektor $u_p \parallel^v$ notiert haben, daß er am Punkt $q = \alpha(t + \Delta t)$ anliegt. Die kovariante Ableitung ist in Abbildung 1.3 auf Seite 21 veranschaulicht.

Damit diese kovariante Ableitung sinnvolle Parallelfelder festlegt, fordern wir, daß sie die folgenden sogenannten *Koszul-Axiome* erfüllt (hierbei sei f eine beliebig oft differenzierbare Abbildung):

$$\text{Im ersten Argument } \mathcal{C}^\infty(M)\text{-Linearität: } \nabla_{f_1 u_1 + f_2 u_2} = f_1 \nabla_{u_1} + f_2 \nabla_{u_2}, \quad (1.3a)$$

$$\nabla_u(v_1 + v_2) = \nabla_u v_1 + \nabla_u v_2, \quad (1.3b)$$

$$\nabla_u(fv) = u(f)v + f \nabla_u v. \quad (1.3c)$$

Um diese kovariante Ableitung im Ricci- und Cartan-Kalkül auszudrücken, beginnen wir damit, die Vektorfelder nach den Basisfeldern zu entwickeln:

$$\nabla_u v = \nabla_{u^\alpha e_\alpha} \left(v^\beta e_\beta \right) \stackrel{(1.3a),(1.3c)}{=} u^\alpha e^\alpha_i (\partial_i v^\gamma) e_\gamma + u^\alpha v^\beta \nabla_{e_\alpha} e_\beta.$$

Hierbei ist $\nabla_{e_\alpha} e_\beta$ nun ein Objekt, das in Abhängigkeit von Basisfeldern ausgedrückt ist. Wir führen ein anderes Symbol für diesen Komponentenausdruck ein

$$\Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma e_\gamma := \nabla_{e_\alpha} e_\beta \quad (\text{Ricci-Kalkül}) \quad (1.4a)$$

beziehungsweise, da die kovariante Ableitung ∇ im ersten Argument linear ist, als 1-Form

$$\Gamma_{\beta}{}^\gamma(u) e_\gamma := \nabla_u e_\beta \quad (\text{Cartan-Kalkül}) \quad (1.4b)$$

und nennen diese $\Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma$ und $\Gamma_{\beta}{}^\gamma$ (*lineare*) *Konnexion*. Man beachte, daß die Konnexion sich in den Basisfeld-abhängigen Indizes *nicht* wie ein Tensorfeld verhält.

Mit dieser Abkürzung können wir nun die kovariante Ableitung in den anderen Notationen ausrechnen:

$$\nabla_u v = \left(u^\alpha e^i{}_\alpha (\partial_i v^\gamma) + u^\alpha v^\beta \Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma \right) e_\gamma = \left(u \rfloor dv^\gamma + u \rfloor \Gamma_{\beta}{}^\gamma \wedge v^\beta \right) e_\gamma .$$

Im Ricci-Kalkül schreiben wir somit

$$\nabla_k v^\gamma := \partial_k v^\gamma + \Gamma_{k\beta}{}^\gamma v^\beta \quad (1.5a)$$

und im Cartan-Kalkül

$$Dv^\gamma := dv^\gamma + \Gamma_{\beta}{}^\gamma \wedge v^\beta . \quad (1.5b)$$

Die kovariante Ableitung wirkt bisher nur auf Vektorfelder. Wir fordern nun, daß die kovariante Ableitung von Abbildungen gleich der gewöhnlichen Ableitung ist. Durch die Festlegung der Wirkung auf Vektorfelder und Funktionen ist eine Ableitung, die Objekte wieder auf Objekte gleicher Art abbildet (also insbesondere den Grad von p -Formen unverändert läßt) und die die gerade Leibnizregel erfüllt, bereits auch in der Wirkung auf alle Tensorfelder (insbesondere also in der Wirkung auf $\Lambda(TM)$) bestimmt.

BEWEIS: Seien zwei Ableitungen D_1 und D_2 gegeben, die die Art von Objekten unverändert lassen. Weiterhin sollen sie die gerade Leibnizregel erfüllen und ihre Wirkungen auf Vektorfelder und Funktionen übereinstimmen. Für Funktionen f und Vektorfelder u verschwindet also die Differenz $D_1 - D_2$:

$$(D_1 - D_2)f = 0 \quad \text{und} \quad (D_1 - D_2)u = 0 .$$

Da jeder beliebige Tensor \mathcal{T} in Funktionen, Vektorfelder und 1-Formen entwickelt werden kann,

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}{}_{\beta_1 \dots \beta_s} e_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_r} \otimes \vartheta^{\beta_1} \otimes \dots \otimes \vartheta^{\beta_s} ,$$

1.1. Grundlegende Begriffe

bleibt nur noch zu zeigen, daß die Wirkung von $D_1 - D_2$ auf 1-Formen ebenfalls verschwindet. Sei also ω eine 1-Form. Wir benutzen die Bilinearität (B.7a) des inneren Produkts und die gerade Leibnizregel für $D_1 - D_2$ und erhalten so

$$0 = (D_1 - D_2) \overbrace{(u \rfloor \omega)}^{\text{ist Funktion}} = \underbrace{((D_1 - D_2)u) \rfloor \omega + u \rfloor ((D_1 - D_2)\omega)}_{= 0, \text{ da } u \text{ Vektorfeld}} = (D_1 - D_2)\omega(u)$$

für beliebige Vektorfelder u . ■

Aufgrund dieses Beweises können wir nun die kovariante Ableitung auf p -Formen ψ in Richtung des Vektorfeldes v erweitern, indem wir

$$(\nabla_v \psi)(u_1, \dots, u_p) := \nabla_v (\psi(u_1, \dots, u_p)) - \sum_{i=1}^p \psi(u_1, \dots, \nabla_v u_i, \dots, u_p) \quad (1.6a)$$

definieren. Eine analoge Definition ist ganz allgemein für alle Ableitungen möglich, die die Art der Objekte unverändert lassen und die gerade Leibnizregel erfüllen.

Im Ricci- und Cartan-Kalkül erhält man schließlich die kovariante Ableitung von Tensorfeldern bzw. beliebiger tensorwertiger alternierender Formen (hier in der Cartan-Schreibweise angegeben, so daß $\mathcal{T}^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_l}$ für eine beliebige reellwertige p -Form stehen kann):

$$D\mathcal{T}^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_l} = d\mathcal{T}^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_l} + \Gamma_{\mu}^{\alpha_1} \wedge \mathcal{T}^{\mu \alpha_2 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_l} + \dots + \Gamma_{\mu}^{\alpha_k} \wedge \mathcal{T}^{\alpha_1 \dots \alpha_{k-1} \mu}_{\beta_1 \dots \beta_l} - \Gamma_{\beta_1}^{\mu} \wedge \mathcal{T}^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\mu \beta_2 \dots \beta_l} - \dots - \Gamma_{\beta_l}^{\mu} \wedge \mathcal{T}^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_{l-1} \mu} \quad (1.6b)$$

Torsion und Anholonomieobjekt

In flachen Mannigfaltigkeiten spannen zwei Vektoren ein geschlossenes Parallelogramm auf. Dazu betrachtet man die beiden Vektoren und jeweils die Parallelverschiebung eines Vektors entlang des anderen. Bei allgemeinen Mannigfaltigkeiten muß das (infinitesimale) Parallelogramm nicht mehr geschlossen sein. Die Torsion definieren wir nun durch

$$T(u, v) := \nabla_u v - \nabla_v u - [u, v], \quad (1.7)$$

wobei mit $[\ , \]$ die Lie-Klammer aus Anhang A.3 bezeichnet ist. Aus dieser geometrischen Definition können wir leicht ablesen, daß die Torsion den Schließungsfehler des (infinitesimalen) Parallelogramms mißt. Diese Tatsache haben wir in Abbildung 1.4 auf Seite 22 nochmals veranschaulicht.

Um die Ausdrücke in den anderen Notationen zu bestimmen, setzen wir die Basisfelder in die Torsion ein:

$$T(e_{\alpha}, e_{\beta})e_{\gamma} = \nabla_{e_{\alpha}} e_{\beta} - \nabla_{e_{\beta}} e_{\alpha} - [e_{\alpha}, e_{\beta}] = \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} e_{\gamma} - \Gamma_{\beta\alpha}^{\gamma} e_{\gamma} - [e_{\alpha}, e_{\beta}].$$

Auch hier ist $[e_\alpha, e_\beta]$ ein Objekt, das in Abhängigkeit von Basisfeldern ausgedrückt ist. Wir kürzen nun diesen Komponentenausdruck $[e_\alpha, e_\beta]$ durch

$$C_{\alpha\beta}{}^\gamma e_\gamma := -[e_\alpha, e_\beta] \quad (1.8)$$

ab und nennen diese Größe *Anholonomieobjekt*, vgl. auch Abbildung 1.2 auf Seite 21. In den Basisfeld-abhängigen Indizes verhält sich das Anholonomieobjekt *nicht* wie ein Tensorfeld. Mit der Definition (A.7) der Lie-Klammer können wir nun Ausdrücke für das Anholonomieobjekt in den anderen Notationen bestimmen, indem wir nach einem holonomen Basisfeld entwickeln:

$$\begin{aligned} -C_{\alpha\beta}{}^\gamma e_\gamma &\stackrel{\text{def}}{=} [e_\alpha, e_\beta] = e_\alpha(e_\beta) - e_\beta(e_\alpha) = e^i{}_\alpha \partial_i (e^j{}_\beta \partial_j) - e^j{}_\beta \partial_j (e^i{}_\alpha \partial_i) \\ &\stackrel{\partial_i \partial_j}{=} \partial_j \partial_i e^i{}_\alpha (\partial_i e^j{}_\beta) \partial_j - e^j{}_\beta (\partial_j e^i{}_\alpha) \partial_i = e^i{}_\alpha (\partial_i e^j{}_\beta) e_j{}^\gamma e_\gamma - e^j{}_\beta (\partial_j e^i{}_\alpha) e_i{}^\gamma e_\gamma \\ &= -e^i{}_\alpha e^j{}_\beta (\partial_i e_j{}^\gamma) e_\gamma + e^j{}_\beta e^i{}_\alpha (\partial_j e_i{}^\gamma) e_\gamma \quad (\text{da } \partial_i (e^j{}_\beta e_j{}^\gamma) = \partial_i \delta_\beta^\gamma = 0) \\ &= 2e^i{}_\alpha e^j{}_\beta \partial_{[j} e_{i]}{}^\gamma e_\gamma . \end{aligned} \quad (1.9)$$

Man kann an dem eben errechneten Ausdruck für das Anholonomieobjekt im Ricci-Kalkül erkennen, daß im Cartan-Kalkül das Anholonomieobjekt als 2-Form geschrieben werden kann. Es ergibt sich nämlich

$$C^\gamma = d\vartheta^\gamma ,$$

denn es gilt

$$\begin{aligned} d\vartheta^\gamma &= d(e_j{}^\alpha dx^j) = \partial_{[i} e_{j]}{}^\alpha dx^i \wedge dx^j = \frac{1}{2} \cdot 2\partial_{[i} e_{j]}{}^\alpha e^i{}_\alpha e^j{}_\beta \vartheta^\alpha \wedge \vartheta^\beta \\ &= \frac{1}{2} C_{\alpha\beta}{}^\gamma \vartheta^\alpha \wedge \vartheta^\beta = C^\gamma . \end{aligned}$$

Somit erhalten wir für die Torsion in der Ricci-Notation

$$T_{ij}{}^\alpha := 2\partial_{[i} e_{j]}{}^\alpha + 2\Gamma_{[i|\gamma}{}^\alpha e_{|j]}{}^\gamma \quad (1.10a)$$

und im Cartan-Kalkül ergibt sich

$$T^\alpha := d\vartheta^\alpha + \Gamma_\beta{}^\alpha \wedge \vartheta^\beta = D\vartheta^\alpha . \quad (1.10b)$$

Wenn man nun in einer Situation eine Kobasis ϑ^α , eine Tangentialbündel-wertige 2-Form und eine Konnexion $\Gamma_\beta{}^\alpha$ unabhängig vorgibt, so kann man die 2-Form nur dann konsistent als Torsion T^α verstehen, wenn die Definitionsgleichung (1.10b) erfüllt ist. Wenn das Hauptaugenmerk auf diesem Gesichtspunkt liegt, so nennt man Gleichung (1.10b) (und die entsprechenden Gleichungen in den anderen Notationen) häufig auch *1. Cartansche Strukturgleichung*.

1.1. Grundlegende Begriffe

Krümmung

Eine weitere geometrische Größe, die wir aus den bisherigen berechnen können, ist die *Krümmung*. Sie ist definiert als

$$R(u, v)w = \nabla_u \nabla_v w - \nabla_v \nabla_u w - \nabla_{[u, v]} w . \quad (1.11)$$

Da hier zweite kovariante Ableitungen auftreten, ist die anschauliche Bedeutung der Krümmung aus der Definition nicht so einfach ablesbar. Sie besteht darin, daß sie die *Wegabhängigkeit der Parallelverschiebungen* in einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten angibt. Der Vektor $R(u, v)w|_p$ ist nämlich der Differenzvektor zwischen dem zunächst in Richtung v , dann in Richtung u parallel verschobenen Vektor w_p , also $w_p^{\parallel v \parallel u}$, und dem zunächst in Richtung u , dann in Richtung v parallel verschobenen Vektor w_p , also $w_p^{\parallel u \parallel v}$ unter Beachtung des Schließungsfehlers dieser Vektorfelder u und v , der durch das Anholonomieobjekt beschrieben ist, vgl. Abbildung 1.2. In Abbildung 1.5 auf Seite 22 haben wir diese Vorstellung für den Fall $[u, v] = 0$ veranschaulicht und überprüfen unsere Beschreibung für diesen Fall nun auch mit einer kleinen Rechnung: Sei $(\alpha, t_1) \in \mathcal{K}_p M$ mit $u_p = \dot{\alpha}(t_1)$ und $(\beta, t_2) \in \mathcal{K}_p M$ mit $v_p = \dot{\beta}(t_2)$, vgl. Abschnitt A.3 (Seite 70) und $r := \alpha(t_1 + \Delta t_1)$, $s := \beta(t_2 + \Delta t_2)$. Weiterhin sei $(\tilde{\alpha}, t_1) \in \mathcal{K}_s M$ mit $u_s = \dot{\tilde{\alpha}}(t_1)$ und $(\tilde{\beta}, t_2) \in \mathcal{K}_r M$ mit $v_r = \dot{\tilde{\beta}}(t_2)$ und $q := \tilde{\alpha}(t_1 + \Delta t_1) = \tilde{\beta}(t_2 + \Delta t_2)$. Mit diesen Bezeichnungen und der Definitionsgleichung (1.2) der kovarianten Ableitung können wir nun schreiben:

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{\Delta t_1 \rightarrow 0 \\ \Delta t_2 \rightarrow 0}} \frac{w_p^{\parallel v_p \parallel u_s}|_q - w_p^{\parallel u_p \parallel v_r}|_q}{\Delta t_1 \Delta t_2} \\ &= \lim_{\substack{\Delta t_1 \rightarrow 0 \\ \Delta t_2 \rightarrow 0}} \frac{w_p^{\parallel v_p \parallel u_s}|_q - w_s^{\parallel u_s}|_q - (w_r^{\parallel v_r}|_q - w_q) - w_p^{\parallel u_p \parallel v_r}|_q + w_r^{\parallel v_r}|_q + (w_s^{\parallel u_s}|_q - w_q)}{\Delta t_1 \Delta t_2} \\ &= \lim_{\Delta t_1 \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Delta t_1} \left(\lim_{\Delta t_2 \rightarrow 0} \frac{-(w_s - w_p^{\parallel v_p}|_s)^{\parallel u_s}|_q + \nabla_v w|_r}{\Delta t_2} \right) \right) \\ & \quad - \lim_{\Delta t_2 \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Delta t_2} \left(\lim_{\Delta t_1 \rightarrow 0} \frac{-(w_r - w_p^{\parallel u_p}|_r)^{\parallel v_r}|_q + \nabla_u w|_s}{\Delta t_1} \right) \right) \\ &= \lim_{\Delta t_1 \rightarrow 0} \frac{\nabla_v w|_r - (\nabla_v w)^{\parallel u_p}|_r}{\Delta t_1} - \lim_{\Delta t_2 \rightarrow 0} \frac{\nabla_u w|_s - (\nabla_u w)^{\parallel v_p}|_s}{\Delta t_2} \\ &= \nabla_u \nabla_v w|_p - \nabla_v \nabla_u w|_p \stackrel{[u, v]=0}{=} R_p(u, v)w . \end{aligned}$$

Wenn man alternativ den Vektor $\tilde{w}_q := w_p^{\parallel v \parallel u}$ als gegeben betrachtet, vgl. Abbildung 1.5, so kann man die Krümmung auch als Drehung interpretieren, um die man einen Vektor, der entlang eines infinitesimalen, geschlossenen Weges parallelverschoben wurde, zurückdrehen muß, um wieder den Ausgangsvektor \tilde{w}_q zu erhalten.

Wir skizzieren nun kurz, wie man die Ausdrücke in den anderen Notationen erhält.

In der Cartan-Notation ist die Krümmung eine 2-Form:

$$\begin{aligned}
 R_{\alpha}^{\beta} e_{\beta} &= \frac{1}{2} R_{\mu\nu\alpha}^{\beta} e_{\beta} \vartheta^{\mu} \wedge \vartheta^{\nu} \\
 &\stackrel{\text{def. (1.4a)}}{=} \frac{1}{2} (\nabla_{e_{\mu}} \Gamma_{\nu\alpha}^{\sigma} e_{\sigma} - \nabla_{e_{\nu}} \Gamma_{\mu\alpha}^{\sigma} e_{\sigma} - \nabla_{(-C_{\mu\nu}^{\sigma} e_{\sigma})} e_{\alpha}) \vartheta^{\mu} \wedge \vartheta^{\nu} \\
 &\stackrel{(1.3a), (1.3c)}{=} (e_{[\mu} \Gamma_{\nu]\alpha}^{\beta} e_{\beta} + \Gamma_{[\mu|\sigma}^{\beta} \Gamma_{|\nu]\alpha}^{\sigma} e_{\beta}) \vartheta^{\mu} \wedge \vartheta^{\nu} + (d\vartheta^{\sigma}) \Gamma_{\sigma\alpha}^{\beta} e_{\beta} \\
 &= d(\Gamma_{\nu\alpha}^{\beta} \vartheta^{\nu}) e_{\beta} + \Gamma_{\sigma}^{\beta} \wedge \Gamma_{\alpha}^{\sigma} e_{\beta}.
 \end{aligned}$$

Somit ergibt sich für die Cartan-Notation:

$$R_{\alpha}^{\beta} := \text{„}D\Gamma_{\alpha}^{\beta}\text{“} = d\Gamma_{\alpha}^{\beta} + \Gamma_{\gamma}^{\beta} \wedge \Gamma_{\alpha}^{\gamma}. \quad (1.12a)$$

Auch hier kann man die Krümmung und die Konnexion unabhängig vorgeben. Zur Konsistenzprüfung dieser Vorgaben muß man die Gültigkeit von (1.12a) testen. Unter diesem Gesichtspunkt wird (1.12a) (und die entsprechenden Gleichungen in den anderen Notationen) häufig *2. Cartansche Strukturgleichung* genannt.

Abschließend noch die Krümmung in Ricci-Notation:

$$R_{ij\alpha}^{\beta} := 2 \left(\partial_{[i} \Gamma_{j]\alpha}^{\beta} + \Gamma_{[i|\gamma}^{\beta} \Gamma_{|j]\alpha}^{\gamma} \right). \quad (1.12b)$$

Metrik

Auf der vierdimensionalen Raumzeitmannigfaltigkeit kann eine Metrik g definiert sein, deren Index 3 sein muß (zur Definition des Metrik-Begriffs und des Index einer Metrik siehe Anhang B.5 auf Seite 79). Mit Hilfe der Metrikkomponenten $g_{\alpha\beta}$ und den inversen Komponenten $g^{\alpha\beta}$ können wir Indizes senken bzw. heben, z. B.: $\vartheta_{\alpha} := g_{\alpha\beta} \vartheta^{\beta}$.

Ist a priori keine Metrik vorgegeben, so definieren wir die orthogonale Metrik

$$g = o_{\alpha\beta} \vartheta^{\alpha} \otimes \vartheta^{\beta} \quad (1.13)$$

mit $o_{\alpha\beta} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$. Die Festlegung dieser Metrik ermöglicht das Heben und Senken von Indizes auch in einem solchen Fall.

Nichtmetrizität

Die *Nichtmetrizität* definieren wir hier nur in der Cartan-Notation, da diese Größe keine große Bedeutung in dieser Arbeit einnimmt.

Die Nichtmetrizität $Q_{\alpha\beta}$ ist als das Negative der kovarianten Ableitung der Metrik definiert und daher symmetrisch und eine 1-Form:

$$Q_{\alpha\beta} := -Dg_{\alpha\beta} = -dg_{\alpha\beta} + \Gamma_{\alpha}^{\mu} g_{\mu\beta} + \Gamma_{\beta}^{\mu} g_{\alpha\mu}. \quad (1.14)$$

Wenn die Konnexion, die Nichtmetrizität und die Metrik unabhängig vorgegeben sind, so dient diese Definitionsgleichung zur Konsistenzprüfung; sie wird dann *0. Cartansche Strukturgleichung* genannt.

1.1. Grundlegende Begriffe

Falls eine Mannigfaltigkeit mit einer Konnexion und einer Metrik versehen ist, bei denen die Nichtmetrizität nicht verschwindet, so vertauscht das Heben und Senken von Indizes nicht mit der kovarianten Ableitung: Sei z. B. ω^β eine Tangentialbündelwertige Größe, so gilt:

$$D\omega_\alpha = D(g_{\alpha\beta}\omega^\beta) = -Q_{\alpha\beta}\omega^\beta + g_{\alpha\beta} D\omega^\beta \neq g_{\alpha\beta} D\vartheta^\beta .$$

Bei verschwindender Nichtmetrizität sagt man daher: „Die Konnexion [in der kovarianten Ableitung] ist metrik-kompatibel.“ Da aber zur Bestimmung der Nichtmetrizität bereits *beide* Größen, die Metrik *und* die Konnexion, vorgegeben sein müssen, sollte man bei verschwindender Nichtmetrizität besser „Konnexion und Metrik sind kompatibel“ sagen.

Die Definitionsgleichung (1.14) läßt Versuche [Me97] scheitern, zu einer Mannigfaltigkeit mit Konnexion und einer symmetrischen 1-Form, die als Nichtmetrizität interpretiert werden soll, „konnexions-kompatible“ Metriken zu konstruieren. Die Mannigfaltigkeiten mit diesen Metriken haben nämlich verschwindende Nichtmetrizität, d. h. die 1-Form kann nicht als die Nichtmetrizität verstanden werden, vgl. [HM97]. Der eben zitierte Artikel ist auch in Anhang E auf Seite 107 nachlesbar.

Bianchi-Identitäten

Wir haben über die Cartanschen Strukturgleichungen die Nichtmetrizität $Q_{\alpha\beta}$, die Torsion T^α und die Krümmung $R_\alpha{}^\beta$ definiert. Wir interessieren uns nun für die kovarianten Ableitungen dieser Größen. Die erhaltenen Gleichungen werden als *Bianchi-Identitäten* bezeichnet.

Die *0. Bianchi-Identität* errechnet sich folgendermaßen:

$$\begin{aligned} DQ_{\alpha\beta} &\stackrel{(1.6b)}{=} dQ_{\alpha\beta} - \Gamma_\alpha{}^\gamma \wedge Q_{\gamma\beta} - \Gamma_\beta{}^\gamma \wedge Q_{\alpha\gamma} \\ &\stackrel{(1.14)}{=} -ddg_{\alpha\beta} + d(\Gamma_\alpha{}^\gamma g_{\gamma\beta}) + d(\Gamma_\beta{}^\gamma g_{\alpha\gamma}) + \Gamma_\alpha{}^\gamma \wedge dg_{\gamma\beta} - \Gamma_\alpha{}^\gamma \wedge \Gamma_\gamma{}^\delta g_{\delta\beta} \\ &\quad - \Gamma_\beta{}^\gamma \wedge \Gamma_\alpha{}^\delta g_{\delta\gamma} + \Gamma_\beta{}^\gamma \wedge dg_{\alpha\gamma} - \Gamma_\beta{}^\gamma \wedge \Gamma_\gamma{}^\delta g_{\alpha\delta} - \Gamma_\alpha{}^\gamma \wedge \Gamma_\beta{}^\delta g_{\delta\gamma} \\ &\stackrel{(B.15c), (B.15b)}{=} d\Gamma_\alpha{}^\gamma g_{\gamma\beta} + d\Gamma_\beta{}^\gamma g_{\alpha\gamma} - \Gamma_\alpha{}^\gamma \wedge \Gamma_\gamma{}^\delta g_{\delta\beta} - \Gamma_\beta{}^\gamma \wedge \Gamma_\gamma{}^\delta g_{\alpha\delta} \\ &= R_\alpha{}^\gamma g_{\gamma\beta} + R_\beta{}^\gamma g_{\alpha\gamma} = 2R_{(\alpha}{}^\gamma g_{\beta)\gamma} = 2R_{\alpha\beta} . \end{aligned} \tag{1.15a}$$

Analog ergibt sich die *1. Bianchi-Identität*:

$$\begin{aligned} DT^\alpha &\stackrel{(1.6b), (1.10b)}{=} dd\vartheta^\alpha + d(\Gamma_\beta{}^\alpha \wedge \vartheta^\beta) + \Gamma_\gamma{}^\alpha \wedge d\vartheta^\gamma + \Gamma_\gamma{}^\alpha \wedge \Gamma_\beta{}^\gamma \wedge \vartheta^\beta \\ &= d\Gamma_\beta{}^\alpha \wedge \vartheta^\beta + \Gamma_\gamma{}^\alpha \wedge \Gamma_\beta{}^\gamma \wedge \vartheta^\beta = R_\beta{}^\alpha \wedge \vartheta^\beta . \end{aligned} \tag{1.15b}$$

Und abschließend die 2. Bianchi-Identität:

$$\begin{aligned}
 DR_\alpha^\beta &\stackrel{(1.6b), (1.10b)}{=} dd\Gamma_\alpha^\beta + d(\Gamma_\gamma^\beta \wedge \Gamma_\alpha^\gamma) + \Gamma_\gamma^\beta \wedge R_\alpha^\gamma - \Gamma_\alpha^\gamma \wedge R_\gamma^\beta \\
 &= (d\Gamma_\gamma^\beta) \wedge \Gamma_\alpha^\gamma - \Gamma_\gamma^\beta \wedge d\Gamma_\alpha^\gamma + \Gamma_\gamma^\beta \wedge d\Gamma_\alpha^\gamma + \Gamma_\gamma^\beta \wedge \Gamma_\delta^\gamma \wedge \Gamma_\alpha^\delta \\
 &\quad - \Gamma_\alpha^\gamma \wedge d\Gamma_\gamma^\beta - \Gamma_\alpha^\gamma \wedge \Gamma_\delta^\beta \wedge \Gamma_\gamma^\delta = 0.
 \end{aligned} \tag{1.15c}$$

Wir haben die Definitionsgleichungen (Cartanschen Strukturgleichungen) und die Bianchi-Identitäten für die Nichtmetrizität, die Torsion und die Krümmung nochmal in Tabelle 1.1 auf Seite 19 zusammengefaßt.

Die zweite kovariante Ableitung von Tensorfeldern oder tensorwertiger alternierender Formen ergibt sich analog zur Berechnung der Bianchi-Identitäten mit Hilfe von Gleichung (1.6b) ganz allgemein zu:

$$\begin{aligned}
 DDT^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_l} &= R_\mu^{\alpha_1} \wedge \mathcal{T}^{\mu \alpha_2 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_l} + \dots + R_\mu^{\alpha_k} \wedge \mathcal{T}^{\alpha_1 \dots \alpha_{k-1} \mu}_{\beta_1 \dots \beta_l} \\
 &\quad - R_{\beta_1}^\mu \wedge \mathcal{T}^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\mu \beta_2 \dots \beta_l} - \dots - R_{\beta_l}^\mu \wedge \mathcal{T}^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_{l-1} \mu}.
 \end{aligned} \tag{1.16}$$

1.2. Die Eichprozedur

In der Darstellung der Eichprozedur für Gravitationstheorien stützen wir uns im wesentlichen auf Frank Gronwalds Doktorarbeit [Gr96].

1.2.1. Grundlagen zur Eichung

Affine Basen

Wie in Anhang A.5 (Seite 73) angedeutet, fassen wir die Tangentialräume als affine Räume $A_p M$ auf. Vektoren in $A_p M$ sind dann kovariant unter der vierdimensionalen affinen Gruppe $A(\mathbb{R}^4) = \mathbb{R}^4 \rtimes \text{GL}(\mathbb{R}^4)$, wobei $\text{GL}(\mathbb{R}^4)$ die Menge aller vierdimensionalen invertierbaren linearen Abbildungen bezeichnet.

Wir wählen nun affine Basen (q, e_α) auf $A_p M$, so daß jeder Vektor $v \in A_p M$ als $v = q + v^\alpha e_\alpha$ dargestellt werden kann. Je zwei Basen (q, e_α) und $(\tilde{q}, \tilde{e}_\beta)$ können mittels einer affinen Abbildung $(\tau^\alpha, \Lambda_\beta^\alpha) \in A(\mathbb{R})$ ineinander überführt werden:

$$(q, e_\alpha) \xrightarrow{(\tau^\alpha, \Lambda_\beta^\alpha)} (\tilde{q}, \tilde{e}_\beta) = (q + \tau^\alpha e_\alpha, \Lambda_\beta^\alpha e_\alpha) \tag{1.17}$$

Insbesondere ist kein Punkt $q \in A_p M$ ausgezeichnet, da in affinen Räumen a priori kein Ursprung festgelegt ist.

Eichprinzip

Allgemein startet man bei einer Eichtheorie mit einem Raum, der eine *globale Symmetrie* zeigt, d. h. der die Physik beschreibende Lagrangian (vgl. Abschnitt 2.2.2) ist invariant unter einer Transformation mit konstanten vom Raumzeit-Punkt unabhängigen Parametern. Zum Beispiel ist die Wellenfunktion $\Psi(x)$ eines geladenen Teilchen unter der Transformation $\Psi(x) \rightarrow e^{iq\varepsilon} \Psi(x)$ invariant, da die Phase eines Teilchens keine physikalische Bedeutung hat. Die Ableitung der Wellenfunktion $d\Psi$ transformiert sich hierbei analog zur ursprünglichen Wellenfunktion: $d\Psi(x) \rightarrow e^{iq\varepsilon} d\Psi(x)$.

Für die Eichprozedur verlangt man, daß der Raum die Symmetrie auch *lokal* erfüllt. *Lokale Invarianz* bedeutet, daß wir nun zulassen, daß die Parameter der Transformation vom Raumzeit-Punkt abhängen: $\Psi(x) \rightarrow e^{iq\varepsilon(x)} \Psi(x)$. Messungen der Ableitung $d\Psi$ an zwei verschiedenen Punkten ergeben jetzt nicht nur Unterschiede durch die physikalische Änderung $d\Psi(x_1)$ gegenüber $d\Psi(x_2)$, sondern auch durch die Änderungen der Bezugssysteme zur Messung der Phase, die durch $d\varepsilon(x_1)$ und $d\varepsilon(x_2)$ gegeben sind:

$$d\Psi(x) \rightarrow iq d\varepsilon(x) e^{iq\varepsilon(x)} \Psi(x) + e^{iq\varepsilon(x)} d\Psi(x) .$$

Als Ausgleich führt man daher ein *Eichpotential* $A(x)$ ein, daß die Abhängigkeit von der Änderung der Bezugssysteme ausgleicht. Dies wird erreicht, indem sich das Potential gemäß

$$A(x) \rightarrow A(x) + d\varepsilon(x) \tag{1.18}$$

transformiert. Wenn man im Lagrangian die Ableitung d durch die bezüglich der Symmetrietransformation kovariante Ableitung $D := d - iq A(x)$ ersetzt, erhält man nun wieder nur die physikalische Änderung des Systems:

$$D\Psi(x) \rightarrow e^{iq\varepsilon(x)} D\Psi(x) .$$

Das Eichpotential nimmt also die Stellung einer Konnexions-1-Form ein und geht in den Lagrangian über die kovariante Ableitung ein.

Die *Eichinvarianz* spiegelt sich in der Freiheit wider, beliebige Bezugssysteme $\varepsilon(x)$ auswählen zu können. Die Änderung zwischen zwei verschiedenen Bezugssystemen ist physikalisch ohne Bedeutung (schließlich sollen unsere Objekte unabhängig von Bezugssystemen sein). Eine Eichung ist eine feste Wahl $\varepsilon_{\text{fest}}(x)$, mathematisch beschrieben als ein Schnitt in einem Faserbündel, vgl. Anhang A.4 (Seite 72), siehe auch Abbildung A.1.

Das Eichpotential A ist durch die Transformationseigenschaft eingeschränkt, aber nicht festgelegt, d. h. es besitzt selbst noch Freiheitsgrade. Die Dynamik dieser Freiheitsgrade werden meist über einen eigenen Term im Lagrangian bestimmt. In Yang-Mills-Theorien lautet der zusätzliche Lagrange-Term $F \wedge *F$, wobei F die Krümmungsform des Eichpotentials ist, die sogenannte *Eichfeldstärke*.

1.2.2. Eichung der affinen Gruppe und horizontale Struktur

Wir wollen jetzt obige Beschreibung zur Eichung von Gravitationstheorien anwenden. Für den Raum, der globale Symmetrien zeigt, wählt man i. a. die gravitationsfreie Raumzeit der Speziellen Relativitätstheorie, den *Minkowski-Raum*. Dieser kann als affiner Raum, vgl. Anhang A.1 (Seite 69), mit Minkowski-Metrik $o_{ij} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$ beschrieben werden. Wir wollen zunächst diese Metrik außer acht lassen und die Eigenschaft fordern, daß Naturbeschreibungen von der Wahl der affinen Basis unabhängig seien. Wir erweitern damit die Symmetrie physikalischer Phänomene, die die Minkowski-Metrik beachten, auf eine globale affine Transformationsinvarianz.

Wir haben den Minkowski-Raum zu einer allgemeinen Mannigfaltigkeit M mit affinem Tangentialbündel AM verallgemeinert, so daß nach der Eichung zur Beschreibung der Gravitation die bisher eingeführten geometrischen Größen, wie Krümmung, Torsion, usw., als nichttriviale Feldstärken auftreten können. Wir fordern nun, daß in jedem einzelnen Punkt physikalische Beschreibungen im jeweiligen affinen Tangentialraum A_pM affin invariant sind. Um zu eichen, verlangen wir nun, daß über einer lokalen Umgebung U der Mannigfaltigkeit (und nicht nur punktweise) die Physik über einer Umgebung $\pi^{-1}(U)$ des affinen Tangentialbündels affin invariant ist. Um diese Forderung mathematisch beschreiben zu können, müssen wir benachbarte affine Tangentialbündel vergleichen können. Dazu benötigen wir zwei neue Strukturen, zunächst eine *horizontale Struktur* und später die *Verschmelzung*.

Horizontale Struktur: Affine Konnexion

Eine *horizontale Struktur* ist eine Abbildung zwischen benachbarten affinen Tangentialräumen. Konkret realisieren wir die horizontale Struktur, indem wir sie über eine affine Transformation, der sogenannten *affinen Konnexion* ($\Gamma^{(T)\alpha}, \Gamma_\beta^{(L)\alpha}$), realisieren. Man beachte, daß sich die affine Konnexion von der linearen Konnexion aus Abschnitt 1.1.2 (Seite 5) unterscheidet. Die affine Konnexion bildet nun eine affine Basis (q, e_α) von A_pM in eine *affin parallele* Basis des infinitesimal benachbarten $A_{\tilde{p}}M$ ab. Bezüglich der vorher getroffenen Basiswahl $(\tilde{q}, \tilde{e}_\beta)$ in $A_{\tilde{p}}M$ ergibt sich:

$$\text{Parallelverschiebung von } q \in A_pM = \tilde{q} + \Gamma^{(T)\alpha} \tilde{e}_\alpha \in A_{\tilde{p}}M \quad (1.19a)$$

durch den Translationsanteil $\Gamma^{(T)\alpha}$ und

$$\text{Parallelverschiebung von } (e_\alpha) \in A_pM = \tilde{e}_\alpha + \Gamma_\alpha^{(L)\beta} \tilde{e}_\beta \in A_{\tilde{p}}M \quad (1.19b)$$

mittels des linearen Anteils $\Gamma_\beta^{(L)\alpha}$ (in die beiden 1-Formen wird jeweils die Richtung der infinitesimalen Parallelverschiebung eingesetzt). In Abbildung 1.6 (Seite 23) haben wir u. a. die affine Konnexion veranschaulicht. Mit dieser Konstruktion können wir nun affine Invarianz auf lokalen Umgebungen des affinen Tangentialbündels untersuchen.

1.2. Die Eichprozedur

Eine Mannigfaltigkeit mit einer affinen Konnexion $(\Gamma^{(T)\alpha}, \Gamma_\beta^{(L)\alpha})$ nennen wir eine *affine Mannigfaltigkeit*. Während Mannigfaltigkeit und Tangentialbündel die Verallgemeinerung der Punktmenge und des Richtungsvektorraums eines affinen Raums sind, vgl. Anhang A.3 und A.1, kann eine affine Konnexion als Verallgemeinerung der Abbildung φ eines affinen Raums aufgefaßt werden.

Eichung

Mit der Einführung der affinen Konnexion $(\Gamma^{(T)\alpha}, \Gamma_\beta^{(L)\alpha})$ haben wir bereits die Eichpotentiale eingeführt, die die Abhängigkeit durch die affine Basiswahl ausgleichen. Um die Eichung abzuschließen, müssen wir jetzt noch die Entsprechung zu Gleichung (1.18) bestimmen und untersuchen, wie sich die Eichpotentiale unter der affinen Gruppe transformieren.

Wir skizzieren hier nur die Vorgehensweise, vergleiche z. B. mit [Gr96, Kap. 2.3]. Man betrachtet die Transformation von Feldern Ψ , die affin invariant sein sollen unter der affinen Gruppe $A(\mathbb{R}^4)$. Seien nun τ_γ und Λ^γ_δ die Generatoren der infinitesimalen affinen Transformationen¹ und ξ^γ und ω_γ^δ die zugehörigen Parameter. Dann ergibt sich die infinitesimale Transformation der Komponenten $\Psi_{(q)}^\alpha$ bezüglich der affinen Basis (q, e_α) als

$$\Psi_{(q)}^\alpha \rightarrow \tilde{\Psi}_{(\tilde{q})}^\alpha - \left[\xi^{\tilde{\gamma}} \tau_{\tilde{\gamma}} + \omega_{\tilde{\gamma}}^{\tilde{\delta}} \Lambda^{\tilde{\gamma}}_{\tilde{\delta}} \right] \tilde{\Psi}_{(\tilde{q})}^\alpha . \quad (1.20a)$$

Die Ableitung der Feldkomponenten $d\Psi_{(q)}^\alpha$ transformiert sich daher infinitesimal gemäß

$$d\Psi_{(q)}^\alpha \rightarrow d\tilde{\Psi}_{(\tilde{q})}^\alpha - \left[(d\xi^{\tilde{\gamma}}) \tau_{\tilde{\gamma}} + (d\omega_{\tilde{\gamma}}^{\tilde{\delta}}) \Lambda^{\tilde{\gamma}}_{\tilde{\delta}} \right] \tilde{\Psi}_{(\tilde{p})}^\alpha - \left[\xi^{\tilde{\gamma}} \tau_{\tilde{\gamma}} + \omega_{\tilde{\gamma}}^{\tilde{\delta}} \Lambda^{\tilde{\gamma}}_{\tilde{\delta}} \right] d\tilde{\Psi}_{(\tilde{q})}^\alpha . \quad (1.20b)$$

Mit der Definition $\overset{\Gamma}{D} := d + \Gamma^{(T)\alpha} \tau_\alpha + \Gamma_\beta^{(L)\alpha} \Lambda^\beta_\alpha$ und der Forderung, daß sich die affin kovariant abgeleiteten Feldkomponenten infinitesimal wie die Felder transformieren,

$$\overset{\Gamma}{D}\Psi_{(q)}^\alpha \rightarrow \overset{\Gamma}{D}\tilde{\Psi}_{(\tilde{p})}^\alpha - \left[\xi^{\tilde{\gamma}} \tau_{\tilde{\gamma}} + \omega_{\tilde{\gamma}}^{\tilde{\delta}} \Lambda^{\tilde{\gamma}}_{\tilde{\delta}} \right] \overset{\Gamma}{D}\tilde{\Psi}_{(\tilde{q})}^\alpha , \quad (1.20c)$$

erhält man aus diesen drei Gleichungen (1.20) nach einer kleinen Rechnung die infinitesimale Transformation der affinen Konnexion, wobei wir die Tilde über den transformierten Indizes nun weglassen, die Generatoren in den Konnexionen absorbieren und eine kovariante Ableitung bezüglich des linearen Anteil $\Gamma_\alpha^{(L)\beta}$ einführen:

$$\begin{aligned} \Gamma^{(T)\alpha} &\longrightarrow \Gamma^{(T)\alpha} + d\xi^\alpha + \Gamma_\beta^{(L)\alpha} \xi^\beta - \Gamma^{(T)\beta} \omega_\beta^\alpha \\ &= \Gamma^{(T)\alpha} - \Gamma^{(T)\beta} \omega_\beta^\alpha + \overset{\Gamma(L)}{D} \xi^\alpha , \end{aligned} \quad (1.21a)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_\alpha^{(L)\beta} &\longrightarrow \Gamma_\alpha^{(L)\beta} + d\omega_\alpha^\beta + \Gamma_\gamma^{(L)\beta} \omega_\alpha^\gamma - \Gamma_\alpha^{(L)\gamma} \omega_\gamma^\beta \\ &= \Gamma_\alpha^{(L)\beta} + \overset{\Gamma(L)}{D} \omega_\alpha^\beta . \end{aligned} \quad (1.21b)$$

¹Bei der allgemeinen Eichbeschreibung war eine einparametrische Gruppe als Beispiel verwendet worden. Der zugehörige Generator ist die 1, so daß dieser Generator dort nicht auffiel.

1.2.3. Nach der Eichung der Translationen

Bisher haben wir die Tatsache außer acht gelassen, daß unsere affinen Tangentialräume einen affinen Raum modellieren, der als erste Näherung der Basismannigfaltigkeit dienen kann. Es sollte also eine Korrespondenz zwischen einer Umgebung der Mannigfaltigkeit um einen Punkt $p \in M$ und einer Umgebung um einen *Ursprung* im Raum $A_p M$ geben. Wir zeichnen zunächst solche Ursprünge aus.

Verschmelzung

Bei der *Verschmelzung* (englisch: *soldering*) handelt es sich um einen Schnitt in das affine Tangentialbündel, vgl. Anhang A.4 und A.5. Dieser Schnitt zeichnet in jedem affinen Tangentialraum einen Ursprung o_p ($p \in M$) aus, vgl. Abbildung 1.6.

Identifikation benachbarter Punkte

Wir haben nun zwei Strukturen zur Verfügung, die affine Konnexion und die Verschmelzung. Betrachten wir nun einen affinen Tangentialraum $A_{\bar{p}}M$ und seinen Nachbarn, so sind jeweils zwei Punkte ausgezeichnet: der Ursprung $o_{\bar{p}}$ des affinen Tangentialraums und die Parallelverschiebung des Ursprungs des Nachbarn.

Es ist nun nicht sinnvoll (anders als in [Gr96, Figure 3, Seite 19] unpräzise formuliert [Gr97]), den Punkt q , der den parallelverschobenen Ursprung o_p des benachbarten affinen Tangentialraums bezeichnet, mit dem Punkt p der Mannigfaltigkeit zu identifizieren. Denn, wenn die affine Konnexion flach wäre (also verschwände), so lägen alle Ursprünge benachbarter Tangentialräume, und entsprechend die identifizierten Punkte der Mannigfaltigkeit, auf dem Ursprung $o_{\bar{p}}$ im affinen Tangentialraum $A_{\bar{p}}M$. Der Translationsanteil der affinen Konnexion $\Gamma^{(T)}$ beachtet also nicht die Abstände zwischen den benachbarten Tangentialräumen, bzw. den Punkten auf der Mannigfaltigkeit. Wenn er dies täte, würde er nicht nur die Basiswahl in den affinen Tangentialräumen korrigieren, sondern auch die physikalischen Änderungen der Felder zwischen den Punkten.

Es existiert noch eine weitere Struktur auf affinen Mannigfaltigkeiten: die sogenannte *Exponentialabbildung*. Diese ist ein lokaler Diffeomorphismus, der einen Abstand auf dem affinen Tangentialraum auf die Mannigfaltigkeit abbildet. Für benachbarte affine Tangentialräume bilden die Differentiale einer Koordinatenfunktion dx^i eine Näherung der Exponentialabbildung.

Die Kombination aus beiden Größen

$$\vartheta^\alpha := \Gamma^{(T)\alpha} + \delta_i^\alpha dx^i \quad (1.22)$$

liefert nun einen dritten Punkt in $A_{\bar{p}}M$, der sowohl den Abstand zwischen den benachbarten Tangentialräumen als auch die Eichkorrekturen durch die Basiswahl beachtet. Diesen *identifizieren* wir daher mit dem benachbarten Ursprung o_p , bzw. dem Punkt p der Mannigfaltigkeit, siehe Zeichnung 1.6, Seite 23.

1.2. Die Eichprozedur

Durch diese Konstruktion ist es nun möglich, Kurven in einer Umgebung der Mannigfaltigkeit in *einen* affinen Tangentialraum abzubilden. Dazu muß man nur jeweils den Punkt $\alpha(t) \in M$ einer Kurve $(\alpha, 0) \in \mathcal{K}_p M$ mit dem zugehörigen Punkt $\alpha^*(t) \in A_p M$ identifizieren. Diese Konstruktion ist Grundlage für unsere Zeichnungen 1.1–1.5, vgl. die Hinweise auf Seite 20.

Die Definition (1.22) bietet aber noch einen weiteren Vorteil: Wenn man die Transformation von dx^i unter der affinen Gruppe ausrechnet, vgl. [Gr96, Kap 2.5 und 2.6], so ergibt sich, daß die Kobais ϑ^α gemäß

$$\vartheta^\alpha \longrightarrow \vartheta^\alpha - \omega_\beta^\alpha \vartheta^\beta \quad (1.23)$$

transformiert. Im Gegensatz zu Formel (1.21a) mischt also nicht mehr der lineare Anteil der Konnexion $\Gamma_\beta^{(L)\alpha}$ in die Transformation und die Kobasis transformiert tensoriell und nicht wie eine Konnexion. Aufgrund dieser Vorteile und da die Kobasis über (1.22) mit dem Translations-Eichpotential $\Gamma^{(T)\alpha}$ verbunden ist, verwenden wir im folgenden ϑ^α anstelle $\Gamma^{(T)\alpha}$ als Eichpotential der Translation.

1.2.4. Zur Eichung der linearen Abbildungen

Nachdem die Translation geeicht ist und wir durch ϑ^α benachbarte Punkte identifizieren können, bleibt von der affinen Konnexion nur noch die Invarianz gegenüber linearen Abbildungen übrig. Das zugehörige Eichpotential ist $\Gamma_\beta^{(L)\alpha}$. Es beschreibt, wie Basisfelder in zwei benachbarten Tangentialräumen gedreht werden müssen, damit Messungen von der Basiswahl unabhängig sind. Die Konnexion $\Gamma_\beta^{(L)\alpha}$ gibt also an, wann in der Mannigfaltigkeit zwei Basisfelder meßtechnisch als gleichwertig, d. h. parallel anzusehen sind. Wir erkennen hier also die lineare Konnexion Γ_β^α aus Abschnitt 1.1.2 (Seite 5) und ihre Beschreibung wieder. Im folgenden schreiben wir also für das Eichpotential der linearen Abbildungen einfach Γ_β^α .

1.2.5. Metrik und Eichgruppen

Bisher hatten wir die Minkowski-Metrik $o_{ij} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$ außer acht gelassen. Eine solche Metrik spaltet den Raum der linearen Abbildungen $\text{GL}(\mathbb{R}^4)$ in solche auf, die die Metrik invariant lassen und solche, die das Aussehen der Metrik ändern. Die Abbildungen, die o_{ij} unverändert lassen, nennt man *Lorentz-Transformationen* und bezeichnet die Menge dieser Abbildungen mit $\text{SO}(1, 3)$. Die Menge $\mathbb{R}^4 \rtimes \text{SO}(1, 3)$, also die Translationen zusammen mit den Lorentz-Transformationen, nennt man *Poincaré-Transformationen*.

Die Metrik bleibt als skalarwertiges Objekt

$$g = g_{\alpha\beta} \vartheta^\alpha \otimes \vartheta^\beta$$

von Eichtransformationen unbeeinflusst. Unter Anwendung von (1.23) gilt:

$$g \longrightarrow g = g + (\delta g_{\alpha\beta} - \omega_{\alpha\beta} - \omega_{\beta\alpha}) \vartheta^\alpha \otimes \vartheta^\beta .$$

Also müssen sich die Metrikkomponenten, wenn sie die Eichinvarianz nicht zerstören sollen, gemäß

$$g_{\alpha\beta} \longrightarrow g_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta} + \omega_{\beta\alpha} \quad (1.24)$$

transformieren.

Man erkennt, daß die Metrikkomponenten unverändert bleiben, wenn

$$\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha} \quad (1.25)$$

gilt, insbesondere bleibt bei linearen Transformationen mit dieser Bedingung die orthogonale Metrik (1.13) orthogonal. Verlangt man umgekehrt, daß die Metrikkomponenten invariant bleiben, so schränkt man die Eichung der linearen Abbildungen auf die Lorentzgruppe $SO(1,3)$ ein, da nur diese die Bedingung (1.25) erfüllen. Die Eichung der Translationen schränkt man durch die Forderung der Invarianz der Metrikkomponenten auf Räume mit verschwindender Nichtmetrizität ein, vgl. Gleichung (2.21).

1.3. Eichtheorien der Gravitation

1.3.1. Metrisch-affine Gravitation (MAG)

Metrisch-affine Gravitationstheorien (MAG) sind die Theorien, die bezüglich der affinen Symmetrie lokal invariant sind. Wir beschreiben die physikalischen Theorien, die wir in dieser Arbeit betrachten, mittels des *Lagrange-Formalismus*, siehe auch Abschnitt 2.2.2 (Seite 29). Dieser Formalismus vermeidet z. B. eine $(3+1)$ -Aufspaltung der Mannigfaltigkeit. Wir bestimmen hier nun die MAG-Theorie, indem wir festlegen, von welchen Feldern der MAG-Lagrangian abhängt.

Wegen der lokal erfüllten affinen Symmetrie muß der MAG-Lagrangian von den *Eichpotentialen* der Translation und der allgemeinen linearen Gruppe, also von der Kobasis ϑ^α und der Konnexion Γ_α^β , abhängen. Weiterhin gehen die Metrikkomponenten $g_{\alpha\beta}$ als unabhängige Felder, die Materiefelder Ψ und schließlich die jeweils zugehörigen kovarianten Ableitungen in den Lagrangian ein. Die Ankopplung der Materie nur direkt und über die erste Ableitung $D\Psi$ nennt man *minimale Kopplung*. Neben $D\Psi$ liegen die kovarianten Ableitungen als Nichtmetrizität $Q_{\alpha\beta} = -Dg_{\alpha\beta}$ und als *Eichfeldstärken* Torsion $T^\alpha = D\vartheta^\alpha$ und Krümmung $R_\alpha^\beta = d\Gamma_\alpha^\beta + \Gamma_\gamma^\beta \wedge \Gamma_\alpha^\gamma$ vor:

$$L_{\text{MAG}} = L(g_{\alpha\beta}, Q_{\alpha\beta}, \vartheta^\alpha, T^\alpha, \Gamma_\alpha^\beta, R_\alpha^\beta, \Psi, D\Psi).$$

Da nur die Felder und die ersten Ableitungen der Felder eingehen, erhalten wir einen Lagrangian *1. Ordnung*.

Des weiteren hängt der Lagrangian nicht *explizit* von der Konnexion Γ_α^β ab. Die Konnexion ist kein Tensor, so daß man in einem festen Punkt die Kobasis so wählen

1.3. Eichtheorien der Gravitation

kann, daß die Konnexion in diesem Punkt verschwindet [Ha95]²:

$$\Gamma_{\alpha}^{\beta}|_p \stackrel{*}{=} 0 .$$

In einem solchen Punkt gilt also

$$L_{\text{MAG}} \stackrel{*}{=} L(g_{\alpha\beta}, dg_{\alpha\beta}, \vartheta^{\alpha}, d\vartheta^{\alpha}, d\Gamma_{\alpha}^{\beta}, \Psi, d\Psi) ;$$

der Lagrangian ist also in diesem Punkt und bei dieser Kobasiswahl eine skalarwertige 4-Form, die nur aus tensoriellen (bzw. evtl. spinorwertigen) Größen aufgebaut ist. Die Forderung, daß der Lagrangian invariant unter $\text{GL}(\mathbb{R}^4)$ sein soll, führt dazu, daß man die äußere Ableitung durch die kovariante Ableitung ersetzt und so eine implizite Abhängigkeit von Γ_{α}^{β} einführt. Durch diese Forderung entsteht kein expliziter eigener Term für Γ_{α}^{β} im Lagrangian, welcher somit eine Einschränkung des allgemeinen Lagrangians wäre.

Wir nehmen nun an, daß man den Lagrangian in einen Materie-Anteil und einen Eich-Lagrangian der Gravitation V_{MAG} aufspalten kann:

$$L_{\text{MAG}} = L_{\text{Materie}}(g_{\alpha\beta}, Q_{\alpha\beta}, \vartheta^{\alpha}, T^{\alpha}, R_{\alpha}^{\beta}, \Psi, D\Psi) + V_{\text{MAG}}(g_{\alpha\beta}, Q_{\alpha\beta}, \vartheta^{\alpha}, T^{\alpha}, R_{\alpha}^{\beta}) .$$

Wir wollen hier nur quadratische Eich-Lagrangians (lineare Terme sind damit nicht ausgeschlossen) betrachten. Man setzt daher folgenden allgemeinen quadratischen MAG-Eich-Lagrangian (ohne kosmologische Konstante) an:

$$\begin{aligned} V_{\text{MAG}} = \frac{1}{2\ell^2} & \left[-a_0 R^{\alpha\beta} \wedge \eta_{\alpha\beta} + T^{\alpha} \wedge \star \left(\sum_{I=1}^3 a_I {}^{(I)}T_{\alpha} \right) \right. \\ & + 2 \left(\sum_{I=2}^4 c_I {}^{(I)}Q_{\alpha\beta} \right) \wedge \vartheta^{\alpha} \wedge \star T^{\beta} + Q_{\alpha\beta} \wedge \star \left(\sum_{I=1}^4 b_I {}^{(I)}Q^{\alpha\beta} \right) \left. \right] \quad (1.26) \\ & - \frac{1}{2} R^{\alpha\beta} \wedge \star \left(\sum_{I=1}^6 w_I {}^{(I)}W_{\alpha\beta} + \sum_{I=1}^5 z_I {}^{(I)}Z_{\alpha\beta} \right) . \end{aligned}$$

Hierbei sind die Konstanten $a_0, \dots, a_3, b_1, \dots, b_4, c_2, \dots, c_4, w_1, \dots, w_6$ und z_1, \dots, z_5 dimensionslos und ℓ ist die Planck-Länge, die aus der Lichtgeschwindigkeit c , der Einsteinschen Gravitationskonstanten $\kappa = \frac{8\pi}{c^4}G$ und dem Planckschen Wirkungsquantum \hbar gebildet wird. Insbesondere ist in natürlichen Einheiten $\ell^2 = \kappa$. Weiterhin sind ${}^{(I)}T^{\alpha}$ die irreduziblen Stücke der Torsion (siehe Gleichungen (2.4)), ${}^{(I)}Q_{\alpha\beta}$ die irreduziblen Stücke der Nichtmetrizität (vgl. [He95, Anhang B.1]) und ${}^{(I)}W_{\alpha\beta} := {}^{(I)}R_{[\alpha\beta]}$ bzw. ${}^{(I)}Z_{\alpha\beta} := {}^{(I)}R_{(\alpha\beta)}$ die antisymmetrischen bzw. symmetrischen Anteile der irreduziblen Zerlegung der Krümmung, vgl. [He95, Anhang B.3 und B.4].

²Nach [Il97] kann man dies auf eine Kurve erweitern, entlang der die Konnexion verschwindet.

| Potential | Feldstärke | Bianchi-Identität |
|---------------------------------|---|---|
| Metrik $g_{\alpha\beta}$ | Nichtmetr. $Q_{\alpha\beta} := -Dg_{\alpha\beta}$ | $DQ_{\alpha\beta} = 2R_{(\alpha \gamma}g_{ \beta)\gamma}$ |
| Kobasis ϑ^α | Torsion $T^\alpha := D\vartheta^\alpha$ | $DT^\alpha = R_\beta^\alpha \wedge \vartheta^\beta$ |
| Konnexion Γ_α^β | Krümmung $R_\alpha^\beta := \text{„}D\Gamma_\alpha^\beta\text{“}$ $= d\Gamma_\alpha^\beta + \Gamma_\gamma^\beta \wedge \Gamma_\alpha^\gamma$ | $DR_\alpha^\beta = 0$ |

TABELLE 1.1.: Die Definitionsgleichungen (auch Cartansche Strukturgleichungen genannt) und die Bianchi-Identitäten der Feldstärken Nichtmetrizität, Torsion und Krümmung.

1.3.2. Poincaré-Eichtheorie der Gravitation (PG)

Die Poincaré-Eichtheorien der Gravitation sind Spezialfälle der metrisch-affinen Gravitationstheorien, nämlich die, bei denen die Nichtmetrizität verschwindet. Durch die Forderung des Verschwindens der Nichtmetrizität wird bewirkt, daß die Wahl der Metrik nicht mehr völlig frei bzw. unabhängig ist, denn die Metrikkomponenten sind dann automatisch invariant unter Translationen, siehe (2.21). Für Theorien, in denen à priori keine Metrik g gegeben ist, kann man die formale orthogonale Metrik (1.13) verwenden. Dabei schränkt man die Invarianz der PG bezüglich Translationen und linearer Abbildungen auf Invarianz bezüglich Poincaré-Transformationen ein, vgl. Abschnitt 1.2.5. Bezüglich dieser Metrikwahl ist dann die Konnexion antisymmetrisch, vgl. (E.4) (Seite 108).

Die Nebenbedingung des Verschwindens der Nichtmetrizität erreichen wir durch einen Lagrange-Multiplikator $\mu^{\alpha\beta}$, der eine symmetrische 3-Form ist. Wir ergänzen den PG-Lagrangian also durch den Summanden $\frac{1}{2}Q_{\alpha\beta} \wedge \mu^{\alpha\beta}$.

Somit ergibt sich der allgemeine PG-Lagrangian als:

$$L_{\text{PG}} = L(g_{\alpha\beta}, \vartheta^\alpha, T^\alpha, R_\alpha^\beta, \Psi, D\Psi) + \frac{1}{2}Q_{\alpha\beta} \wedge \mu^{\alpha\beta} .$$

Wir nehmen an, daß man den PG-Lagrangian in den Materie-Anteil und den PG-Eich-Lagrangian der Gravitation aufspalten kann:

$$L_{\text{PG}} = L_{\text{Materie}}(g_{\alpha\beta}, \vartheta^\alpha, T^\alpha, R_\alpha^\beta, \Psi, D\Psi) + V_{\text{PG}}(g_{\alpha\beta}, \vartheta^\alpha, T^\alpha, R_\alpha^\beta) + \frac{1}{2}Q_{\alpha\beta} \wedge \mu^{\alpha\beta} .$$

Wiederum wollen wir hier nur quadratische Lagrangians zulassen. Als allgemeinen quadratischen PG-Lagrangian (ohne kosmologische Konstante) setzt man daher

$$V_{\text{PG}} = \frac{1}{2\ell^2} \left[-a_0 R^{\alpha\beta} \wedge \eta_{\alpha\beta} + T^\alpha \wedge \star \left(\sum_{I=1}^3 a_I {}^{(I)}T_\alpha \right) - \frac{1}{2} R^{\alpha\beta} \wedge \star \left(\sum_{I=1}^6 b_I {}^{(I)}R_{\alpha\beta} \right) \right] \quad (1.27)$$

an. Hierbei sind die Bezeichnungen wie in Gleichung (1.26).

1.3. Eichtheorien der Gravitation

HINWEISE ZU DEN ABBILDUNGEN 1.1–1.5: Die folgenden Abbildungen sind Veranschaulichungen verschiedener geometrischer Größen. Die Definitionen dieser Größen gelten nur infinitesimal, so daß die Bilder nur anschauliche Näherung der Wirklichkeit sein können. Wenn man dies im Gedächtnis behält, bieten die Bilder eine gute bildhafte Vorstellung der abstrakten geometrischen Größen.

Die einzelnen Abbildungen zeigen jeweils den affinen Tangentialraum $A_p M$. Die außer p eingetragenen Punkte der Mannigfaltigkeit M sind über die Identifikation durch die Kobasis ϑ^α , vgl. Abbildung 1.6 und den Abschnitt 1.2.3 (Seite 16), in den affinen Tangentialraum abgebildet. Im einzelnen wählt man z. B. eine Kurve $(\alpha, 0) \in \mathcal{K}_p M$ mit $\dot{\alpha}(0) = v_p$ aus. Die Punkte $\alpha(t)$, $0 \leq t < 1$ liegen dann (z. B. bei verschwindendem $\Gamma^{(T)\alpha}$) entlang dem Vektor v_p , bis beim Zeitpunkt $t = 1$ das Ende des Vektors, bzw. der Punkt $q := \alpha(1)$ der Mannigfaltigkeit erreicht ist.

Bei einer infinitesimalen Betrachtung darf man die Identifikation nur für $\alpha(t + \Delta t)$ durchführen mit $\Delta t \ll 1$. Für die Definitionen von Ableitungen muß außerdem durch Δt dividiert werden, bevor der Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$ durchgeführt wird.

Die Wahl $\Delta t = 1$ in unseren Zeichnungen ist zwar nicht infinitesimal klein, hat aber den Vorteil, daß man nicht mehr durch Δt dividieren muß (was zeichnerisch schwierig wäre) und daß die Punkte der Mannigfaltigkeit als Endpunkte der Vektoren zu liegen kommen.

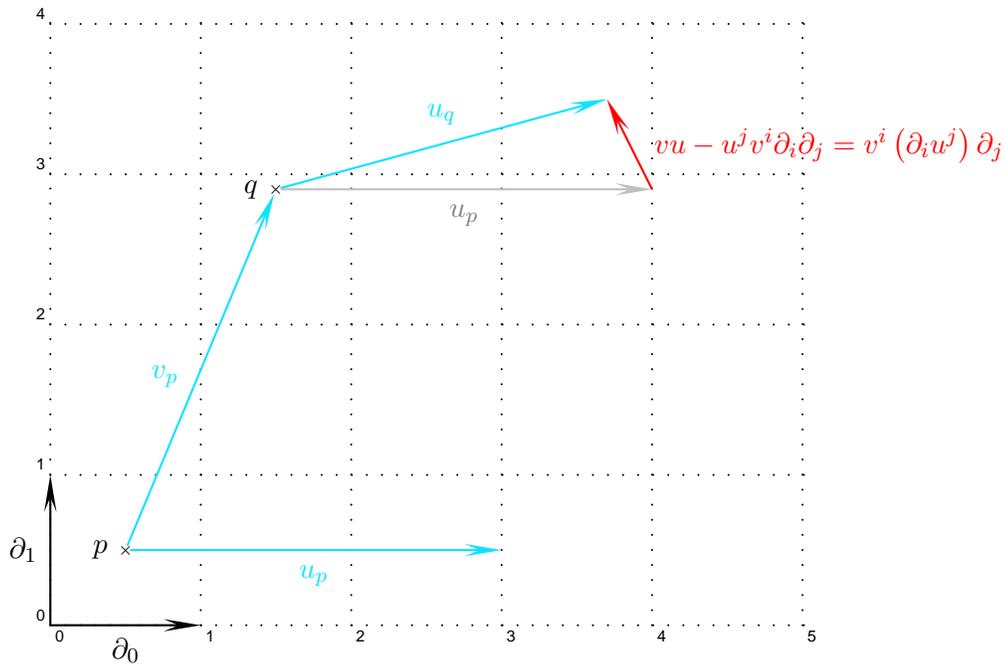


ABBILDUNG 1.1.: Vektorfelder und ihre Differentiationswirkung.

In dieser Zeichnung sind zwei holonome Basisfelder ∂_0 und ∂_1 und das durch sie induzierte Koordinatengitter angedeutet. Außerdem sind zwei Vektorfelder u und v , die als Differentialoperatoren wirken, eingezeichnet. Die Wirkung des zweiten Vektorfeldes v auf u ergibt kein Vektorfeld. Durch die Entwicklung der Vektorfelder nach den holonomen Basisfeldern, $v = v^j \partial_j$ und $u = u^i \partial_i$, erhält man $vu(f) = u^j v^i \partial_i \partial_j f + v^i (\partial_i u^j) \partial_j f$. Es ergibt sich also ein Vektorfeld-Anteil, der hier eingezeichnet ist und ein Anteil mit zweiten Ableitungen der Abbildung.

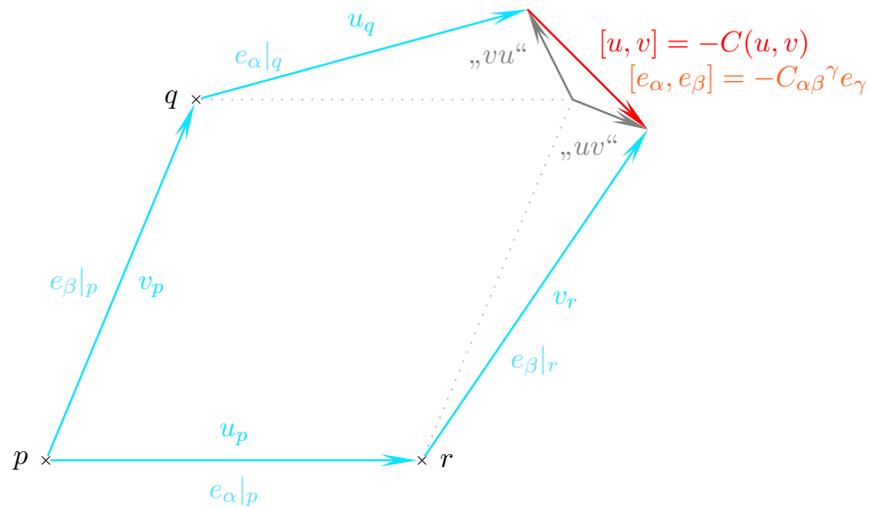


ABBILDUNG 1.2.: Die Anholonomieform oder das Anholonomieobjekt $C(u, v) = -[u, v]$.

Die Anholonomieform beschreibt den Schließungsfehler der Vektorfelder u und v , d. h. wie stark die Vektorfelder von einer Gitterstruktur abweichen.

Die von einer Karte als Tangentenvektoren an die Koordinatenfunktionen x^i induzierten Basisfelder ∂_i bilden ein Koordinatengitter, so daß deren Anholonomieform verschwindet. Solche Koordinaten heißen daher *holonome* Koordinaten.

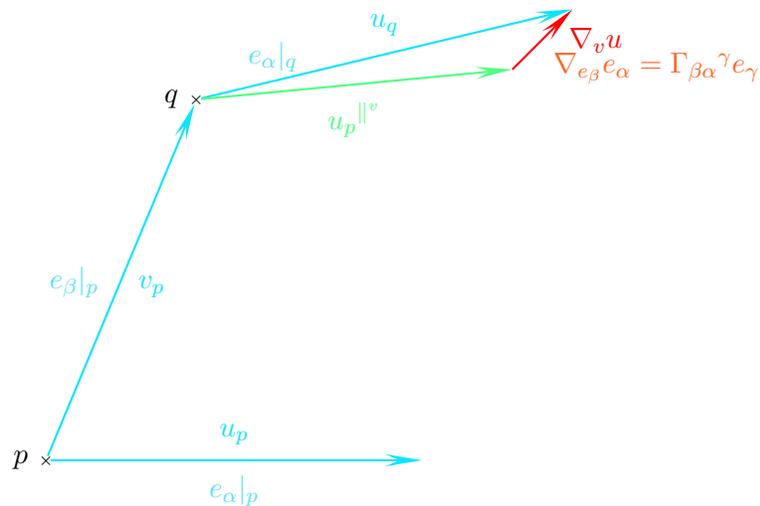


ABBILDUNG 1.3.: Die kovariante Ableitung, Konnexion und Parallelität.

Durch die kovariante Ableitung wird der zu u_p entlang v_p parallele Vektor $u_p^{\parallel v}$ festgelegt. Dazu gibt sie die Abweichung des Vektorfeldes am Punkt q vom Parallelvektor an, also näherungsweise $u_q = u_p^{\parallel v} + \nabla_v u$ für kleine Abstände.

Für den Fall $u_p = e_\alpha|_p$ und $v_p = e_\beta|_p$ kann man die Konnexion $\Gamma_{\beta\alpha}^\gamma$ aufgrund der Definition $\nabla_{e_\beta} e_\alpha = \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma e_\gamma$ ablesen.

1.3. Eichtheorien der Gravitation

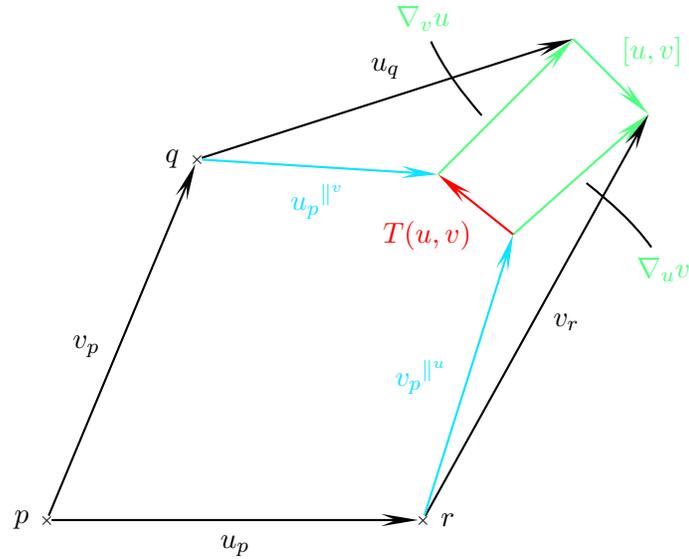


ABBILDUNG 1.4.: Die Torsion $T(u, v) := \nabla_u v - \nabla_v u - [u, v]$.

Die Torsion beschreibt den Schließungsfehler des Parallelogramms, das von u_p, v_p und den Parallelverschiebungen $u_p^{\parallel v}$ und $v_p^{\parallel u}$ aufgespannt wird. In der Zeichnung ist ablesbar, wie diese Anschauung mit den bekannten Größen Konnexion und Anholonomieobjekt beschrieben wird.

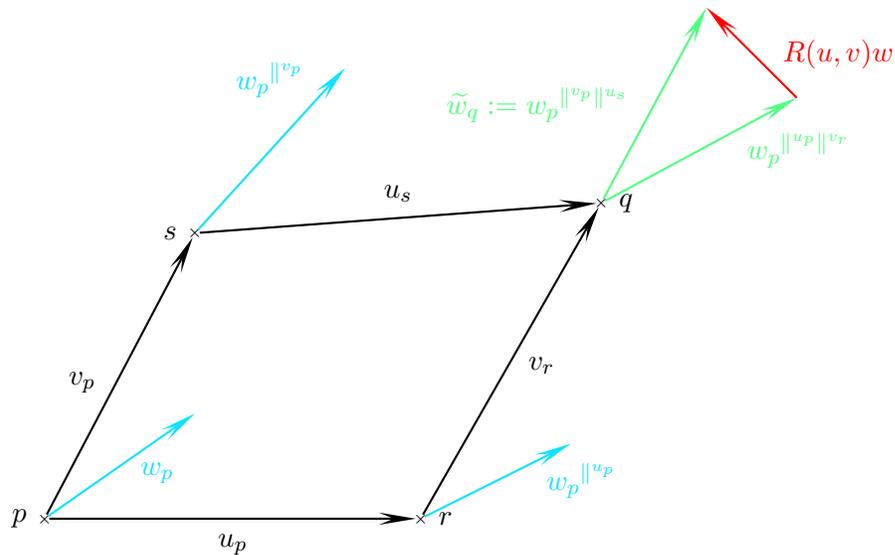


ABBILDUNG 1.5.: Die Krümmung $R(u, v)w$.

Die Krümmung beschreibt die *Wegabhängigkeit der Parallelverschiebungen*. Sie ergibt sich als Differenzvektor zwischen dem zunächst in Richtung v , dann in Richtung u parallel verschobenen Vektor w_p , also $w_p^{\parallel v \parallel u}$, und dem zunächst in Richtung u , dann in Richtung v parallel verschobenen Vektor w_p , also $w_p^{\parallel u \parallel v}$. In der Zeichnung ist vereinfachend $[u, v] = 0$ angenommen.

Alternativ kann man den Vektor $\tilde{w}_q := w_p^{\parallel v \parallel u}$ als gegeben betrachten. Die Krümmung kann man dann als Drehung interpretieren, um die der Ausgangsvektor \tilde{w}_q vom entlang eines kleinen, geschlossenen Weges parallelverschobenen Vektor abweicht.

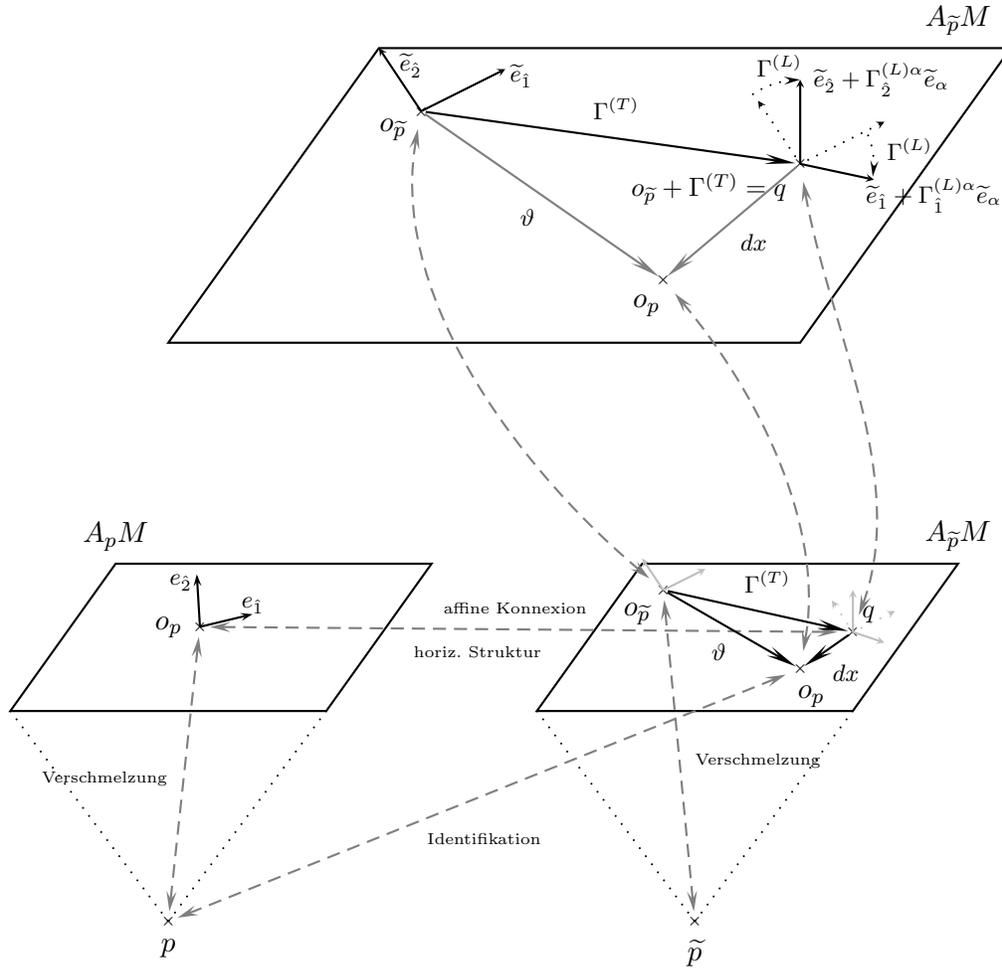


ABBILDUNG 1.6.: Zwei benachbarte affine Tangentialräume und die zugehörigen Strukturen.

Durch die Verschmelzung wird jedem Punkt p, \tilde{p} der Mannigfaltigkeit ein Ursprung $o_p, o_{\tilde{p}}$ in den affinen Tangentialräumen $A_pM, A_{\tilde{p}}M$ zugeordnet. Die horizontale Struktur ist als affine Konnexion $(\Gamma^{(T)\alpha}, \Gamma_\beta^{(L)\alpha})$ realisiert. Ihre Wirkung auf die affine Basis $(o_{\tilde{p}}, \tilde{e}_\alpha)$ ist in der vergrößerten Version von $A_{\tilde{p}}M$ dargestellt: Der Punkt wird über den translativen Anteil $\Gamma^{(T)\alpha}$ auf $q = o_{\tilde{p}} + \Gamma^{(T)\alpha} \tilde{e}_\alpha$ verschoben, die Basisfelder \tilde{e}_α werden durch den linearen Anteil $\Gamma_\beta^{(L)\alpha}$ auf die neuen Basisfelder $\tilde{e}_\beta + \Gamma_\beta^{(L)\alpha} \tilde{e}_\alpha$ gedreht. Schließlich führt die als dx^i genäherte Exponentialabbildung über $\vartheta^\alpha = \Gamma^{(T)\alpha} + \delta_i^\alpha dx^i$ zur Kobasis ϑ^α . Der von ihr abgetragene Punkt wird mit dem Ursprung o_p des benachbarten affinen Tangentialraums, bzw. dem Punkt p der Mannigfaltigkeit identifiziert.

2. Teleparallele Eichtheorien

Wir betrachten nun Theorien, die *Teleparallelismus* (auch *Fernparallelismus* oder *absoluter Parallelismus* genannt) zeigen. Zunächst definieren wir diesen Begriff kurz und stellen fest, daß in teleparallelen Räumen die Krümmung R_α^β verschwinden muß. Wir untersuchen Zerlegungen des quadratischen Teleparallelismus-Lagrangians, leiten die Feldgleichungen her und bestimmen die Noether-Identitäten. Danach wählen wir spezielle Konnexionen aus und untersuchen deren Auswirkungen auf den allgemeinen Teleparallelismus-Lagrangian. Wir untersuchen dann, welche teleparallele Theorie zur Einsteinschen Gravitationstheorie äquivalent ist. Für diese ausgezeichnete Theorie geben wir im letzten Abschnitt für einige bekannte Lösungen einfachere Ausdrücke an.

2.1. Teleparallelismus anschaulich

DEFINITION: In einer einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit, in der man Parallelverschiebungen wegunabhängig durchführen kann, ist die Konnexion mit dem sogenannten *Teleparallelismus*, der auch als *Fernparallelismus* oder *absoluter Parallelismus* bezeichnet wird, ausgestattet.

Wir haben in Abschnitt 1.1.2, Seite 8, ausführlich beschrieben, daß die Krümmung einer Konnexion ein Maß für die Wegabhängigkeit der Parallelverschiebung ist. Hieraus folgt, daß aufgrund der Wegunabhängigkeit der Parallelverschiebung einer teleparallelen Konnexion die Krümmung in teleparallelen Räumen verschwinden muß.

2.2. Quadratischer Teleparallelismus-Lagrangian

Wir beschreiben nun teleparallele Theorien als Spezialfälle des Poincaré-Lagrangians (1.27). Wir erzwingen das Verschwinden der Nichtmetrizität und der Krümmung mit Hilfe von Lagrangeschen Multiplikatoren. Die Nichtmetrizität haben wir bereits bei der Beschreibung der PG durch eine symmetrische 3-Form $\mu^{\alpha\beta}$ als Lagrange-Multiplikator zum Verschwinden gebracht, siehe Abschnitt 1.3.2, Seite 19. Das Verschwinden der Krümmung erzwingen wir nun durch einen zweiten Lagrange-Multiplikator λ^α_β , eine $GL(\mathbb{R}^4)$ -wertige 2-Form. Wir bezeichnen eine teleparallele

2.2. Quadratischer Teleparallelismus-Lagrangian

Eichtheorie mit GR_{\parallel} , deren allgemeiner Lagrangian die Form

$$L_{\text{GR}_{\parallel}} = L_{\parallel}(g_{\alpha\beta}, \vartheta^{\alpha}, T^{\alpha}, \Psi, D\Psi) + R_{\alpha}^{\beta} \wedge \lambda^{\alpha}_{\beta} + \frac{1}{2} Q_{\alpha\beta} \wedge \mu^{\alpha\beta} \quad (2.1)$$

besitzt.

Wir nehmen an, daß man den Teleparallelismus-Lagrangian (2.1) in einen Materie-Lagrangian und einen Eichfeld-Lagrangian V_{\parallel} aufspalten kann:

$$L_{\text{GR}_{\parallel}} = L_{\text{Materie}}(g_{\alpha\beta}, \vartheta^{\alpha}, T^{\alpha}, \Psi, D\Psi) + V_{\parallel}(g_{\alpha\beta}, \vartheta^{\alpha}, T^{\alpha}) + R_{\alpha}^{\beta} \wedge \lambda^{\alpha}_{\beta} + \frac{1}{2} Q_{\alpha\beta} \wedge \mu^{\alpha\beta}. \quad (2.2)$$

Da die Feldstärke der Metrik $g_{\alpha\beta}$, die Nicht-Metritizität $Q_{\alpha\beta}$, durch die Nebenbedingung des Lagrange-Multiplikator-Terms verschwindet, tritt kein eigener dynamischer Term für $g_{\alpha\beta}$ in den teleparallelen Lagrangians auf, die wir in dieser Arbeit betrachten.

Die übrigen Terme des Lagrangians hängen aber von den Metrikkomponenten $g_{\alpha\beta}$ ab. Wir werden diese im folgenden – um die Formeln wenigstens etwas übersichtlicher gestalten zu können – meist verstecken, indem wir das Heben und Senken von Indizes alleine durch die Indexstellung kennzeichnen: z. B. $\vartheta_{\alpha} := g_{\alpha\beta} \vartheta^{\beta}$. Außerdem gehen die Metrikkomponenten noch in den Hodge-Operator \star ein, vgl. Anhang B.6.

2.2.1. Der Eichfeld-Lagrangian V_{\parallel} und seine Aufspaltungen

Den Eich-Lagrangian V_{\parallel} setzen wir analog zu (1.27) quadratisch an. Die Feldstärke $T^{\alpha} = D\vartheta^{\alpha}$ kann in *irreduzible Teile* zerlegt werden:

$$D\vartheta^{\alpha} = {}^{(1)}D\vartheta^{\alpha} + {}^{(2)}D\vartheta^{\alpha} + {}^{(3)}D\vartheta^{\alpha}, \quad (2.3)$$

wobei diese über

$${}^{(1)}T^{\alpha} = {}^{(1)}D\vartheta^{\alpha} := D\vartheta^{\alpha} - {}^{(2)}D\vartheta^{\alpha} - {}^{(3)}D\vartheta^{\alpha} \quad (\text{tentor}), \quad (2.4a)$$

$${}^{(2)}T^{\alpha} = {}^{(2)}D\vartheta^{\alpha} := \frac{1}{3} \vartheta^{\alpha} \wedge (e_{\beta} \rfloor D\vartheta^{\beta}) \quad (\text{trator}), \quad (2.4b)$$

$$\begin{aligned} {}^{(3)}T^{\alpha} = {}^{(3)}D\vartheta^{\alpha} &:= -\frac{1}{3} \star \left[\vartheta^{\alpha} \wedge \star (\vartheta^{\beta} \wedge D\vartheta_{\beta}) \right] \\ &= \frac{1}{3} e_{\alpha} \rfloor (\vartheta^{\beta} \wedge D\vartheta_{\beta}) \quad (\text{axitor}). \end{aligned} \quad (2.4c)$$

definiert sind (in Klammern sind die entsprechenden Namen, die wir in Computeralgebra-Programmen verwenden, erwähnt). Durch diese Aufspaltung werden die 24 Komponenten der Torsion gemäß $24 = 16 \oplus 4 \oplus 4$ auf die einzelnen irreduziblen Anteile verteilt.

Der Eich-Lagrangian schreibt sich hiermit

$$V_{\parallel} = \frac{1}{2\ell^2} \sum_{I=1}^3 a_I \left(D\vartheta_{\alpha} \wedge \star^{(I)} D\vartheta^{\alpha} \right), \quad (2.5)$$

wobei ℓ die Planck-Länge ist, die aus der Lichtgeschwindigkeit c , der Einsteinschen Gravitationskonstanten $\kappa = \frac{8\pi}{c^4} G$ und dem Planckschen Wirkungsquantum \hbar gebildet wird. Insbesondere ist in natürlichen Einheiten $\ell^2 = \kappa$.

Alternativ kann ein allgemeiner quadratischer Eich-Lagrangian in die *eich-invarianten* Translations-Lagrangians entwickelt werden, die von Rumpf [Rum78] vorgeschlagen wurden,

$$V_{\parallel} = \frac{1}{2\ell^2} \sum_{I=0}^4 \rho_I {}^{(I)}V, \quad (2.6)$$

wobei

$${}^{(0)}V = \frac{1}{4} \vartheta^{\alpha} \wedge \star \vartheta_{\alpha} = \eta, \quad (2.7a)$$

$${}^{(1)}V = D\vartheta^{\alpha} \wedge \star D\vartheta_{\alpha} \quad (\text{reiner Yang-Mills Typ}), \quad (2.7b)$$

$${}^{(2)}V = \left(D\vartheta_{\alpha} \wedge \vartheta^{\alpha} \right) \wedge \star \left(D\vartheta_{\beta} \wedge \vartheta^{\beta} \right), \quad (2.7c)$$

$${}^{(3)}V = \left(D\vartheta^{\alpha} \wedge \vartheta^{\beta} \right) \wedge \star \left(D\vartheta_{\alpha} \wedge \vartheta_{\beta} \right) \stackrel{\text{(B.12a)}}{=} D\vartheta^{\alpha} \wedge \vartheta^{\beta} \wedge (e_{\beta}] \star D\vartheta_{\alpha} \stackrel{\text{(B.8a)}}{=} 2 {}^{(1)}V, \quad (2.7d)$$

$${}^{(4)}V = \left(D\vartheta_{\alpha} \wedge \vartheta^{\beta} \right) \wedge \star \left(D\vartheta_{\beta} \wedge \vartheta^{\alpha} \right). \quad (2.7e)$$

Weil ${}^{(3)}V = 2 {}^{(1)}V$, können wir immer $\rho_3 = 0$ setzen.

Die irreduzible Zerlegung des quadratischen Teleparallelismus-Lagrangians zerlegt anschaulich die Torsion in einen tensoriellen, einen axialen und einen Spur-Anteil. Man kann aber nur schwierig damit rechnen, da durch die Vektor-Basisfelder oder durch zahlreiche Hodge-Operatoren die explizite Abhängigkeit des Lagrangians von der Kobasis ϑ^{α} und deren kovarianter Ableitung verschleiert wird. Da die Aufspaltung in Rumpf-Lagrangians diesen Nachteil nicht hat, wollen wir nun die Umrechnungsgleichungen zwischen den Koeffizienten a_I und ρ_I bestimmen.

Dazu setzen wir zunächst die Abkürzungen (2.4) in (2.5) ein:

$$\begin{aligned} V_{\parallel} &= \frac{1}{2\ell^2} D\vartheta^{\alpha} \wedge \star \left(a_1 D\vartheta_{\alpha} + (a_2 - a_1) {}^{(2)}D\vartheta_{\alpha} + (a_3 - a_1) {}^{(3)}D\vartheta_{\alpha} \right) \\ &= \frac{1}{2\ell^2} D\vartheta^{\alpha} \wedge \star \left(a_1 D\vartheta_{\alpha} + \frac{a_2 - a_1}{3} \vartheta_{\alpha} \wedge (e_{\beta}] D\vartheta^{\beta} \right. \\ &\quad \left. - \frac{a_3 - a_1}{3} \star \left(\vartheta_{\alpha} \wedge \star (D\vartheta^{\beta} \wedge \vartheta_{\beta}) \right) \right). \end{aligned}$$

2.2. Quadratischer Teleparallelismus-Lagrangian

Mit Hilfe der Regeln aus dem Anhang B (Seite 75) können wir u. a. die Vektorfelder mittels der Hodge-Operation in die Kobasis ϑ^β umwandeln. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
2\ell^2 V_{\parallel} &\stackrel{\substack{(B.11a),(B.11c), \\ (B.11b)}}{=} a_1 D\vartheta^\alpha \wedge \star D\vartheta_\alpha + \frac{a_2 - a_1}{3} \vartheta_\alpha \wedge (e_\beta \lrcorner D\vartheta^\beta) \wedge \star D\vartheta^\alpha \\
&\quad + \frac{a_3 - a_1}{3} D\vartheta^\alpha \wedge \vartheta_\alpha \wedge \star (D\vartheta^\beta \wedge \vartheta_\beta) \\
&\stackrel{(B.7c)}{=} \left(a_1 D\vartheta^\alpha - \frac{a_2 - a_1}{3} e_\beta \lrcorner \right) (\vartheta^\alpha \wedge D\vartheta^\beta) + \frac{a_2 - a_1}{3} \overbrace{(e_\beta \lrcorner \vartheta^\alpha)}{=\delta_\beta^\alpha} \wedge D\vartheta^\beta \wedge \star D\vartheta_\alpha \\
&\quad + \frac{a_3 - a_1}{3} D\vartheta^\alpha \wedge \vartheta_\alpha \wedge \star (D\vartheta^\beta \wedge \vartheta_\beta) \\
&\stackrel{(B.11c)}{=} \frac{a_2 + 2a_1}{3} D\vartheta^\alpha \wedge \star D\vartheta_\alpha + \frac{a_3 - a_1}{3} D\vartheta^\alpha \wedge \vartheta_\alpha \wedge \star (D\vartheta^\beta \wedge \vartheta_\beta) \\
&\quad - \frac{a_2 - a_1}{3} D\vartheta^\alpha \wedge \star (e_\beta \lrcorner (\vartheta_\alpha \wedge D\vartheta^\beta)) .
\end{aligned}$$

Dabei haben wir bei den Regeln benutzt, daß wir eine vierdimensionale Raumzeit mit Lorentz-Index¹, somit $(-1)^{\text{Ind}(g)} = -1$, beschreiben wollen. Die obigen Umformungen sind generell nur für eine vierdimensionale Raumzeit gültig, da für die Anwendung der Gleichung (B.11c) die $(n-2)$ -Formen $\star D\vartheta^\alpha$, $\star (\vartheta_\alpha \wedge (e_\beta \lrcorner D\vartheta^\beta))$ und $\star (e_\beta \lrcorner (\vartheta_\alpha \wedge D\vartheta^\beta))$ gerade 2-Formen sein müssen.

Die Regel (B.12c) führt nun zu dem in Rumpf-Lagrangians aufgespaltenen Teleparallelismus-Eichfeld-Lagrangian:

$$\begin{aligned}
V_{\parallel} &= \frac{1}{2\ell^2} \left(\frac{a_2 + 2a_1}{3} D\vartheta^\alpha \wedge \star D\vartheta_\alpha + \frac{a_3 - a_1}{3} D\vartheta^\alpha \wedge \vartheta_\alpha \wedge \star (D\vartheta^\beta \wedge \vartheta_\beta) \right. \\
&\quad \left. + \frac{a_1 - a_2}{3} D\vartheta^\alpha \wedge \vartheta_\beta \wedge \star (\vartheta_\alpha \wedge D\vartheta^\beta) \right) . \quad (2.8)
\end{aligned}$$

Der Vergleich der so erhaltenen Koeffizienten mit denen aus (2.6) ergibt die Umrechnung

$$\rho_1 = \frac{1}{3} (a_2 + 2a_1) , \quad \rho_2 = \frac{1}{3} (a_3 - a_1) , \quad \rho_4 = \frac{1}{3} (a_1 - a_2) \quad (2.9a)$$

und hieraus die Umkehrung

$$a_1 = \rho_1 + \rho_4 , \quad a_2 = \rho_1 - 2\rho_4 , \quad a_3 = \rho_1 + 3\rho_2 + \rho_4 . \quad (2.9b)$$

2.2.2. Feldgleichungen und Ströme

Nach einer kurzen allgemeinen Beschreibung des Variationsprinzips leiten wir formal die Feldgleichungen des teleparallelen Lagrangians $L_{\text{GR}_{\parallel}}$ (2.1) her. Für den Fall des

¹Der Lorentz-Index selbst ist von der Wahl $\text{diag}(-1, +1, +1, +1)$ oder $\text{diag}(+1, -1, -1, -1)$ für die lokale Minkowski-Metrik abhängig; er ist dann nämlich 1 bzw. 3. Da in unseren Formeln aber nur $(-1)^{\text{Ind}(g)}$ auftaucht, hat diese Wahl hier keinen Einfluß.

allgemeinen quadratischen Lagrangians $V_{||}$ (2.6) berechnen wir die Feldgleichungen konkret.

Lagrange-Formalismus und Variation

In einem Lagrange-Formalismus k -ter Ordnung definiert man zunächst eine geeignete 4-Form $L(\Phi^{(i)}, D\Phi^{(i)}, \dots, D^n\Phi^{(i)})$, $i = 1, \dots, m$ als Lagrangian in Abhängigkeit der die Theorie beschreibenden m physikalischen Felder $\Phi^{(i)}$ und deren Ableitungen bis zur k -ten Ordnung. In den Eichtheorien der Gravitation treten nur die Eich-Potentiale und die Eich-Feldstärken, also nur die Felder und deren erste kovariante Ableitungen auf. Es liegen also Lagrangians 1. Ordnung vor, auf deren Betrachtung wir uns im folgenden beschränken. Im Fall des Teleparallelismus wären keine Lagrangians höherer Ordnung möglich, da aufgrund der verschwindenden Krümmung die zweiten kovarianten Ableitungen bereits Null sind, vgl. (1.16).

Nachdem eine Theorie durch einen Lagrangian festgelegt wurde, wie wir dies in den Abschnitten 1.3.1, 1.3.2 und 2.2 (Seite 26) für die MAG, PG und den Teleparallelismus durchgeführt haben, kann das Integral dieser 4-Form, die sogenannte *Wirkung*

$$S := \int_N L(\Phi^{(i)}, D\Phi^{(i)}) \quad (2.10)$$

gebildet werden. Hierbei bezeichnet N i. a. eine n -dimensionale kompakte Untermannigfaltigkeit der Raumzeit. Den Rand dieser Untermannigfaltigkeit N bezeichnen wir mit ∂N . Die Wirkung S ist also über dem Funktionenraum, den die Felder $\Phi^{(i)}$ und deren Ableitungen $D\Phi^{(i)}$ bilden, definiert.

Man fordert nun die Gültigkeit des sogenannten *Hamiltonschen Prinzips der minimalen Wirkung*. Dieses besagt, daß die Dynamik des physikalischen Systems dann richtig beschrieben wird, wenn für bestimmte $\Phi_{\text{Lösung}}^{(i)}$ mit $D\Phi_{\text{Lösung}}^{(i)}$ die Wirkung extremal wird, wobei Randwerte der Felder auf dem Rand ∂N des Integrationsgebietes vorgegeben sind (evtl. ist der Rand die leere Menge). Um diese Lösungen finden zu können, führt man auf dem Funktionenraum der Felder eine Ableitung ein, die sogenannte *Variationsableitung* δ . Die Lösungen des Systems werden also über die Feldgleichungen festgelegt, die man über die Bedingung $\delta S = 0$ bestimmt.

Für die Variation δ setzen wir \mathbb{R} -Linearität und die Erfüllung der (geraden) Leibnizregel voraus, vergleiche (C.1c), da sie eine Ableitung im Raum aller Felder repräsentiert. Weiterhin verlangen wir, daß die Variation δ mit der äußeren Ableitung vertauscht, siehe (C.1b), da in diese Operation keine unserer Feldgrößen eingeht (anders als bei der kovarianten Ableitung, die bereits von den Eichfeldern abhängt). Man variiert also im Lagrangian die m Felder $\Phi^{(i)}$ unabhängig voneinander gemäß $\Phi^{(i)} \rightarrow \Phi^{(i)} + \delta\Phi^{(i)}$, um die m Feldgleichungen für die Felder $\Phi^{(i)}$ ablesen zu können. Dabei muß man noch beachten, daß die Variationen der Felder $\delta\Phi^{(i)}$ auf dem Rand ∂N verschwinden, da dort die Randbedingungen des zu beschreibenden physikalischen Systems bereits festgelegt sind. Um diese Bedingung bereits für die Variation des Lagrangians und

2.2. Quadratischer Teleparallelismus-Lagrangian

nicht erst im Wirkungsintegral verwenden zu können, schreiben wir sie mittels des Satzes von Stokes um,

$$0 = \int_{\partial N} \delta\Phi^{(i)} \wedge \omega = \int_N d\left(\delta\Phi^{(i)} \wedge \omega\right),$$

wobei $\Phi^{(i)} \wedge \omega$ eine $(n-1)$ -Form sein muß und ω ansonsten beliebig ist. Terme, die als äußere Ableitung eines Ausdrucks geschrieben werden können, bezeichnen wir als *exakte Terme*. Wir sehen also, daß solche exakten Terme bei der Variation des Lagrangians weggelassen werden können, da sie die Variation der Wirkung nicht beeinflussen.

Feldgleichungen des Teleparallelismus-Lagrangians

Wir wenden nun diese allgemeine Beschreibung in einer abstrakten Herleitung der Feldgleichungen für den Lagrangian (2.1) an, also ohne zunächst den Eich-Lagrangian näher zu spezifizieren.

Wir variieren also $L_{\text{GR}\parallel}$ unabhängig nach den Feldern $g_{\alpha\beta}$, ϑ^α und Ψ und außerdem nach den von den Feldern abhängigen ersten Ableitungen $D\vartheta^\alpha$, $D\Psi$, R_α^β und $Q_{\alpha\beta}$. Des weiteren variieren wir unabhängig nach den Lagrange-Multiplikatoren, um die Zwangsbedingungen zu erhalten. Man erhält:

$$\begin{aligned} \delta L_{\text{GR}\parallel} = & \delta g_{\alpha\beta} \wedge \frac{\partial(V_{\parallel} + L_{\text{Materie}})}{\partial g_{\alpha\beta}} + \delta\vartheta^\alpha \wedge \frac{\partial(V_{\parallel} + L_{\text{Materie}})}{\partial\vartheta^\alpha} + \delta\Psi \wedge \frac{\partial L_{\text{Materie}}}{\partial\Psi} \\ & + \delta D\vartheta^\alpha \wedge \frac{\partial(V_{\parallel} + L_{\text{Materie}})}{\partial D\vartheta^\alpha} + \delta D\Psi \wedge \frac{\partial L_{\text{Materie}}}{\partial D\Psi} \\ & + \delta R_\alpha^\beta \wedge \lambda_\beta^\alpha - \delta Dg_{\alpha\beta} \wedge \frac{1}{2}\mu^{\alpha\beta} + \delta\lambda_\beta^\alpha \wedge R_\alpha^\beta - \delta\mu^{\alpha\beta} \wedge \frac{1}{2}Q_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Um auf der rechten Seite nur Variationen nach unabhängigen Größen zu erhalten, berechnen wir die Variationen nach den Feldstärken explizit:

$$\begin{aligned} \delta D\vartheta^\alpha &= \delta d\vartheta^\alpha + \delta\left(\Gamma_\beta^\alpha \wedge \vartheta^\beta\right) \\ &\stackrel{\text{(C.1b)}, \text{(C.1c)}}{=} d\delta\vartheta^\alpha + \delta\Gamma_\beta^\alpha \wedge \vartheta^\beta + \Gamma_\beta^\alpha \wedge \delta\vartheta^\beta \\ &= D\delta\vartheta^\alpha + \delta\Gamma_\beta^\alpha \wedge \vartheta^\beta. \end{aligned} \quad (2.12a)$$

Mit einer analogen Rechnung erhalten wir

$$-\delta Dg_{\alpha\beta} = -D\delta g_{\alpha\beta} + \left(\delta\Gamma_\alpha^\gamma\right)g_{\gamma\beta} + \left(\delta\Gamma_\beta^\gamma\right)g_{\alpha\gamma}. \quad (2.12b)$$

Bei dem Materiefeld Ψ hängt die Berechnung des Kommutators von D und δ davon ab, welche Raumzeit-Indizes die Materie aufweist, wie also die Konnexion Γ_α^β an Ψ anknüpft. Da wir die Materie nicht näher festlegen wollen, schreiben wir formal

$$\delta D\Psi = D\delta\Psi + \delta\Gamma_\beta^\alpha \wedge \left(L_\alpha^\beta \Psi\right), \quad (2.12c)$$

ohne den Ausdruck in der Klammer explizit spezifizieren zu können.

Durch das Vertauschen der Variation mit der kovarianten Ableitung erscheint nun die unabhängige Variation nach der Konnexion Γ_α^β . Aus diesem Grunde führen wir den δR_α^β -Term ebenfalls auf die Variation der Konnexion zurück:

$$\begin{aligned} \delta R_\alpha^\beta &\stackrel{(1.12a)}{=} \delta d\Gamma_\alpha^\beta + \delta \left(\Gamma_\gamma^\beta \wedge \Gamma_\alpha^\gamma \right) \\ &\stackrel{(C.1b),(C.1c)}{=} d\delta\Gamma_\alpha^\beta + \left(\delta\Gamma_\gamma^\beta \right) \wedge \Gamma_\alpha^\gamma - \left(\delta\Gamma_\alpha^\gamma \right) \wedge \Gamma_\gamma^\beta = D\delta\Gamma_\alpha^\beta. \end{aligned} \quad (2.12d)$$

Nach Einsetzen der Formeln (2.12) in (2.11) ergibt sich, da $\mu^{\alpha\beta}$ symmetrisch ist,

$$\begin{aligned} \delta L_{\text{GR}\parallel} &= \delta g_{\alpha\beta} \wedge \frac{\partial(V_\parallel + L_{\text{Materie}})}{\partial g_{\alpha\beta}} - D\delta g_{\alpha\beta} \wedge \frac{1}{2}\mu^{\alpha\beta} \\ &+ \delta\vartheta^\alpha \wedge \frac{\partial(V_\parallel + L_{\text{Materie}})}{\partial\vartheta^\alpha} + D\delta\vartheta^\alpha \wedge \frac{\partial(V_\parallel + L_{\text{Materie}})}{\partial D\vartheta^\alpha} \\ &+ \delta\Psi \wedge \frac{\partial L_{\text{Materie}}}{\partial\Psi} + D\delta\Psi \wedge \frac{\partial L_{\text{Materie}}}{\partial D\Psi} \\ &+ \delta\Gamma_\alpha^\beta \wedge \left((L^\alpha_\beta\Psi) \wedge \frac{\partial L_{\text{Materie}}}{\partial D\Psi} + \vartheta^\alpha \wedge \frac{\partial(V_\parallel + L_{\text{Materie}})}{\partial D\vartheta^\beta} + g_{\gamma\beta}\mu^{\alpha\gamma} \right) \\ &+ D\delta\Gamma_\alpha^\beta \wedge \lambda^\alpha_\beta + \delta\lambda^\alpha_\beta \wedge R_\alpha^\beta - \delta\mu^{\alpha\beta} \wedge \frac{1}{2}Q_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (2.13a)$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{(B.15b)}{=} d \left(-\delta g_{\alpha\beta} \wedge \frac{1}{2}\mu^{\alpha\beta} + \delta\vartheta^\alpha \wedge \frac{\partial(V_\parallel + L_{\text{Materie}})}{\partial D\vartheta^\alpha} + \delta\Psi \wedge \frac{\partial L_{\text{Materie}}}{\partial D\Psi} + \delta\Gamma_\alpha^\beta \wedge \lambda^\alpha_\beta \right) \\ &+ \delta g_{\alpha\beta} \wedge \left(\frac{\partial(V_\parallel + L_{\text{Materie}})}{\partial g_{\alpha\beta}} + \frac{1}{2}D\mu^{\alpha\beta} \right) + \delta\Psi \wedge \left(\frac{\partial L_{\text{Materie}}}{\partial\Psi} - (-1)^p D\frac{\partial L_{\text{Materie}}}{\partial D\Psi} \right) \\ &+ \delta\vartheta^\alpha \wedge \left(\frac{\partial(V_\parallel + L_{\text{Materie}})}{\partial\vartheta^\alpha} + D\frac{\partial(V_\parallel + L_{\text{Materie}})}{\partial D\vartheta^\alpha} \right) + \delta\lambda^\alpha_\beta \wedge R_\alpha^\beta - \delta\mu^{\alpha\beta} \wedge \frac{1}{2}Q_{\alpha\beta} \\ &+ \delta\Gamma_\alpha^\beta \wedge \left((L^\alpha_\beta\Psi) \wedge \frac{\partial L_{\text{Materie}}}{\partial D\Psi} + \vartheta^\alpha \wedge \frac{\partial(V_\parallel + L_{\text{Materie}})}{\partial D\vartheta^\beta} + g_{\gamma\beta}\mu^{\alpha\gamma} + D\lambda^\alpha_\beta \right). \end{aligned} \quad (2.13b)$$

Hierbei haben wir in der ersten Zeile von (2.13b) die kovariante Ableitung in eine äußere Ableitung umgeschrieben, da beide identisch sind, weil der abzuleitende Term eine skalarwertige Funktion ist. Die erste Zeile hat somit keine Bedeutung für die Feldgleichungen. Aus den unabhängigen Variationen nach den 6 Feldern bzw. Lagrange-Multiplikatoren lesen wir schließlich die zugehörigen Feldgleichungen ab:

$$-m^{\alpha\beta} - D\mu^{\alpha\beta} = \sigma^{\alpha\beta} \quad (\text{ZEROTH}), \quad (2.14a)$$

$$DH_\alpha - E_\alpha = \Sigma_\alpha \quad (\text{FIRST}), \quad (2.14b)$$

$$-E^\alpha_\beta - g_{\beta\gamma}\mu^{\alpha\gamma} - D\lambda^\alpha_\beta = \Delta^\alpha_\beta \quad (\text{SECOND}), \quad (2.14c)$$

$$\frac{\delta L_{\text{Materie}}}{\delta\Psi} = 0 \quad (\text{Materiegleichung}), \quad (2.14d)$$

$$Q_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{und} \quad R_\alpha^\beta = 0 \quad (\text{Nebenbedingungen}), \quad (2.14e)$$

2.2. Quadratischer Teleparallelismus-Lagrangian

wobei wir die Abkürzungen

$$E_\alpha := \frac{\partial V_\parallel}{\partial \vartheta^\alpha}, \quad H_\alpha := -\frac{\partial V_\parallel}{\partial D\vartheta^\alpha}, \quad \Sigma_\alpha := \frac{\delta L_{\text{Materie}}}{\delta \vartheta^\alpha}, \quad (2.15a)$$

$$m^{\alpha\beta} := 2\frac{\partial V_\parallel}{\partial g_{\alpha\beta}}, \quad \sigma^{\alpha\beta} := 2\frac{\partial L_{\text{Materie}}}{\partial g_{\alpha\beta}}, \quad (2.15b)$$

$$E^\alpha{}_\beta := \frac{\partial V_\parallel}{\partial \Gamma_\alpha{}^\beta} = -\vartheta^\alpha \wedge H_\beta, \quad \Delta^\alpha{}_\beta := \frac{\partial L_{\text{Materie}}}{\partial \Gamma_\alpha{}^\beta} \\ = \vartheta^\alpha \wedge \frac{\partial L_{\text{Materie}}}{\partial D\vartheta^\beta} + (L^\alpha{}_\beta \Psi) \wedge \frac{\partial L_{\text{Materie}}}{\partial D\Psi} \quad (2.15c)$$

und die Variationsableitung $\frac{\delta L}{\delta \Phi} := D\frac{\partial L}{\partial D\Phi} - (-1)^p \frac{\partial L}{\partial \Phi}$ eines Lagrangians L nach einem als p -Form darstellbaren Feld Φ eingeführt haben.

Wir formen die entstandenen Feldgleichungen (2.14a)–(2.14c) noch ein wenig um: Von der zweiten Feldgleichung (2.14c) berechnen wir den antisymmetrischen Teil (2.16c), wobei der symmetrische Lagrange-Multiplikator $\mu^{\alpha\beta}$ herausfällt und wir den Spinstrom

$$\tau^{\alpha\beta} := \Delta^{[\alpha\beta]} \quad (2.15d)$$

definieren. Den symmetrischen Teil von (2.16c) lösen wir nach $\mu^{\alpha\beta}$ auf,

$$\mu^{\alpha\beta} = -E^{(\alpha\beta)} - D\lambda^{(\alpha\beta)} - \Delta^{(\alpha\beta)},$$

und setzen ihn in (2.14a) ein:

$$-m^{\alpha\beta} + DE^{(\alpha\beta)} + DD\lambda^{(\alpha\beta)} + D\Delta^{(\alpha\beta)} = \sigma^{\alpha\beta}.$$

Unter Verwendung von (1.16) und der Nebenbedingung (2.14e), sowie nach Einsetzen der Definition von $E^\alpha{}_\beta$ und der ersten Feldgleichung (2.14b) erhält man die veränderte 0. Feldgleichung

$$-m^{\alpha\beta} - D\vartheta^{(\alpha} \wedge H^{\beta)} + \vartheta^{(\alpha} \wedge E^{\beta)} = \sigma^{\alpha\beta} - D\Delta^{(\alpha\beta)} - \vartheta^{(\alpha} \wedge \Sigma^{\beta)} \quad (2.16a)$$

und nochmals die beiden anderen Feldgleichungen:

$$DH_\alpha - E_\alpha = \Sigma_\alpha, \quad (2.16b)$$

$$\vartheta^{[\alpha} \wedge H^{\beta]} - D\lambda^{[\alpha\beta]} = \tau^{\alpha\beta}. \quad (2.16c)$$

Die Größe $m^{\alpha\beta}$ und die Feldgleichungen (2.16a) bzw. (2.16c) betrachten wir nach Berechnung der Noether-Identitäten noch etwas genauer, siehe Seite 41.

Konkrete Feldgleichungen für den quadratischen Eich-Lagrangian

Für den Eichfeld-Lagrangian V_\parallel benutzen wir den expliziten Ausdruck, der sich aus dem quadratischen Ansatz (2.6) ergibt, um den *kanonischen Energie-Impuls* E_α , den *Eichfeld-Impuls* H_α und den *metrischen Energie-Impuls* $m^{\alpha\beta}$ konkret zu berechnen.

2.2. Quadratischer Teleparallelismus-Lagrangian

Bei dieser Berechnung, muß man die Regel (C.12a) für die Variation einer Hodge-dualen alternierenden Form verwenden. Da die Herleitung dieser Formel eine längere Rechnung benötigt, haben wir sie im Anhang C ab Seite 85 vorgeführt, so daß auch die Zwischenergebnisse leicht auffindbar sind. Nur wenn alle Felder des Lagrangians von der Kobasis ϑ^α und den Metrikkomponenten $g_{\alpha\beta}$ unabhängig wären, oder wenn man die Variation auf Lorentz-Drehungen einschränken würde, vgl. Abschnitt 3.1.2 (Seite 56), würde die Variation δ und der Hodge-Stern \star vertauschen.

Wir variieren nun den Eichfeld-Lagrangian V_{\parallel} , um die gesuchten Größen als implizit definierte partielle Ableitungen ablesen zu können:

$$\begin{aligned}\delta V_{\parallel} &= \delta\vartheta^\alpha \wedge \frac{\partial V_{\parallel}}{\partial \vartheta^\alpha} + \delta D\vartheta^\alpha \wedge \frac{\partial V_{\parallel}}{\partial D\vartheta^\alpha} + \delta g_{\alpha\beta} \wedge \frac{\partial V_{\parallel}}{\partial g_{\alpha\beta}} \\ &= \delta\vartheta^\alpha \wedge E_\alpha - \delta D\vartheta^\alpha \wedge H_\alpha + \delta g_{\alpha\beta} \wedge \frac{1}{2}m^{\alpha\beta}.\end{aligned}$$

Damit die Formeln nicht allzu lang und unübersichtlich werden, nutzen wir die Tatsache, daß die Variationen nach ϑ^α und $g_{\alpha\beta}$ unabhängig sind. Wir variieren zunächst nur nach ϑ^α , setzen also $\delta g_{\alpha\beta} = 0$. Danach variieren wir nach $g_{\alpha\beta}$ mit $\delta\vartheta^\alpha = 0$.

Bei der Variation nach ϑ^α erhalten wir mit den Formeln (C.1c) und (C.12b):

$$\begin{aligned}2\ell^2 \delta V_{\parallel} &= 2\rho_2 \delta (D\vartheta^\alpha \wedge \vartheta_\alpha) \wedge \star (D\vartheta^\beta \wedge \vartheta_\beta) + 2\rho_4 \delta (D\vartheta^\alpha \wedge \vartheta_\beta) \wedge \star (\vartheta_\alpha \wedge D\vartheta^\beta) \\ &\quad + 2\rho_1 \delta (D\vartheta^\alpha) \wedge \star D\vartheta_\alpha + \rho_1 D\vartheta^\alpha \wedge \left[\delta\vartheta^\gamma \wedge (e_\gamma]^\star D\vartheta_\alpha) - \star (\delta\vartheta^\gamma \wedge (e_\gamma] D\vartheta_\alpha)) \right] \\ &\quad + \rho_2 D\vartheta^\alpha \wedge \vartheta_\alpha \wedge \left[\delta\vartheta^\gamma \wedge (e_\gamma]^\star (D\vartheta^\beta \wedge \vartheta_\beta)) - \star (\delta\vartheta^\gamma \wedge (e_\gamma] (D\vartheta^\beta \wedge \vartheta_\beta)) \right] \\ &\quad + \rho_4 D\vartheta^\alpha \wedge \vartheta_\beta \wedge \left[\delta\vartheta^\gamma \wedge (e_\gamma]^\star (\vartheta_\alpha \wedge D\vartheta^\beta)) - \star (\delta\vartheta^\gamma \wedge (e_\gamma] (\vartheta_\alpha \wedge D\vartheta^\beta)) \right]\end{aligned}$$

und mittels Formel (B.11c) und nochmals der Leibniz-Regel für die Variation (C.1c)

$$\begin{aligned}&= \delta D\vartheta^\alpha \wedge \left[2\rho_1 \star D\vartheta_\alpha + 2\rho_2 \vartheta_\alpha \wedge \star (D\vartheta^\beta \wedge \vartheta_\beta) + 2\rho_4 \vartheta_\beta \wedge \star (\vartheta_\alpha \wedge D\vartheta^\beta) \right] \\ &\quad + \delta\vartheta^\gamma \wedge \left[2\rho_2 D\vartheta_\gamma \wedge \star (D\vartheta^\beta \wedge \vartheta_\beta) + 2\rho_4 D\vartheta^\alpha \wedge \star (\vartheta_\alpha \wedge D\vartheta_\gamma) \right. \\ &\quad + \rho_1 D\vartheta^\alpha \wedge (e_\gamma]^\star D\vartheta_\alpha) - \rho_1 (e_\gamma] D\vartheta_\alpha) \wedge \star D\vartheta^\alpha \\ &\quad - \rho_2 (e_\gamma] (D\vartheta^\beta \wedge \vartheta_\beta)) \wedge \star (D\vartheta^\alpha \wedge \vartheta_\alpha) - \rho_2 D\vartheta^\alpha \wedge \vartheta_\alpha \wedge (e_\gamma]^\star (D\vartheta^\beta \wedge \vartheta_\beta)) \\ &\quad \left. - \rho_4 (e_\gamma] (\vartheta_\alpha \wedge D\vartheta^\beta)) \wedge \star (D\vartheta^\alpha \wedge \vartheta_\beta) - \rho_4 D\vartheta^\alpha \wedge \vartheta_\beta \wedge (e_\gamma]^\star (\vartheta_\alpha \wedge D\vartheta^\beta)) \right].\end{aligned}\tag{2.17}$$

Wir erhalten damit unter Beachtung von (B.7c) für den *Eichfeld-Impuls*

$$\boxed{-H_\alpha = \frac{\partial V_{\parallel}}{\partial D\vartheta^\alpha} = \frac{1}{\ell^2} \left[\rho_1 \star D\vartheta_\alpha + \rho_2 \vartheta_\alpha \wedge \star (D\vartheta^\beta \wedge \vartheta_\beta) + \rho_4 \vartheta_\beta \wedge \star (\vartheta_\alpha \wedge D\vartheta^\beta) \right]}\tag{2.18a}$$

2.2. Quadratischer Teleparallelismus-Lagrangian

und für den kanonischen Energie-Impuls des Eichfelds:

$$\begin{aligned}
 E_\alpha = \frac{\partial V_{\parallel}}{\partial \vartheta^\alpha} = \frac{1}{2\ell^2} & \left[\rho_1 e_\alpha \rfloor \left(D\vartheta^\beta \wedge \star D\vartheta_\beta \right) - 2\rho_1 \left(e_\alpha \rfloor D\vartheta^\beta \right) \wedge \star D\vartheta_\beta \right. \\
 & + \rho_2 e_\alpha \rfloor \left(D\vartheta^\gamma \wedge \vartheta_\gamma \wedge \star \left(D\vartheta^\beta \wedge \vartheta_\beta \right) \right) - 2\rho_2 \left(e_\alpha \rfloor D\vartheta^\beta \right) \wedge \vartheta_\beta \wedge \star \left(D\vartheta^\gamma \wedge \vartheta_\gamma \right) \\
 & \left. + \rho_4 e_\alpha \rfloor \left(\vartheta_\gamma \wedge D\vartheta^\beta \wedge \star \left(D\vartheta^\gamma \wedge \vartheta_\beta \right) \right) - 2\rho_4 \left(e_\alpha \rfloor D\vartheta^\beta \right) \wedge \vartheta_\gamma \wedge \star \left(D\vartheta^\gamma \wedge \vartheta_\beta \right) \right].
 \end{aligned}
 \tag{2.18b}$$

Aufgrund der Feldgleichung (2.16b) muß für den kanonischen Energie-Impuls Σ_α der Materie

$$\begin{aligned}
 -2\ell^2 \Sigma_\alpha = \rho_1 e_\alpha \rfloor & \left(D\vartheta^\beta \wedge \star D\vartheta_\beta \right) - 2\rho_1 \left(e_\alpha \rfloor D\vartheta^\beta \right) \wedge \star D\vartheta_\beta \\
 & + \rho_2 e_\alpha \rfloor \left(D\vartheta^\gamma \wedge \vartheta_\gamma \wedge \star \left(D\vartheta^\beta \wedge \vartheta_\beta \right) \right) - 2\rho_2 \left(e_\alpha \rfloor D\vartheta^\beta \right) \wedge \vartheta_\beta \wedge \star \left(D\vartheta^\gamma \wedge \vartheta_\gamma \right) \\
 & + \rho_4 e_\alpha \rfloor \left(\vartheta_\gamma \wedge D\vartheta^\beta \wedge \star \left(D\vartheta^\gamma \wedge \vartheta_\beta \right) \right) - 2\rho_4 \left(e_\alpha \rfloor D\vartheta^\beta \right) \wedge \vartheta_\gamma \wedge \star \left(D\vartheta^\gamma \wedge \vartheta_\beta \right) \\
 & + 2\rho_1 D \star D\vartheta_\alpha \\
 & + 2\rho_2 D\vartheta_\alpha \wedge \star \left(D\vartheta^\beta \wedge \vartheta_\beta \right) - 2\rho_2 \vartheta_\alpha \wedge D \star \left(D\vartheta^\beta \wedge \vartheta_\beta \right) \\
 & + 2\rho_4 D\vartheta_\beta \wedge \star \left(\vartheta_\alpha \wedge D\vartheta^\beta \right) - 2\rho_4 \vartheta_\beta \wedge D \star \left(\vartheta_\alpha \wedge D\vartheta^\beta \right)
 \end{aligned}
 \tag{2.19}$$

gelten.

Nun variieren wir nach $g_{\alpha\beta}$ und setzen $\delta\vartheta^\alpha = 0$. Dazu schreiben wir die $g_{\alpha\beta}$ explizit in die Rumpf-Lagrangians:

$$\begin{aligned}
 V_{\parallel} = \rho_1 g_{\alpha\beta} D\vartheta^\alpha \wedge \star D\vartheta^\beta & + \rho_2 g_{\alpha\beta} g_{\gamma\delta} \left(D\vartheta^\alpha \wedge \vartheta^\beta \right) \wedge \star \left(D\vartheta^\gamma \wedge \vartheta^\delta \right) \\
 & + \rho_4 g_{\alpha\beta} g_{\gamma\delta} \left(D\vartheta^\alpha \wedge \vartheta^\gamma \right) \wedge \star \left(D\vartheta^\delta \wedge \vartheta^\beta \right).
 \end{aligned}$$

Der metrische Energie-Impuls ergibt sich mit den Regeln (C.12a), (B.11c) und nach Umbenennung toter Indizes. Weil $\delta g_{\alpha\beta}$ symmetrisch ist, symmetrisieren wir die beiden Terme, die nicht bereits von selbst symmetrisch sind:

$$\begin{aligned}
 m^{\alpha\beta} = 2 \frac{\partial V_{\parallel}}{\partial g_{\alpha\beta}} = \frac{1}{2\ell^2} & \left[2\rho_1 D\vartheta^\alpha \wedge \star D\vartheta^\beta + 4\rho_2 \left(D\vartheta^{(\alpha} \wedge \vartheta^{\beta)} \right) \wedge \star \left(D\vartheta^\gamma \wedge \vartheta_\gamma \right) \right. \\
 & + 4\rho_4 \left(D\vartheta^{(\alpha} \wedge \vartheta^\gamma \right) \wedge \star \left(D\vartheta_\gamma \wedge \vartheta^{|\beta)} \right) - 2\ell^2 g^{\alpha\beta} V_{\parallel} \\
 & + 2\rho_1 D\vartheta^\gamma \wedge \vartheta^\alpha \wedge e^\beta \rfloor \left(\star D\vartheta_\gamma \right) \\
 & + 2\rho_2 \left(D\vartheta^\gamma \wedge \vartheta_\gamma \right) \wedge \vartheta^\alpha \wedge e^\beta \rfloor \star \left(D\vartheta^\delta \wedge \vartheta_\delta \right) \\
 & \left. + 2\rho_4 \left(D\vartheta^\gamma \wedge \vartheta^\delta \right) \wedge \vartheta^\alpha \wedge e^\beta \rfloor \star \left(D\vartheta_\delta \wedge \vartheta_\gamma \right) \right].
 \end{aligned}
 \tag{2.20}$$

2.3. Noether-Identitäten

Wenn ein Lagrangian unter einer Symmetrietransformation invariant bleibt, so werden die zugehörigen *Noether-Identitäten* erfüllt. Unser Eich-Lagrangian ist durch die Eich-Potentiale ϑ^α und Γ_α^β translationsinvariant bzw. invariant bezüglich linearer Abbildungen. Wir geben die zugehörigen Noether-Identitäten an und rechnen nach, daß unsere Größen (2.18a), (2.18b) und (2.20) tatsächlich diese Identitäten erfüllen (dabei unterziehen wir obige Rechnungen auch einer Konsistenzüberprüfung).

2.3.1. Translations-Invarianz

Kovariante Lie-Ableitung

Translationen werden durch Lie-Ableitungen entlang eines Vektorfeldes realisiert, vergleiche Anhang B.8 (Seite 82). Wir müssen hier aber beachten, daß die Translationen mit dem Eichpotential Γ_α^β der Gruppe $GL(\mathbb{R})$ verträglich sein müssen. Wir verwenden daher die *kovariante Lie-Ableitung*, die als Antikommutator aus dem inneren Produkt \rfloor und der *kovarianten* Ableitung D gebildet wird. Der Zusammenhang mit der Lie-Ableitung aus Anhang B.8 ergibt sich, hier exemplarisch für eine vektorbündelwertige Form, durch einfache Rechnung:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_v \psi^\alpha &= v \rfloor D \psi^\alpha + D(v \rfloor \psi^\alpha) \\ &= v \rfloor \left(d \psi^\alpha + \Gamma_\beta^\alpha \wedge \psi^\beta \right) + d(v \rfloor \psi^\alpha) + \Gamma_\beta^\alpha \wedge (v \rfloor \psi^\beta) \\ &= v \rfloor d \psi^\alpha + d(v \rfloor \psi^\alpha) + (v \rfloor \Gamma_\beta^\alpha) \wedge \psi^\beta = \ell_v \psi^\alpha + (v \rfloor \Gamma_\beta^\alpha) \wedge \psi^\beta . \end{aligned}$$

Herleitung der 1. Noether-Identität

Die Herleitung der zur Translationssymmetrie gehörenden Noether-Identität des Eich-Lagrangians verläuft analog zur Herleitung der Feldgleichungen, beschränkt auf den V_{\parallel} -Term. Die Variationen von $g_{\alpha\beta}$ bzw. ϑ^α werden durch die entsprechenden Lie-Ableitungen ersetzt. Dies ist möglich, da beide linear sind und die gerade Leibniz-Regel erfüllen. Die Lie-Ableitung der Metrikkomponenten $\mathcal{L}_\xi g_{\alpha\beta}$ verschwindet, wenn wir die Nebenbedingungen (2.14e) als gültig annehmen:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi g_{\alpha\beta} &= v \rfloor D g_{\alpha\beta} + D \left(\underbrace{v \rfloor g_{\alpha\beta}} \right) = -v \rfloor Q_{\alpha\beta} \cong 0 . \quad (2.21) \\ &= 0, \text{ da } g_{\alpha\beta} \text{ Funktion} \end{aligned}$$

Mit dem Symbol \cong bezeichnen wir sogenannte *schwache Identitäten*, die nur bei Erfüllung gewisser Feldgleichungen bzw. Nebenbedingungen gültig sind.

Bei der Herleitung der Feldgleichungen entstehen durch die Vertauschbarkeit von δ und d , nicht aber von δ und D , zusätzliche $\delta \Gamma_\alpha^\beta$ -Terme. Die kovariante Lie-Ableitung \mathcal{L}_ξ vertauscht weder mit der äußeren Ableitung d noch mit der kovarianten Ableitung D . Aufgrund dieses Unterschiedes kann der $\delta \Gamma_\alpha^\beta$ -Term nicht durch den

2.3. Noether-Identitäten

korrekten $\mathcal{L}_\xi \Gamma_\alpha^\beta$ -Term ersetzt werden. Stattdessen leiten wir durch Betrachtung des Kommutators von \mathcal{L} und D eine formale Ersetzung des $\delta \Gamma_\alpha^\beta$ -Terms her:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi D\psi^\alpha &= \xi \rfloor DD\psi^\alpha + D(\xi \rfloor D\psi^\alpha) \\ &\stackrel{(1.16)}{=} \xi \rfloor (R_\beta^\alpha \wedge \psi^\beta) + D(\xi \rfloor D\psi^\alpha) + DD(\xi \rfloor \psi^\alpha) - R_\beta^\alpha \wedge (\xi \rfloor \psi^\beta) \\ &= D\mathcal{L}_\xi \psi^\alpha + (\xi \rfloor R_\beta^\alpha) \wedge \psi^\beta . \end{aligned}$$

ANMERKUNG: Die Lie-Ableitung der Konnexion lautet

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi \Gamma_\alpha^\beta &= \xi \rfloor D\Gamma_\alpha^\beta + D(\xi \rfloor \Gamma_\alpha^\beta) = \xi \rfloor R_\alpha^\beta - \xi \rfloor (\Gamma_\alpha^\gamma \wedge \Gamma_\gamma^\beta) \\ &\quad + d(\xi \rfloor \Gamma_\alpha^\beta) - \Gamma_\alpha^\gamma \wedge (\xi \rfloor \Gamma_\gamma^\beta) + \Gamma_\gamma^\beta \wedge (\xi \rfloor \Gamma_\alpha^\gamma) = \xi \rfloor R_\alpha^\beta + d(\xi \rfloor \Gamma_\alpha^\beta) . \end{aligned}$$

Da $[d, \delta] = 0$, muß hierzu noch

$$[\mathcal{L}_\xi, d] = -d(\xi \rfloor \Gamma_\alpha^\beta)$$

addiert werden, um die korrekte formale Ersetzung $\delta \Gamma_\alpha^\beta \rightarrow \xi \rfloor R_\alpha^\beta$ zu finden.

Des weiteren können wir die exakten Terme in Gleichung (2.13b) nicht vernachlässigen. Wir setzen daher in Gleichung (2.13a) die Lagrange-Multiplikatoren λ^α_β und $\mu^{\alpha\beta}$ und den Materie-Lagrangian L_{Materie} gleich Null, und ersetzen die Variationen gemäß

$$\delta g_{\alpha\beta} \rightarrow -\xi \rfloor Q_{\alpha\beta} , \quad \delta \vartheta^\alpha \rightarrow \mathcal{L}_\xi \vartheta^\alpha = \xi \rfloor D\vartheta^\alpha + D(\xi \rfloor \vartheta^\alpha) , \quad \delta \Gamma_\alpha^\beta \rightarrow \xi \rfloor R_\alpha^\beta .$$

Damit ergibt sich unter Beachtung, daß der Eich-Lagrangian V_\parallel eine skalarwertige 4-Form ist:

$$\begin{aligned} d(\xi \rfloor V_\parallel) &= \mathcal{L}_\xi V_\parallel = -(\xi \rfloor Q_{\alpha\beta}) \wedge \frac{\partial V_\parallel}{\partial g_{\alpha\beta}} + (\xi \rfloor D\vartheta^\alpha + D(\xi \rfloor \vartheta^\alpha)) \wedge \frac{\partial V_\parallel}{\partial \vartheta^\alpha} \\ &\quad + D(\xi \rfloor D\vartheta^\alpha + D(\xi \rfloor \vartheta^\alpha)) \wedge \frac{\partial V_\parallel}{\partial D\vartheta^\alpha} + (\xi \rfloor R_\alpha^\beta) \wedge \left(\vartheta^\alpha \wedge \frac{\partial V_\parallel}{\partial D\vartheta^\beta} \right) \\ &= d\left((\xi \rfloor \vartheta^\alpha) \wedge \frac{\partial V_\parallel}{\partial \vartheta^\alpha} + (\xi \rfloor D\vartheta^\alpha) \wedge \frac{\partial V_\parallel}{\partial D\vartheta^\alpha} \right) \\ &\quad - (\xi \rfloor \vartheta^\alpha) \wedge D \frac{\partial V_\parallel}{\partial \vartheta^\alpha} + (\xi \rfloor D\vartheta^\alpha) \wedge \left(\frac{\partial V_\parallel}{\partial \vartheta^\alpha} + D \frac{\partial V_\parallel}{\partial D\vartheta^\alpha} \right) \\ &\quad + \xi \rfloor \left(R_\beta^\alpha \wedge \vartheta^\beta \right) \wedge \frac{\partial V_\parallel}{\partial D\vartheta^\alpha} - (\xi \rfloor Q_{\alpha\beta}) \wedge \frac{\partial V_\parallel}{\partial g_{\alpha\beta}} \tag{2.22} \\ &\stackrel{\text{Nebenbed. (2.14e)}}{\cong} d\left((\xi \rfloor \vartheta^\alpha) \wedge E_\alpha - (\xi \rfloor D\vartheta^\alpha) \wedge H_\alpha \right) \\ &\quad - (\xi \rfloor \vartheta^\alpha) \wedge DE_\alpha + (\xi \rfloor D\vartheta^\alpha) \wedge (E_\alpha - DH_\alpha) . \end{aligned}$$

Diese Gleichung nimmt die Form $A + dB = 0$ an, wobei $A = \xi^\alpha A_\alpha$ und $B = \xi^\alpha B_\alpha$. Daher gilt

$$\xi^\alpha \wedge (A_\alpha + dB_\alpha) + d\xi^\alpha \wedge B_\alpha = 0 .$$

Der Term B_α muß gleich Null sein, falls lokale Translationen eine Symmetrie bilden und entsprechend muß der Term $A_\alpha + dB_\alpha$ verschwinden, wenn die globale Translation mit konstantem ξ eine Symmetrie ist.

Für den Fall, daß die Nebenbedingungen (2.14e) erfüllt sind, können wir mit $\xi = \xi^\alpha e_\alpha$ erkennen, daß für Translationsinvarianz die beiden folgenden Bedingungen gelten müssen:

$$e_\alpha \lrcorner V_{\parallel} = \frac{\partial V_{\parallel}}{\partial \vartheta^\alpha} + (e_\alpha \lrcorner D\vartheta^\beta) \wedge \frac{\partial V_{\parallel}}{\partial D\vartheta^\beta}, \quad (2.23a)$$

dies ist sozusagen eine Kettenregel, und die *1. Noether-Identität*

$$D \frac{\partial V_{\parallel}}{\partial \vartheta^\alpha} \cong (e_\alpha \lrcorner D\vartheta^\beta) \wedge \frac{\delta V_{\parallel}}{\delta \vartheta^\beta} \iff DE_\alpha \cong (e_\alpha \lrcorner D\vartheta^\beta) \wedge (E_\beta - DH_\beta). \quad (2.23b)$$

Entsprechende Identitäten, ergänzt um die Terme der Materiefelder, gelten für den Materie-Lagrangian bei Erfüllung der Nebenbedingungen (2.14e):

$$\begin{aligned} e_\alpha \lrcorner L_{\text{Materie}} &= \frac{\partial L_{\text{Materie}}}{\partial \vartheta^\alpha} + (e_\alpha \lrcorner D\vartheta^\beta) \wedge \frac{\partial L_{\text{Materie}}}{\partial D\vartheta^\beta} \\ &\quad + (e_\alpha \lrcorner \Psi) \wedge \frac{\partial L_{\text{Materie}}}{\partial \Psi} + (e_\alpha \lrcorner D\Psi) \wedge \frac{\partial L_{\text{Materie}}}{\partial D\Psi} \end{aligned} \quad (2.23c)$$

und

$$\begin{aligned} (-1)^p (e_\alpha \lrcorner \Psi) \wedge D \frac{\partial L_{\text{Materie}}}{\partial \Psi} + D \frac{\partial L_{\text{Materie}}}{\partial \vartheta^\alpha} \\ \cong (e_\alpha \lrcorner D\vartheta^\beta) \wedge \frac{\delta V_{\parallel}}{\delta \vartheta^\beta} + (e_\alpha \lrcorner D\Psi) \wedge \frac{\delta L_{\text{Materie}}}{\delta \Psi}. \end{aligned} \quad (2.23d)$$

Überprüfung der 1. Noether-Identität für den Teleparallelismus-Lagrangian

Wir rechnen nun nach, daß unsere errechneten E_α (2.18b) und H_α (2.18a) die beiden Identitäten (2.23a) und (2.23b) des Eich-Lagrangians tatsächlich erfüllen.

BEWEIS: Wir zeigen zunächst, daß die Gleichung (2.23a) erfüllt ist:

$$\begin{aligned} 2\ell^2 \left(e_\beta \lrcorner V_{\parallel} - \frac{\partial V_{\parallel}}{\partial \vartheta^\beta} \right) \\ = e_\beta \lrcorner \left(\rho_2 D\vartheta^\gamma \wedge \vartheta_\gamma \wedge \star (D\vartheta^\delta \wedge \vartheta_\delta) + \rho_4 D\vartheta^\gamma \wedge \vartheta_\delta \wedge \star (\vartheta_\gamma \wedge D\vartheta^\delta) \right. \\ \quad \left. + \rho_1 D\vartheta^\gamma \wedge \star D\vartheta_\gamma \right) + \rho_1 (e_\beta \lrcorner D\vartheta^\gamma) \wedge \star D\vartheta_\gamma - \rho_1 D\vartheta^\gamma \wedge (e_\beta \lrcorner \star D\vartheta_\gamma) \\ \quad - \rho_2 D\vartheta_\beta \wedge \star (D\vartheta^\gamma \wedge \vartheta_\gamma) + \rho_2 (e_\beta \lrcorner D\vartheta^\delta) \wedge \vartheta_\delta \wedge \star (D\vartheta^\gamma \wedge \vartheta_\gamma) \\ \quad - \rho_4 D\vartheta^\gamma \wedge \star (\vartheta_\gamma \wedge D\vartheta_\beta) - \rho_4 \vartheta_\gamma \wedge (e_\beta \lrcorner D\vartheta^\delta) \wedge \star (D\vartheta^\gamma \wedge \vartheta_\delta) \\ \quad \left. + \rho_2 D\vartheta^\gamma \wedge \vartheta_\gamma \wedge \star (D\vartheta^\delta \wedge \vartheta_\delta \wedge \vartheta_\beta) + \rho_4 D\vartheta^\gamma \wedge \vartheta_\delta \wedge \star (\vartheta_\gamma \wedge D\vartheta^\delta \wedge \vartheta_\beta) \right) \end{aligned}$$

2.3. Noether-Identitäten

$$\begin{aligned}
&\stackrel{\text{(B.7c)}}{=} 2\rho_1 (e_\beta \rfloor D\vartheta^\gamma) \wedge \star D\vartheta_\gamma \\
&\quad + \rho_2 (e_\beta \rfloor D\vartheta^\gamma) \wedge \vartheta_\gamma \wedge \star (D\vartheta^\delta \wedge \vartheta_\delta) - \rho_2 D\vartheta^\gamma \wedge \vartheta_\gamma \wedge \star (D\vartheta^\delta \wedge \vartheta_\delta \wedge \vartheta_\beta) \\
&\quad + \rho_4 (e_\beta \rfloor D\vartheta^\gamma) \wedge \vartheta_\delta \wedge \star (\vartheta_\gamma \wedge D\vartheta^\delta) - \rho_4 D\vartheta^\gamma \wedge \vartheta_\delta \wedge \star (\vartheta_\gamma \wedge D\vartheta^\delta \wedge \vartheta_\beta) \\
&\quad + \rho_2 (e_\beta \rfloor D\vartheta^\delta) \wedge \vartheta_\delta \wedge \star (D\vartheta^\gamma \wedge \vartheta_\gamma) - \rho_4 \vartheta_\gamma \wedge (e_\beta \rfloor D\vartheta^\delta) \wedge \star (D\vartheta^\gamma \wedge \vartheta_\delta) \\
&\quad + \rho_2 D\vartheta^\gamma \wedge \vartheta_\gamma \wedge \star (D\vartheta^\delta \wedge \vartheta_\delta \wedge \vartheta_\beta) + \rho_4 D\vartheta^\gamma \wedge \vartheta_\delta \wedge \star (\vartheta_\gamma \wedge D\vartheta^\delta \wedge \vartheta_\beta) .
\end{aligned}$$

Hier heben sich zweimal je zwei Terme gegeneinander weg, und zweimal können je zwei Terme addiert werden, wenn man (B.4c) beachtet und die toten Indizes umbenennet. Somit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
2\ell^2 \left(e_\beta \rfloor V_{\parallel} - \frac{\partial V_{\parallel}}{\partial \vartheta^\beta} \right) &= 2\rho_1 (e_\beta \rfloor D\vartheta^\gamma) \wedge \star D\vartheta_\gamma \\
&\quad + 2\rho_2 (e_\beta \rfloor D\vartheta^\gamma) \wedge \vartheta_\gamma \wedge \star (D\vartheta^\delta \wedge \vartheta_\delta) + 2\rho_4 (e_\beta \rfloor D\vartheta^\gamma) \wedge \vartheta_\delta \wedge \star (\vartheta_\gamma \wedge D\vartheta^\delta) \\
&= 2\ell^2 (e_\beta \rfloor D\vartheta^\alpha) \wedge \frac{\partial V_{\parallel}}{\partial D\vartheta^\alpha} . \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Nun zur 1. Noether-Identität (2.23b):

BEWEIS: Wir rechnen diese Identität nur für den Fall $\rho_2 = \rho_4 = 0$ nach, da bereits an den ρ_1 -Termen das Prinzip erkennbar wird. Die anderen Terme sind analog berechenbar. Die vollständige 1. Noether-Identität haben wir u. a. mit Computeralgebra-Programmen getestet, vgl. Seite 42 und insbesondere Anhang D ab Seite 91.

Unter den Nebenbedingungen (2.14e) erhält man nach Einsetzen der Größen E_α (2.18b) und H_α (2.18a) die 1. Noether-Identität für den ρ_1 -Term:

$$\begin{aligned}
0 \stackrel{\text{zu zeigen}}{=} &- D(e_\alpha \rfloor D\vartheta^\gamma) \wedge \star D\vartheta_\gamma + D(e_\alpha \rfloor \star D\vartheta^\gamma) \wedge D\vartheta_\gamma - (e_\alpha \rfloor D\vartheta^\gamma) \wedge D \star D\vartheta_\gamma \\
&+ (e_\alpha \rfloor D\vartheta^\beta) \wedge (e_\beta \rfloor D\vartheta^\gamma) \wedge \star D\vartheta_\gamma - (e_\alpha \rfloor D\vartheta^\beta) \wedge (e_\beta \rfloor \star D\vartheta^\gamma) \wedge D\vartheta_\gamma .
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Bevor wir hiermit weiterrechnen, notieren wir kurz (wobei ψ eine beliebige p -Form):

$$(e_\alpha \rfloor D\vartheta^\beta) \wedge (e_\beta \rfloor \psi) \stackrel{D(e_\alpha \rfloor \vartheta^\beta) = D\delta_\alpha^\beta = 0}{=} (\mathcal{L}_{e_\alpha} \vartheta^\beta) \wedge (e_\beta \rfloor \psi) . \tag{2.25}$$

Wir isolieren in (2.24) durch Anwenden der Regeln (B.7c) und (B.11c) jeweils den Ausdruck $D\vartheta_\gamma$. Mit der Definition von \mathcal{L}_{e_α} und der eben notierten Regel (2.25) erhalten wir

$$\begin{aligned}
D\vartheta_\gamma \wedge \left[- \star (De_\alpha \rfloor D\vartheta^\gamma) + D(e_\alpha \rfloor \star D\vartheta^\gamma) + e_\alpha \rfloor (D \star D\vartheta^\gamma) \right. \\
\left. + \star \left((e_\alpha \rfloor D\vartheta^\beta) \wedge (e_\beta \rfloor D\vartheta^\gamma) \right) - (e_\alpha \rfloor D\vartheta^\beta) \wedge (e_\beta \rfloor \star D\vartheta^\gamma) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \stackrel{\text{Nebenbed.}}{=} \stackrel{(2.14e)}{=} D\vartheta_\gamma \wedge \left[-{}^* \mathcal{L}_{e_\alpha} D\vartheta^\gamma + \mathcal{L}_{e_\alpha} {}^* D\vartheta^\gamma \right. \\
 \left. + {}^* \left((\mathcal{L}_{e_\alpha} \vartheta^\beta) \wedge (e_\beta] D\vartheta^\gamma) \right) - (\mathcal{L}_{e_\alpha} \vartheta^\beta) \wedge (e_\beta] {}^* D\vartheta^\gamma \right].
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

In der Klammer steht die Regel (C.12b) aus Anhang C. Diese gilt auch für die Lie-Ableitung \mathcal{L}_ξ , da die Lie-Ableitung nur die Voraussetzung $[\delta, d] = 0$ nicht erfüllt, diese aber bei der Herleitung von (C.12b) nicht benutzt wurde. Die Terme mit der Variation nach der Metrik treten bei der Lie-Ableitung aufgrund Gleichung (2.21) und der Nebenbedingung $Q_{\alpha\beta} = 0$ nicht auf. Da also die Klammer in (2.26) verschwindet, ist somit die 1. Noether-Identität für den ρ_1 -Term gezeigt; der Beweis für die Terme der beiden anderen Rumpf-Koeffizienten verläuft analog. ■

Somit ist überprüft, daß der Eich-Lagrangian des Teleparallelismus translationsinvariant ist.

2.3.2. Invarianz bezüglich linearer Abbildungen

Herleitung der 2. Noether-Identität

Die Herleitung der Noether-Identität, die zur Invarianz unter Transformationen der Gruppe $GL(\mathbb{R}^4)$ gehört, kann man exakt analog zu der Noether-Identität der Translationsinvarianz durchführen. Da die lineare Abbildung ω_α^β nicht mit der äußeren Ableitung vertauscht, müssen wir auch hier in Gleichung (2.13a) das $\delta\Gamma_\alpha^\beta$ formal ersetzen.

Da das Eichpotential Γ_α^β der Eichung der linearen Gruppe unverändert in unseren Lagrangian eingeht (anders als bei ϑ^α), können wir die Ersetzungen der Variation direkt aus den Eichtransformationen aus den Abschnitten 1.2.2 bis 1.2.5 übernehmen, siehe Gleichungen (1.21b), (1.23) und (1.24):

$$\delta\vartheta^\alpha \rightarrow -\omega_\beta^\alpha \vartheta^\beta, \quad \delta\Gamma_\beta^\alpha \rightarrow D\omega_\beta^\alpha, \quad \delta g_{\alpha\beta} \rightarrow \omega_{\alpha\beta} + \omega_{\beta\alpha}.$$

Um die Noether-Identität des Eich-Lagrangians zu erhalten, setzen wir diese Transformationen in (2.13a) ein, wobei wir zusätzlich die Lagrange-Multiplikatoren $\lambda^{\alpha\beta}$ und $\mu^{\alpha\beta}$ und den Materie-Lagrangian L_{Materie} gleich Null setzen. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 \delta V_\parallel = (\omega_{\alpha\beta} + \omega_{\beta\alpha}) \wedge \frac{\partial V_\parallel}{\partial g_{\alpha\beta}} - \omega_\beta^\alpha \vartheta^\beta \wedge \frac{\partial V_\parallel}{\partial \vartheta^\alpha} + D \left(-\omega_\beta^\alpha \vartheta^\beta \right) \wedge \frac{\partial V_\parallel}{\partial D\vartheta^\alpha} \\
 + D\omega_\beta^\alpha \wedge \vartheta^\beta \wedge \frac{\partial V_\parallel}{\partial D\vartheta^\alpha}.
 \end{aligned}$$

Die ungerade Leibniz-Regel (B.7c) und die Tatsache, daß $\frac{\partial V_\parallel}{\partial g_{\alpha\beta}}$ symmetrisch ist, führt zu

$$\delta V_\parallel = \omega^{\beta\alpha} \left(2 \frac{\partial V_\parallel}{\partial g^{\alpha\beta}} - \vartheta_\beta \wedge \frac{\partial V_\parallel}{\partial \vartheta^\alpha} - D\vartheta^\beta \wedge \frac{\partial V_\parallel}{\partial D\vartheta^\alpha} \right).$$

2.3. Noether-Identitäten

Da dies für beliebige $\omega^{\beta\alpha}$ gelten muß, ergibt sich damit die 2. Noether-Identität

$$-m_{\beta\alpha} + \vartheta_\beta \wedge E_\alpha - D\vartheta_\beta \wedge H_\alpha = 0. \quad (2.27a)$$

Anders als bei den Noether-Identitäten zur Translationsinvarianz tritt bei der Herleitung kein Term auf, der $d\omega_\alpha^\beta$ enthält. Die lokale Symmetrie unter linearen Abbildungen ist also automatisch erfüllt. Dies liegt gerade an der Tatsache, daß hier das zugehörige Eichpotential Γ_α^β direkt in den Lagrangian eingeht und für lokale Invarianz unter $GL(\mathbb{R}^4)$ sorgt. Das Eichpotential der Translationsinvarianz hingegen geht nur über die Modifikation (1.22) in den Lagrangian ein, so daß dort noch die Identität (2.23a) erfüllt sein muß.

Eine entsprechende 2. Noether-Identität, ergänzt um die Terme der Materiefelder, gilt für den Materie-Lagrangian:

$$-\sigma_{\beta\alpha} + \vartheta_\beta \wedge \Sigma_\alpha + D\Delta_{\beta\alpha} = -(L_{\beta\alpha}\Psi) \wedge \frac{\delta L_{\text{Materie}}}{\delta \Psi}, \quad (2.27b)$$

wobei der formale Ausdruck $L_{\beta\alpha}\Psi$ unspezifiziert bleibt, da wir die Materie nicht näher festlegen wollen.

Überprüfung der 2. Noether-Identität für den Teleparallelismus-Lagrangian

Wir rechnen dies für den Eich-Lagrangian des Teleparallelismus (2.8) nach, wobei wir für H_α Gleichung (2.18a) und für $m_{\alpha\beta}$ Gleichung (2.20) einsetzen und E_α direkt aus (2.17) ablesen:

$$\begin{aligned} & 2\ell^2 \left(-m^{\alpha\beta} - D\vartheta^\alpha \wedge H^\beta + \vartheta^\alpha \wedge E^\beta \right) \\ &= -4\rho_2 \left(D\vartheta^{(\alpha} \wedge \vartheta^{\beta)} \right) \wedge \star (D\vartheta^\gamma \wedge \vartheta_\gamma) - 4\rho_4 \left(D\vartheta^{(\alpha} \wedge \vartheta^\gamma \right) \wedge \star (D\vartheta_\gamma \wedge \vartheta^{|\beta)}) \\ &\quad - 2\rho_1 D\vartheta^\alpha \wedge \star D\vartheta^\beta + \rho_1 g^{\alpha\beta} D\vartheta^\gamma \wedge \star D\vartheta_\gamma \\ &\quad + \rho_2 g^{\alpha\beta} D\vartheta^\gamma \wedge \vartheta_\gamma \wedge \star (D\vartheta^\delta \wedge \vartheta_\delta) + \rho_4 g^{\alpha\beta} D\vartheta^\gamma \wedge \vartheta_\delta \wedge \star (\vartheta_\gamma \wedge D\vartheta^\delta) \\ &\quad - 2\rho_1 D\vartheta^\gamma \wedge \vartheta^\alpha \wedge e^\beta \rfloor (\star D\vartheta_\gamma) - 2\rho_2 (D\vartheta^\gamma \wedge \vartheta_\gamma) \wedge \vartheta^\alpha \wedge e^\beta \rfloor \star (D\vartheta^\delta \wedge \vartheta_\delta) \\ &\quad - 2\rho_4 (D\vartheta^\gamma \wedge \vartheta^\delta) \wedge \vartheta^\alpha \wedge e^\beta \rfloor \star (D\vartheta_\delta \wedge \vartheta_\gamma) + 2\rho_1 D\vartheta^\alpha \wedge \star D\vartheta^\beta \\ &\quad + 2\rho_2 D\vartheta^\alpha \wedge \vartheta^\beta \wedge \star (D\vartheta^\gamma \wedge \vartheta_\gamma) + 2\rho_4 D\vartheta^\alpha \wedge \vartheta_\gamma \wedge \star (\vartheta^\beta \wedge D\vartheta^\gamma) \\ &\quad + 2\rho_2 \vartheta^\alpha \wedge D\vartheta^\beta \wedge \star (D\vartheta^\gamma \wedge \vartheta_\gamma) - \rho_2 \vartheta^\alpha \wedge D\vartheta^\delta \wedge \vartheta_\delta \wedge (e^\beta \rfloor \star (D\vartheta^\gamma \wedge \vartheta_\gamma)) \\ &\quad + 2\rho_4 \vartheta^\alpha \wedge D\vartheta^\gamma \wedge \star (\vartheta_\gamma \wedge D\vartheta^\beta) - \rho_4 \vartheta^\alpha \wedge D\vartheta^\delta \wedge \vartheta_\gamma \wedge (e^\beta \rfloor \star (\vartheta_\delta \wedge D\vartheta^\gamma)) \\ &\quad + \rho_1 \vartheta^\alpha \wedge D\vartheta^\gamma \wedge (e^\beta \rfloor \star D\vartheta_\gamma) - \rho_2 \vartheta^\alpha \wedge (e^\beta \rfloor (D\vartheta^\gamma \wedge \vartheta_\gamma)) \wedge \star (D\vartheta^\delta \wedge \vartheta_\delta) \\ &\quad - \rho_1 \vartheta^\alpha \wedge (e^\beta \rfloor D\vartheta_\gamma) \wedge \star D\vartheta^\gamma - \rho_4 \vartheta^\alpha \wedge (e^\beta \rfloor (\vartheta_\delta \wedge D\vartheta^\gamma)) \wedge \star (D\vartheta^\delta \wedge \vartheta_\gamma) \end{aligned}$$

Wenn man die Symmetrisierung ausschreibt und Regel (B.11c) beachtet, heben sich alle Terme, die kein e^β und kein $g^{\alpha\beta}$ enthalten, gegeneinander weg. Also ist der Ausdruck

$$\begin{aligned}
 &= \rho_2 g^{\alpha\beta} D\vartheta^\gamma \wedge \vartheta_\gamma \wedge \star \left(D\vartheta^\delta \wedge \vartheta_\delta \right) + \rho_4 g^{\alpha\beta} D\vartheta^\gamma \wedge \vartheta_\delta \wedge \star \left(\vartheta_\gamma \wedge D\vartheta^\delta \right) \\
 &\quad + \rho_1 g^{\alpha\beta} D\vartheta^\gamma \wedge \star D\vartheta_\gamma - 2\rho_2 \left(D\vartheta^\gamma \wedge \vartheta_\gamma \right) \wedge \vartheta^\alpha \wedge e^\beta \rfloor \star \left(D\vartheta^\delta \wedge \vartheta_\delta \right) \\
 &\quad - 2\rho_1 D\vartheta^\gamma \wedge \vartheta^\alpha \wedge e^\beta \rfloor \left(\star D\vartheta_\gamma \right) - 2\rho_4 \left(D\vartheta^\gamma \wedge \vartheta^\delta \right) \wedge \vartheta^\alpha \wedge e^\beta \rfloor \star \left(D\vartheta_\delta \wedge \vartheta_\gamma \right) \\
 &\quad - \rho_2 \vartheta^\alpha \wedge D\vartheta^\delta \wedge \vartheta_\delta \wedge \left(e^\beta \rfloor \star \left(D\vartheta^\gamma \wedge \vartheta_\gamma \right) \right) \\
 &\quad - \rho_4 \vartheta^\alpha \wedge D\vartheta^\delta \wedge \vartheta_\gamma \wedge \left(e^\beta \rfloor \star \left(\vartheta_\delta \wedge D\vartheta^\gamma \right) \right) \\
 &\quad + \rho_1 \vartheta^\alpha \wedge D\vartheta^\gamma \wedge \left(e^\beta \rfloor \star D\vartheta_\gamma \right) - \rho_2 \vartheta^\alpha \wedge \left(e^\beta \rfloor \left(D\vartheta^\gamma \wedge \vartheta_\gamma \right) \right) \wedge \star \left(D\vartheta^\delta \wedge \vartheta_\delta \right) \\
 &\quad - \rho_1 \vartheta^\alpha \wedge \left(e^\beta \rfloor D\vartheta_\gamma \right) \wedge \star D\vartheta^\gamma - \rho_4 \vartheta^\alpha \wedge \left(e^\beta \rfloor \left(\vartheta_\delta \wedge D\vartheta^\gamma \right) \right) \wedge \star \left(D\vartheta^\delta \wedge \vartheta_\gamma \right) \\
 &\stackrel{(B.4c)}{=} \rho_2 g^{\alpha\beta} D\vartheta^\gamma \wedge \vartheta_\gamma \wedge \star \left(D\vartheta^\delta \wedge \vartheta_\delta \right) + \rho_4 g^{\alpha\beta} D\vartheta^\gamma \wedge \vartheta_\delta \wedge \star \left(\vartheta_\gamma \wedge D\vartheta^\delta \right) \\
 &\quad + \rho_1 g^{\alpha\beta} D\vartheta^\gamma \wedge \star D\vartheta_\gamma + \rho_2 \vartheta^\alpha \wedge \left(D\vartheta^\gamma \wedge \vartheta_\gamma \right) \wedge e^\beta \rfloor \star \left(D\vartheta^\delta \wedge \vartheta_\delta \right) \\
 &\quad - \rho_1 \vartheta^\alpha \wedge D\vartheta^\gamma \wedge e^\beta \rfloor \left(\star D\vartheta_\gamma \right) + \rho_4 \vartheta^\alpha \wedge \left(D\vartheta^\gamma \wedge \vartheta^\delta \right) \wedge e^\beta \rfloor \star \left(D\vartheta_\delta \wedge \vartheta_\gamma \right) \\
 &\quad - \rho_2 \vartheta^\alpha \wedge \left(e^\beta \rfloor \left(D\vartheta^\gamma \wedge \vartheta_\gamma \right) \right) \wedge \star \left(D\vartheta^\delta \wedge \vartheta_\delta \right) \\
 &\quad - \rho_1 \vartheta^\alpha \wedge \left(e^\beta \rfloor D\vartheta_\gamma \right) \wedge \star D\vartheta^\gamma - \rho_4 \vartheta^\alpha \wedge \left(e^\beta \rfloor \left(\vartheta_\delta \wedge D\vartheta^\gamma \right) \right) \wedge \star \left(D\vartheta^\delta \wedge \vartheta_\gamma \right) \\
 &\stackrel{(B.7c)}{=} 0.
 \end{aligned}$$

Hierbei wurde für die letzte Gleichheit Regel (B.7c) auf die letzten drei Terme angewandt und $e^\beta \rfloor \vartheta^\alpha = g^{\beta\alpha}$ benutzt.

Somit bestätigt sich auch die Lorentz-Invarianz unseres Eich-Lagrangians V_{\parallel} .

Auswirkung auf die Feldgleichungen

Nachdem wir die 2. Noether-Identitäten (2.27a) und (2.27b) für den Eich-Lagrangian bzw. den Materie-Lagrangian hergeleitet haben, erkennen wir, daß die symmetrischen Anteile dieser Identitäten der linken bzw. rechten Seite der Feldgleichung (2.16a) entsprechen, wenn die Materiefeldgleichung (2.14d) erfüllt ist. Also wird die Feldgleichung für die Metrikkomponenten $g_{\alpha\beta}$ durch die Invarianz des Lagrangians unter linearen Abbildungen automatisch erfüllt, wenn die Materie-Feldgleichung bereits erfüllt ist. Die Feldgleichung (2.16a) erweist sich damit als *redundant*.

Auch der antisymmetrische Teil der 2. Noether-Identitäten steht mit einer Feldgleichung in Verbindung, wenn die erste Feldgleichung (2.16b) und die Nebenbedingungen (2.14e) erfüllt sind. Um dies zu sehen, wenden wir auf die zweite Feldgleichung

2.4. Unterschiedliche Konnexionen

chung (2.16c) die kovariante Ableitung an:

$$D \left(\vartheta^{[\alpha} \wedge H^{\beta]} \right) - DD\lambda^{[\alpha\beta]} = D\tau^{\alpha\beta} = D\Delta^{[\alpha\beta]}$$

$$\stackrel{(2.16b),}{\stackrel{(2.14e)}{\implies}} D\vartheta^{[\alpha} \wedge H^{\beta]} - \vartheta^{[\alpha} \wedge E^{\beta]} = D\Delta^{[\alpha\beta]} + \vartheta^{[\alpha} \wedge \Sigma^{\beta]} .$$

Bei erfüllter Materiefeldgleichung (2.14d) ergeben sich also die antisymmetrischen Anteile der 2. Noether-Identitäten (2.27a) und (2.27b).

Da also die Feldgleichung (2.16c) die Feldgrößen nicht über die Noether-Identitäten hinausgehend festlegt, erweist sie sich somit als (nicht-eindeutige) Bestimmungsgleichung für den Lagrangemultiplikator $\lambda^{\alpha\beta}$, der für das Verschwinden der Krümmung sorgt.

Überprüfung der Noether-Identitäten mit Computeralgebra-Programmen

Da wir uns im Abschnitt 2.6 mit Lösungen einer speziellen teleparallelen Theorie beschäftigt haben und wir die Lösungen mit Computeralgebra-Programmen überprüften, standen uns verschiedene Ansätze für Lösungskobasisfelder zur Verfügung. Diese Ansätze erfüllen noch nicht die Feldgleichungen, so daß sie zum Testen von starken Identitäten geeignet sind.

Wir haben solche Tests für die Kettenregel (2.23a) und die Noether-Identitäten (2.23b) und (2.27a) durchgeführt, wobei wir nochmals überprüfen konnten, daß wir uns bei den Größen E_α (2.18b), H_α (2.18a) und $m^{\alpha\beta}$ (2.20) nicht verrechnet haben. Insbesondere war es möglich, da einige Ansätze die Nebenbedingung verschwindender Krümmung noch nicht erfüllen (allerdings verschwindet die Nichtmetrizität), die starke 1. Noether-Identität, die man aus (2.22) ablesen kann, für beliebige Rumpf-Koeffizienten zu testen. Die einzelnen Computeralgebra-Programme haben wir in Anhang D ab Seite 91 abgedruckt.

2.4. Unterschiedliche Konnexionen

Bei der Herleitung der 2. Noether-Identität haben wir gesehen, daß der Teleparallelismus-Lagrangian (2.8) automatisch lokal Lorentz-invariant ist. Diese Eigenschaft resultiert aus der Verwendung der kovarianten Ableitung im Lagrangian. Wir wollen nun untersuchen, ob man unter bestimmten Umständen die kovariante Ableitung im Lagrangian durch die äußere Ableitung ersetzen kann, also die implizite Abhängigkeit von der Konnexion Γ_α^β aus dem Lagrangian eliminieren kann.

Im Abschnitt 1.3.1 (Seite 17) hatten wir festgestellt, daß der allgemeine MAG-Lagrangian, insbesondere also der Teleparallelismus-Lagrangian, nicht explizit von der Konnexion Γ_α^β abhängt, da man sie nach [Ha95] punktweise (bzw. nach [Il97] sogar entlang von Kurven) zum Verschwinden bringen kann, indem man die Kobasis an jedem Punkt geeignet dreht.

Im Teleparallelismus kann man nun sogar eine Kobasis $\vartheta^{\tilde{\alpha}}$ finden, in der die Konnexion global verschwindet:

$$\Gamma_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}^{\tilde{\gamma}} \equiv 0 .$$

Dazu dreht man die Kobasis an einem beliebigen Punkt so, daß die Konnexion an diesem Punkt verschwindet. Da die Parallelverschiebung im Teleparallelismus wegunabhängig ist, kann man nun die gedrehte Kobasis eindeutig parallel verschieben. Das so erhaltene Kobasisfeld $\vartheta^{\tilde{\alpha}}$ ist also automatisch parallel, so daß die Konnexion bezüglich dieser Kobasis überall verschwindet.

Wir können nun fordern, daß die parallelen Kobasisfelder und die zugehörigen Basisfelder eine bestimmte Form annehmen und so spezielle teleparallele Theorien auszeichnen.

2.4.1. Spezielle Konnexionswahlen

Flache Konnexion

Eine spezielle Konnexion $\bar{\Gamma}_{\alpha}^{\beta}$ wählen wir aus, indem wir verlangen, daß die holonomen Basisfelder ∂_i parallel sind:

$$\bar{\nabla}_{\partial_i} (\partial_j) = 0 ,$$

also

$$\bar{\Gamma}_{ij}{}^k \equiv 0 .$$

Natürlich verschwindet die Krümmung $\bar{R}_{ikl}{}^m$ in holonomen Koordinaten,

$$\bar{R}_{ikl}{}^m \equiv 2\partial_{[i}\bar{\Gamma}_{k]l}{}^m + 2\bar{\Gamma}_{[i|n}{}^m\bar{\Gamma}_{|k]l}{}^n = 0 ,$$

und daher, weil die Krümmung ein Tensor ist, bezüglich beliebiger Basisfelder.

Auch die Torsion verschwindet:

$$\bar{T}_{ij}{}^k \equiv 2\partial_{[i}\delta_{j]}^k + 2\bar{\Gamma}_{[i|l}{}^k\delta_{|j]}^l = 0 ,$$

wiederum bezüglich beliebiger Basisfelder, weil die Torsion ebenfalls ein Tensor ist.

Obige Forderung beschränkt eine teleparallele Theorie also auf den speziellen Fall des Teleparallelismus eines flachen Raums. Wir nennen die Konnexion $\bar{\Gamma}_{\alpha}^{\beta}$ daher *flache Konnexion*.

Wir geben nun noch die flache Konnexion bezüglich einer beliebigen Kobasis ϑ^{α} an. Dazu:

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{e_i^{\alpha}e_{\alpha}} (e_j^{\beta}e_{\beta}) &= e_i^{\alpha} (e_{\alpha}e_j^{\beta}) e_{\beta} + e_i^{\alpha}e_j^{\beta}\bar{\nabla}_{e_{\alpha}} (e_{\beta}) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} (\partial_i e_j^{\beta}) e_{\beta} + e_i^{\alpha}e_j^{\beta}\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^{\gamma}e_{\gamma} \\ &= (\partial_i e_j^{\gamma} + e_j^{\beta}\bar{\Gamma}_{i\beta}{}^{\gamma}) e_{\gamma} \stackrel{!}{=} 0 . \end{aligned}$$

2.4. Unterschiedliche Konnexionen

Da die e_γ eine Basis bilden, muß die Klammer verschwinden. Durch Multiplikation mit e^j_α erhält man die Konnexion bezüglich ϑ^α :

$$\bar{\Gamma}_{i\alpha}{}^\gamma \stackrel{*}{=} -e^j_\alpha \partial_i e_j{}^\gamma = e_j{}^\gamma \partial_i e^j_\alpha . \quad (2.28)$$

Für die Beschreibung eines flachen Raums müssen wir also die kovariante Ableitung im Lagrangian mit der Konnexion (2.28) durchführen.

Normal-Konnexion

Für eine andere spezielle Konnexion verlangen wir, daß die Lösungsbasis ϑ^α und entsprechend die Basisfelder e_α der teleparallelen Theorie selbst parallel sind:

$${}^n\nabla_{e_\alpha}(e_\beta) = {}^n\Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma e_\gamma \stackrel{!}{=} 0 ,$$

also

$${}^n\Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma \stackrel{*}{=} 0 . \quad (2.29)$$

Da man Umgebungen, bei denen die Konnexion an einem Punkt oder entlang einer Kurve verschwindet, *Normal-Umgebungen* nennt, bezeichnen wir diese Konnexion als *Normal-Konnexion*.

Natürlich ergibt sich auch hier sofort, daß die Krümmung verschwindet. Wir haben somit in der Tat eine teleparallele Konnexion vorliegen.

Die Torsion berechnet sich nach Definition zu

$${}^nT_{\alpha\beta}{}^\gamma e_\gamma = {}^n\nabla_{e_\alpha}(e_\beta) - {}^n\nabla_{e_\beta}(e_\alpha) - [e_\alpha, e_\beta] = -[e_\alpha, e_\beta] = C_{\alpha\beta}{}^\gamma e_\gamma ,$$

wobei $C_{\alpha\beta}{}^\gamma$ das Anholonomieobjekt der Tetrade ist. In diesem Fall können wir die kovariante Ableitung durch die äußere Ableitung ersetzen.

2.4.2. Äquivalenz unterschiedlicher Konnexionen?

Wir untersuchen nun, ob die Lösungsbasis des in irreduzible Stücke ${}^{(I)}D\vartheta^\alpha$, siehe (2.4), zerlegten Lagrangians

$$V_{\parallel} = \frac{1}{2\ell^2} \sum_{I=1}^3 a_I \left(D\vartheta_\alpha \wedge {}^*(I)D\vartheta^\alpha \right) , \quad (2.30a)$$

bei speziellen Koeffizientenwahlen a_I auch gleichzeitig Lösung einer lokal Lorentz-invarianten teleparallelen Theorie mit Normal-Konnexion sein kann. Dazu überprüfen wir, ob es eine Transformation des Lagrangians (2.30a) auf einen Lagrangian mit Normal-Konnexion gibt,

$$V_{\parallel} = \frac{1}{2\ell^2} \sum_{I=1}^3 a_I \left(d\vartheta_\alpha \wedge {}^*(I)d\vartheta^\alpha \right) , \quad (2.30b)$$

so daß beide Lagrangians äquivalent sind, d.h. sich nur um einen exakten Term unterscheiden.

Eine solche Transformation muß die Konnexion ändern, während die anderen Feldvariablen unverändert bleiben:

$$\delta_\varepsilon \Gamma_\beta^\alpha = \varepsilon_\beta^\alpha, \quad \delta_\varepsilon \vartheta^\alpha = 0, \quad \delta_\varepsilon g_{\alpha\beta} = 0. \quad (2.31)$$

Hierbei ist ε_β^α eine tensorwertige 1-Form. Sie ist nicht völlig beliebig, da sie die Nebenbedingungen (2.14e) unverändert lassen muß. Um dies zu gewährleisten, stellen wir zwei Bedingungen an ε_β^α :

$$\varepsilon^{\alpha\beta} = -\varepsilon^{\beta\alpha}, \quad (2.32a)$$

$$D\varepsilon_\beta^\alpha = 0. \quad (2.32b)$$

Durch Bedingung (2.32b) bleibt die Krümmung Null unter der Transformation:

$$\begin{aligned} \delta_\varepsilon R_\beta^\alpha &= \delta_\varepsilon d\Gamma_\beta^\alpha + \delta_\varepsilon \Gamma_\gamma^\alpha \wedge \Gamma_\beta^\gamma + \Gamma_\gamma^\alpha \wedge \delta_\varepsilon \Gamma_\beta^\gamma \\ &= d\varepsilon_\beta^\alpha - \Gamma_\beta^\gamma \wedge \varepsilon_\gamma^\alpha + \Gamma_\gamma^\alpha \wedge \varepsilon_\beta^\gamma = D\varepsilon_\beta^\alpha \stackrel{(2.32b)}{=} 0, \end{aligned}$$

die andere Bedingung sorgt entsprechend dafür, daß die Nichtmetrizität Null bleibt. Wir wenden die Transformation auf (2.13b) an und setzen die beiden Lagrange-Multiplikatoren, den Materie-Lagrangian und die Materiefelder gleich Null. Dann ergibt sich:

$$\delta_\varepsilon V_{||} = -\varepsilon_\alpha^\beta \wedge \vartheta^\alpha \wedge H_\beta. \quad (2.33)$$

Bevor wir hier weiterrechnen, fügen wir eine kleine Zwischenüberlegung ein.

Verdrehung

Die lineare Konnexion kann in ihren Riemannschen und ihren post-Riemannschen Anteil zerlegt werden, $\Gamma_\beta^\alpha = \tilde{\Gamma}_\beta^\alpha - K_\beta^\alpha$, wobei $\tilde{\Gamma}_\beta^\alpha$ die Standard-Christoffel-Symbole²

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta} &:= \frac{1}{2} [e_{\{\gamma\}} dg_{\beta\alpha\}} + e_{\{\gamma\}} e_\alpha] C_{\beta\}}] \vartheta^\gamma \\ &= \frac{1}{2} dg_{\alpha\beta} + (e_{[\alpha} dg_{\beta]\gamma}) \vartheta^\gamma + e_{[\alpha} C_{\beta]} - \frac{1}{2} (e_\alpha] e_\beta] C_\gamma) \vartheta^\gamma \end{aligned} \quad (2.34)$$

bezeichnet (die geschweiften Klammern sind die sogenannten *Schouten-Klammern* $\{\alpha\beta\gamma\} := \alpha\beta\gamma - \beta\gamma\alpha + \gamma\alpha\beta$) und K_β^α die sogenannte *Verdrehung* (englisch: *contortion*) ist. Der post-Riemannsche Anteil wird bei verschwindender Nichtmetrizität von der Torsion verursacht. Wir definieren die Verdrehung daher implizit durch

$$T^\alpha := -K_\beta^\alpha \wedge \vartheta^\beta \quad \text{und} \quad K_{\alpha\beta} = -K_{\beta\alpha}. \quad (2.35a)$$

Explizit ergibt sich die Verdrehung dann durch

$$K_{\alpha\beta} = e_{[\alpha} T_{\beta]} - \frac{1}{2} (e_\alpha] e_\beta] T_\gamma) \vartheta^\gamma = 2 e_{[\alpha} T_{\beta]} - \frac{1}{2} e_\alpha] e_\beta] (T_\gamma \wedge \vartheta^\gamma). \quad (2.35b)$$

²Die Standard-Christoffel-Symbole werden meist nur in holonomen Koordinaten angegeben, wo sie in Komponenten das üblichere Aussehen $\tilde{\Gamma}_{ijk} = \frac{1}{2} \partial_{\{i} g_{kj}}$ annehmen.

2.4. Unterschiedliche Konnexionen

BEWEIS:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}(e_\alpha]e_\beta]T_\gamma)\vartheta^\gamma &= -\frac{1}{2}\left(e_\alpha]e_\beta]\left(-K_{\delta\gamma}\wedge\vartheta^\delta\right)\right)\vartheta^\gamma \\
&= \frac{1}{2}(e_\beta]K_{\alpha\gamma})\wedge\vartheta^\gamma - \frac{1}{2}(e_\alpha]K_{\beta\gamma})\wedge\vartheta^\gamma \\
&\stackrel{(B.7c)}{=} \frac{1}{2}e_\beta](K_{\alpha\gamma}\wedge\vartheta^\gamma) + \frac{1}{2}K_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}e_\alpha](K_{\beta\gamma}\wedge\vartheta^\gamma) - \frac{1}{2}K_{\beta\alpha} \\
&= \frac{1}{2}e_\alpha]T_\beta - \frac{1}{2}e_\beta]T_\alpha + K_{\alpha\beta}.
\end{aligned}$$

Dies ergibt den ersten Teil der expliziten Formel. Für die zweite Gleichheit rechnen wir:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}(e_\alpha]e_\beta]T_\gamma)\vartheta^\gamma &\stackrel{(B.7c)}{=} -\frac{1}{2}e_\alpha]\left((e_\beta]T_\gamma)\wedge\vartheta^\gamma\right) - \frac{1}{2}e_\beta]T_\alpha \\
&\stackrel{(B.7c)}{=} -\frac{1}{2}e_\alpha]e_\beta](T_\gamma\wedge\vartheta^\gamma) + \frac{1}{2}e_\alpha]T_\beta - \frac{1}{2}e_\beta]T_\alpha;
\end{aligned}$$

somit gilt:

$$e_{[\alpha]T_\beta] - \frac{1}{2}(e_\alpha]e_\beta]T_\gamma)\vartheta^\gamma = 2e_{[\alpha]T_\beta] - \frac{1}{2}e_\alpha]e_\beta](T_\gamma\wedge\vartheta^\gamma). \quad \blacksquare$$

Wir berechnen nun $K^{\mu\nu}\wedge\eta_{\alpha\mu\nu}$. Mit dem expliziten Ausdruck (2.35b) ergibt sich:

$$K^{\mu\nu}\wedge\eta_{\alpha\mu\nu} = -(e^\mu]T^\nu)\wedge\eta_{\alpha\mu\nu} + \frac{1}{2}(e^\mu]e^\nu]T_\beta)\vartheta^\beta\wedge\eta_{\alpha\mu\nu}. \quad (2.36)$$

Um den ersten Summanden bestimmen zu können, beginnen wir mit

$$\begin{aligned}
(e^\mu]T^\nu)\wedge\eta_{\mu\nu} &\stackrel{-e_\mu]e_\mu]\eta_\nu=0}{=} e^\mu](T^\nu\wedge\eta_{\mu\nu}) \stackrel{\eta_\mu\wedge T^\nu\text{ ist 5-Form}}{=} e^\mu](\eta_\mu\wedge T) \\
&= -\eta_\mu e^\mu]T = -\star(\vartheta_\mu e^\mu]T) \stackrel{(B.8a)}{=} -\star T, \quad (2.37a)
\end{aligned}$$

wobei $T := e_\nu]T^\nu$. Wir wenden nun das innere Produkt $e_\alpha]$ an und erhalten:

$$(e_\alpha]e^\mu]T^\nu)\eta_{\mu\nu} - (e^\mu]T^\nu)\wedge\eta_{\alpha\mu\nu} = -e_\alpha]\star T, \quad (2.37b)$$

und somit ergibt sich schließlich für den ersten Summanden von (2.36):

$$\begin{aligned}
-(e^\mu]T^\nu)\wedge\eta_{\alpha\mu\nu} &= -e_\alpha]\star T - (e_\alpha]e^\mu]T^\nu)\eta_{\mu\nu} = -\star(T\wedge\vartheta_\alpha) - \star(\vartheta_\mu\wedge\vartheta_\nu e_\alpha]e^\mu]T^\nu) \\
&\stackrel{(B.8a),(B.7c)}{=} \star(\vartheta_\alpha\wedge T - T_\alpha + e_\alpha](\vartheta^\nu\wedge T_\nu)). \quad (2.37c)
\end{aligned}$$

Den zweiten Term auf der rechten Seite von (2.36) kann man wie folgt umformen:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(e^\mu]e^\nu]T_\beta)\vartheta^\beta\wedge\eta_{\alpha\mu\nu} &\stackrel{(B.14b)}{=} \frac{1}{2}\star(\vartheta_\mu\wedge\vartheta_\nu e^\mu]e^\nu]T_\alpha - \vartheta_\nu\wedge\vartheta_\alpha e^\nu]T + \vartheta_\alpha\wedge\vartheta_\mu e^\mu]T) \\
&\stackrel{(B.8a)}{=} \star(-T_\alpha + \vartheta_\alpha\wedge T). \quad (2.37d)
\end{aligned}$$

Durch Addition der beiden Terme (2.37c) und (2.37d) erhalten wir:

$$\begin{aligned} K^{\mu\nu} \wedge \eta_{\alpha\mu\nu} &= \star(-2T_\alpha + 2\vartheta_\alpha \wedge T + e_\alpha \lrcorner (\vartheta^\nu \wedge T_\nu)) \\ &\stackrel{(2.4)}{=} \star(-2^{(1)}T_\alpha + 4^{(2)}T_\alpha + {}^{(3)}T_\alpha) . \end{aligned} \quad (2.38)$$

Anwendung der Rechnung auf die Transformation

Aus dem Ausdruck (2.18a) für den Eichfeld-Impuls und dem Eichfeld-Lagrangian (2.8) kann man ablesen, daß

$$V_{\parallel} = -\frac{1}{2} D\vartheta^\alpha \wedge H_\alpha \quad (2.39)$$

gilt. Insbesondere kann man daher den Eichfeld-Impuls in die Hodge-Dualen der irreduziblen Teile der Torsion zerlegen:

$$H_\alpha = -\frac{1}{\ell^2} \sum_{I=1}^3 a_I \star^{(I)} D\vartheta_\alpha .$$

Für die speziell Wahl

$$a_1 = k \in \mathbb{R} , \quad a_2 = -2k , \quad a_3 = -\frac{1}{2}k$$

können wir das H_α in (2.33) durch den Ausdruck (2.38) ersetzen:

$$\delta_\varepsilon V_{\parallel} = -\frac{k}{2\ell^2} \varepsilon_\alpha^\beta \wedge \vartheta^\alpha \wedge K^{\mu\nu} \wedge \eta_{\beta\mu\nu} \stackrel{(2.32a), (B.14b)}{=} -\frac{k}{2\ell^2} \varepsilon^{\alpha\beta} \wedge (K_\alpha^\gamma \wedge \eta_{\gamma\beta} + K_\beta^\gamma \wedge \eta_{\alpha\gamma}) .$$

Wir verwenden nun die post-Riemannsche Aufspaltung der kovarianten Ableitung $D\eta_{\alpha\beta} = \tilde{D}\eta_{\alpha\beta} - K_\alpha^\gamma \wedge \eta_{\gamma\beta} - K_\beta^\gamma \wedge \eta_{\alpha\gamma}$ und die Riemannsche Identität

$$\tilde{D}\eta_{\alpha\beta} = \tilde{D}\vartheta^\gamma \wedge \eta_{\alpha\beta\gamma} = \tilde{T}^\gamma \wedge \eta_{\alpha\beta\gamma} = 0 .$$

Damit ergibt sich

$$\delta_\varepsilon V_{\parallel} = \frac{k}{2\ell^2} \varepsilon^{\alpha\beta} \wedge D\eta_{\alpha\beta} .$$

Der letzte Schritt ist nun, Bedingung (2.32b) zu beachten, so daß man

$$\delta_\varepsilon V_{\parallel} = d \left(-\frac{k}{2\ell^2} \varepsilon^{\alpha\beta} \wedge \eta_{\alpha\beta} \right) \quad (2.40)$$

erhält. Da exakte Terme die Wirkung nicht verändern, erlauben also reelle Vielfache der Koeffizientenwahl

$$a_1 = 1 , \quad a_2 = -2 , \quad a_3 = -\frac{1}{2} \quad (2.41a)$$

2.5. Äquivalenz eines speziellen Teleparallelismus zur Einsteinschen Theorie

bzw. nach (2.9a) reelle Vielfache der entsprechende Koeffizientenwahl für die Rumpf-Lagrangians

$$\rho_1 = 0, \quad \rho_2 = -\frac{1}{2}, \quad \rho_4 = 1. \quad (2.41b)$$

eine Lösungsbasis mit Normal-Konnexion und erfüllter lokaler Lorentz-Invarianz.

Die Koeffizientenwahl (2.41a) wird *Einstein-Wahl* genannt (im nächsten Abschnitt wird klar, warum). Für diese teleparallelen Theorien reicht es also, den Lagrangian (2.30b) anzusetzen. Durch die automatisch gegebene lokale Lorentz-Invarianz für die Koeffizienten (2.41a) kann man die erhaltene Kobasis später drehen und erhält dann nicht-verschwindende Konnexionen in den gedrehten Kobasisfeldern.

Unterschiedliche Metriken

Eine ganz ähnliche Fragestellung stellt sich bei der Wahl der speziellen Metrik (1.13).

Verzichtet man nämlich auf die Forderung, daß ein Lagrangian unter beliebigen linearen Abbildungen invariant ist, und beschränkt man sich auf die Invarianz des Lagrangians unter Lorentz-Transformationen (im Fall verschwindender Nichtmetrizität also auf die Invarianz unter Poincaré-Transformationen, vgl. (2.21)), so bleiben die Metrikkomponenten $g_{\alpha\beta}$ unverändert unter diesen Eichtransformationen, vgl. Abschnitt 1.2.5. Die orthogonale Metrik (1.13) ist dann eine ausgezeichnete Metrik (so wie eben die Normal-Konnexion eine ausgezeichnete Konnexion war). Theorien mit verschiedenen Metriken sind i. a. nicht äquivalent, da sie nur über eine lineare Abbildung ineinander übergeführt werden können, unter der der Lagrangian meist nicht invariant bleibt. Da wir für Lösungen in dieser Arbeit aber nur Poincaré-Invarianz und nicht Invarianz unter linearen Abbildungen fordern wollen, gehen wir auf diese Frage nicht weiter ein.

2.5. Äquivalenz eines speziellen Teleparallelismus zur Einsteinschen Theorie

Wir zeigen nun, daß die teleparallele Theorie mit Koeffizienten nach der Einstein-Wahl (2.41a) äquivalent zur gewöhnlichen Einsteinschen Allgemeinen Relativitätstheorie ist. Beide Theorien lassen in der bisherigen Beschreibung nur skalare Materie und Eichbosonen (ganzzahliger Spin) zu, denn es gilt $\vartheta_{[\alpha} \wedge E_{\beta]} - \vartheta_{[\alpha} \wedge dH_{\beta]} = 0$. Abweichungen in der Spin-Präzession zwischen beiden Theorien, siehe [Rum79, Nit80], sind in der bisherigen Beschreibung also nicht eingeschlossen.

Zunächst betrachten wir die Normal-Konnexion $0 = {}^n\Gamma_{\beta}^{\alpha} = \tilde{\Gamma}_{\beta}^{\alpha} - K_{\beta}^{\alpha}$. Wir stellen fest, daß wir in allen Formeln mit Koeffizienten nach der Einstein-Wahl die Verdrehung K_{α}^{β} durch das Negative des Christoffelsymbols $-\tilde{\Gamma}_{\alpha}^{\beta}$ ersetzen können.

2.5. Äquivalenz eines speziellen Teleparallelismus zur Einsteinschen Theorie

Analog zum Abschnitt 2.4.2 auf Seite 47 können wir das H_α in (2.39) durch den Ausdruck (2.38) ersetzen,

$$V_{\parallel} = \frac{1}{4\ell^2} d\vartheta^\alpha \wedge K^{\mu\nu} \wedge \eta_{\alpha\mu\nu} ,$$

und jetzt das Christoffelsymbol in den Lagrangian einbringen und weiter umformen:

$$\begin{aligned} 4\ell^2 V_{\parallel} &= d\vartheta^\alpha \wedge \tilde{\Gamma}^{\beta\gamma} \wedge \eta_{\alpha\beta\gamma} = d\left(\vartheta^\alpha \wedge \tilde{\Gamma}^{\beta\gamma} \wedge \eta_{\alpha\beta\gamma}\right) + \vartheta^\alpha \wedge d\left(\tilde{\Gamma}^{\beta\gamma} \wedge \eta_{\alpha\beta\gamma}\right) \\ &\stackrel{\text{(B.8a)}, \text{(B.18a)}}{=} -2d\left(\tilde{\Gamma}^{\beta\gamma} \wedge \eta_{\beta\gamma}\right) + \vartheta^\alpha \wedge d\tilde{\Gamma}^{\beta\gamma} \wedge (e_\alpha \lrcorner \eta_{\beta\gamma}) - \vartheta^\alpha \wedge \tilde{\Gamma}^{\beta\gamma} \wedge d\vartheta^\delta \wedge \eta_{\alpha\beta\gamma\delta} . \end{aligned}$$

Wir lassen jetzt den exakten Term weg, da wir nur an der Äquivalenz der Lagrangians interessiert sind. Außerdem ersetzen wir $d\vartheta^\delta$ mittels der Definition der Verdrehung (2.35a) durch einen Term, der ein Christoffelsymbol enthält. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} 4\ell^2 V_{\parallel} &\stackrel{\text{(B.8a)}}{\cong} 2d\tilde{\Gamma}^{\beta\gamma} \wedge \eta_{\beta\gamma} - \tilde{\Gamma}^{\beta\gamma} \wedge \tilde{\Gamma}_\mu^\delta \wedge \vartheta^\mu \wedge \eta_{\beta\gamma\delta} \\ &\stackrel{\text{(B.14b)}}{=} 2d\tilde{\Gamma}^{\beta\gamma} \wedge \eta_{\beta\gamma} - \tilde{\Gamma}^{\beta\gamma} \wedge \tilde{\Gamma}_\beta^\delta \wedge \eta_{\gamma\delta} + \tilde{\Gamma}^{\beta\gamma} \wedge \tilde{\Gamma}_\gamma^\delta \wedge \eta_{\beta\delta} - \tilde{\Gamma}^{\beta\gamma} \wedge \tilde{\Gamma}_\delta^\delta \wedge \eta_{\beta\gamma} \\ &\stackrel{\tilde{\Gamma}^{\beta\gamma} = -\tilde{\Gamma}^{\gamma\beta}}{=} 2\left(d\tilde{\Gamma}^{\beta\gamma} + \tilde{\Gamma}^{\delta\beta} \wedge \tilde{\Gamma}_\gamma^\delta\right) \wedge \eta_{\beta\gamma} . \end{aligned}$$

Wir erhalten also mit der Riemann-Krümmung $\tilde{R}_\alpha^\beta = d\tilde{\Gamma}_\alpha^\beta + \tilde{\Gamma}_\gamma^\beta \wedge \tilde{\Gamma}_\alpha^\gamma$ den Einstein-Lagrangian

$$V_{\text{Einstein}} = \frac{1}{2\ell^2} \tilde{R}_{\alpha\beta} \wedge \eta^{\alpha\beta} \quad (2.42)$$

und somit ist der Teleparallelismus mit Koeffizienten nach Einstein-Wahl tatsächlich äquivalent zur Einsteinschen Allgemeinen Relativitätstheorie (ART). Die Bewegungsgleichung der ART ergibt sich durch Variation nach ϑ^α sofort zu

$$\eta^{\alpha\beta\gamma} \wedge \tilde{R}_{\beta\gamma} = 2\ell^2 \Sigma^\alpha \quad (2.43)$$

mit $\Sigma_\alpha = \frac{\delta L_{\text{Materie}}}{\delta \vartheta^\alpha}$. Um die gewohnte Form der Feldgleichung wiederzuerkennen, setzen wir $\tilde{R}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \tilde{R}_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} \vartheta^\mu \wedge \vartheta^\nu$ ein:

$$\begin{aligned} \eta_{\alpha\beta\gamma} \wedge \tilde{R}^{\beta\gamma} &= \frac{1}{4} \eta_{\alpha\beta\gamma} \wedge \vartheta^\mu \wedge \vartheta^\nu \tilde{R}_{\mu\nu}{}^{\beta\gamma} \\ &\stackrel{\text{(B.14b)}}{=} \frac{1}{4} \left(\delta_\alpha^\nu \eta_{\beta\gamma} + \delta_\beta^\nu \eta_{\gamma\alpha} + \delta_\gamma^\nu \eta_{\alpha\beta} \right) \wedge \vartheta^\mu \tilde{R}_{\mu\nu}{}^{\beta\gamma} \\ &\stackrel{\text{(B.14b)}}{=} \frac{1}{4} \left(\delta_\alpha^\nu \delta_\gamma^\mu \eta_\beta - \delta_\alpha^\nu \delta_\beta^\mu \eta_\gamma + \delta_\beta^\nu \delta_\alpha^\mu \eta_\gamma - \delta_\beta^\nu \delta_\gamma^\mu \eta_\alpha + \delta_\gamma^\nu \delta_\beta^\mu \eta_\alpha - \delta_\gamma^\nu \delta_\alpha^\mu \eta_\beta \right) \tilde{R}_{\mu\nu}{}^{\beta\gamma} \\ &= \frac{1}{4} \left(\tilde{R}_{\gamma\alpha}{}^{\beta\gamma} \eta_\beta - \tilde{R}_{\beta\alpha}{}^{\beta\gamma} \eta_\gamma + \tilde{R}_{\alpha\beta}{}^{\beta\gamma} \eta_\gamma - \tilde{R}_{\gamma\beta}{}^{\beta\gamma} \eta_\alpha + \tilde{R}_{\beta\gamma}{}^{\beta\gamma} \eta_\alpha - \tilde{R}_{\alpha\gamma}{}^{\beta\gamma} \eta_\beta \right) . \end{aligned}$$

2.6. Lösungen des Teleparallelismus mit Einstein-Wahl

Mit den bekannten Regeln und Definitionen der ART (z. B. des Ricci-Tensor $\text{Ric}_{\alpha\beta} := \tilde{R}_{\gamma\alpha\beta}{}^\gamma$ bzw. der skalaren Krümmung $R := \text{Ric}_\gamma{}^\gamma$) ergibt sich damit in der Tat die bekannte Einsteinsche Feldgleichung

$$G_{\alpha\beta} := \text{Ric}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = 2\ell^2 \Sigma_{\alpha\beta} \quad (2.44)$$

mit $\Sigma_\alpha = \Sigma_{\alpha\beta}\eta^\beta$.

2.6. Lösungen des Teleparallelismus mit Einstein-Wahl

Für die teleparallele Theorie mit Einstein-Koeffizienten wurden bereits ein paar Lösungen gesucht und gefunden, z. B. [Bae80, Bae88]. Man benutzt bei der Suche Ansätze für die Kobasis *und* die Torsion, da man i. a. direkt Lösungen einer Poincaré-Eichtheorie sucht und man daher zur Erzeugung der Krümmung nichttriviale Konnexionen benötigt. Die Lösungen einer teleparallelen Theorie treten dann als Spezialfälle nach einem Grenzübergang auf (vgl. dazu z. B. [PS85a]).

Wie wir im Abschnitt 2.4.2 gezeigt haben, ist für den Einstein-Fall die Vorgabe einer Konnexion aber überflüssig. Es reicht, *alleine* die Kobasis durch einen Ansatz vorzugeben. Da die Vorgabe der Konnexion über die Torsion den Übergang zu einer Theorie mit dynamischer Krümmung im Blickfeld hat, hat das spezielle Aussehen des Krümmungsterms im Lagrangian Rückwirkungen auf die spezielle Form der Torsion.

Wir geben im folgenden die Baekler-Lösung aus [Bae80] und die McCrea-Kerr-Lösung aus [Bae88] an. Wir vergleichen dabei das Aussehen der Konnexion und der Torsion, die sich mit dem speziellen Torsionsansatz aus den Zitaten ergibt, mit der Form, die sich alleine aus Vorgabe des Kobasis-Ansatzes (also mit verschwindender Konnexion, also einer Normal-Konnexion) ergibt. Für die Rechnungen verwendeten wir Computer-Algebra-Programme, die im Anhang D ab Seite 91 abgedruckt sind. Die Programme für die Ansätze, wie sie in [Bae80, Bae88] verwendet wurden, befinden sich auf den Seiten 94 bzw. 96.

Baekler-Lösung

Bei der Baekler-Lösung [Bae80] handelt es sich um die Schwarzschild-Lösung für den teleparallelen Einstein-Fall. Die Lösungskobasis lautet also:

$$\vartheta^{\hat{t}} = \sqrt{1 - \frac{2m}{r}} dt, \quad (2.45a)$$

$$\vartheta^{\hat{r}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}} dr, \quad (2.45b)$$

$$\vartheta^{\hat{\theta}} = r d\theta, \quad (2.45c)$$

$$\vartheta^{\hat{\phi}} = r \sin(\theta) d\phi. \quad (2.45d)$$

Die Konnexion des Baekler-Ansatzes hat folgendes Aussehen (vgl. [Bae80]):

$$\begin{aligned}\Gamma^{\hat{\phi}\hat{t}} &= -\Gamma^{\hat{t}\hat{\phi}} = -\frac{m}{r^2} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2m}{r}}} \vartheta^{\hat{\phi}}, & \Gamma^{\hat{\theta}\hat{t}} &= -\Gamma^{\hat{t}\hat{\theta}} = -\frac{m}{r^2} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2m}{r}}} \vartheta^{\hat{\theta}}, \\ \Gamma^{\hat{\theta}\hat{r}} &= -\Gamma^{\hat{r}\hat{\theta}} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{m}{r}\right) \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2m}{r}}} \vartheta^{\hat{\theta}}, & \Gamma^{\hat{\phi}\hat{r}} &= -\Gamma^{\hat{r}\hat{\phi}} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{m}{r}\right) \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2m}{r}}} \vartheta^{\hat{\phi}}, \\ \Gamma^{\hat{r}\hat{t}} &= -\Gamma^{\hat{t}\hat{r}} = -\frac{m}{r^2} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2m}{r}}} \vartheta^{\hat{r}}, & \Gamma^{\hat{\theta}\hat{\phi}} &= -\Gamma^{\hat{\phi}\hat{\theta}} = -\frac{\cot(\theta)}{r} \vartheta^{\hat{\phi}}.\end{aligned}$$

Wir geben nun die Torsionen an:

Baekler-Ansatz:

$$\begin{aligned}T^{\hat{t}} &= -\frac{m}{r^2} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2m}{r}}} \vartheta^{\hat{t}} \wedge \vartheta^{\hat{r}}, \\ T^{\hat{r}} &= -\frac{m}{r^2} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2m}{r}}} \vartheta^{\hat{t}} \wedge \vartheta^{\hat{r}}, \\ T^{\hat{\theta}} &= \frac{m}{r^2} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2m}{r}}} \left(\vartheta^{\hat{t}} \wedge \vartheta^{\hat{\theta}} - \vartheta^{\hat{r}} \wedge \vartheta^{\hat{\theta}} \right), \\ T^{\hat{\phi}} &= \frac{m}{r^2} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2m}{r}}} \left(\vartheta^{\hat{t}} \wedge \vartheta^{\hat{\phi}} - \vartheta^{\hat{r}} \wedge \vartheta^{\hat{\phi}} \right).\end{aligned}$$

Ansatz mit verschwindender Konnexion:

$$\begin{aligned}T^{\hat{t}} &= -\frac{m}{r^2} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2m}{r}}} \vartheta^{\hat{t}} \wedge \vartheta^{\hat{r}}, \\ T^{\hat{r}} &= 0, \\ T^{\hat{\theta}} &= \frac{\sqrt{1-\frac{2m}{r}}}{r} \vartheta^{\hat{r}} \wedge \vartheta^{\hat{\theta}}, \\ T^{\hat{\phi}} &= \cot(\theta) \vartheta^{\hat{\theta}} \wedge \vartheta^{\hat{\phi}} + \frac{\sqrt{1-\frac{2m}{r}}}{r} \vartheta^{\hat{r}} \wedge \vartheta^{\hat{\phi}}.\end{aligned}$$

McCrea-Kerr-Lösung

Die McCrea-Kerr-Lösung [Bae88] ist für $\Lambda_{\text{eff}} = \kappa = 0$ die Kerr-Lösung für den teleparallelen Einstein-Fall. Die Lösungsbasis lautet:

$$\vartheta^{\hat{t}} = \sqrt{\frac{\Delta}{\Sigma}} \left(dt + j_0 \sin^2(\theta) d\phi \right), \quad (2.46a)$$

2.6. Lösungen des Teleparallelismus mit Einstein-Wahl

$$\vartheta^{\hat{r}} = \sqrt{\frac{\Sigma}{\Delta}} dr, \quad (2.46b)$$

$$\vartheta^{\hat{\theta}} = \sqrt{\Sigma} d\theta, \quad (2.46c)$$

$$\vartheta^{\hat{\phi}} = \sqrt{\frac{1}{\Sigma}} \sin(\theta) \left(j_0 dt + (r^2 + j_0^2) d\phi \right) \quad (2.46d)$$

mit den Funktionen

$$\Delta(r) := -2mr + r^2 + j_0^2, \quad (2.47a)$$

$$\Sigma(r, \theta) := r^2 + j_0^2 \cos^2(\theta). \quad (2.47b)$$

Wir geben zunächst die Torsion an, die sich mit dem Ansatz aus [Bae88] ergibt:

$$T^{\hat{t}} = \frac{-\sqrt{\cos^2(\theta)j_0^2+r^2} \left(\left(\vartheta^{\hat{t}} \wedge \vartheta^{\hat{\theta}} - \vartheta^{\hat{r}} \wedge \vartheta^{\hat{\theta}} \right) \sin(\theta) j_0 + 2 \sqrt{j_0^2-2mr+r^2} \vartheta^{\hat{\theta}} \wedge \vartheta^{\hat{\phi}} \right) \cos(\theta) j_0 r - \sqrt{j_0^2-2mr+r^2} \left(\cos^2(\theta) j_0^2 - r^2 \right) \vartheta^{\hat{t}} \wedge \vartheta^{\hat{r}} - \left(\vartheta^{\hat{t}} \wedge \vartheta^{\hat{\phi}} - \vartheta^{\hat{r}} \wedge \vartheta^{\hat{\phi}} \right) \sin(\theta) j_0 r^2}{\left(\cos^2(\theta) j_0^2 + r^2 \right)^2 \left(j_0^2 - 2mr + r^2 \right)},$$

$$T^{\hat{r}} = T^{\hat{t}},$$

$$T^{\hat{\theta}} = \frac{\sqrt{\cos^2(\theta)j_0^2+r^2} \left(\left(\vartheta^{\hat{t}} \wedge \vartheta^{\hat{\theta}} - \vartheta^{\hat{r}} \wedge \vartheta^{\hat{\theta}} \right) r + \left(\vartheta^{\hat{t}} \wedge \vartheta^{\hat{\phi}} - \vartheta^{\hat{r}} \wedge \vartheta^{\hat{\phi}} \right) \cos(\theta) j_0 \right) mr}{\sqrt{j_0^2-2mr+r^2} \left(\cos^2(\theta) j_0^2 + r^2 \right)^2},$$

$$T^{\hat{\phi}} = \frac{-\sqrt{\cos^2(\theta)j_0^2+r^2} \left(\left(\vartheta^{\hat{t}} \wedge \vartheta^{\hat{\theta}} - \vartheta^{\hat{r}} \wedge \vartheta^{\hat{\theta}} \right) \cos(\theta) j_0 - \left(\vartheta^{\hat{t}} \wedge \vartheta^{\hat{\phi}} - \vartheta^{\hat{r}} \wedge \vartheta^{\hat{\phi}} \right) r \right) mr}{\sqrt{j_0^2-2mr+r^2} \left(\cos^2(\theta) j_0^2 + r^2 \right)^2}.$$

Und schließlich die Torsion, wenn man von einer Normal-Konnexion ausgeht:

$$T^{\hat{t}} = \frac{\left((m-r) \cos^2(\theta) j_0^2 + j_0^2 r - mr^2 \right) \vartheta^{\hat{t}} \wedge \vartheta^{\hat{r}} + 2 \left(j_0^2 - 2mr + r^2 \right) \cos(\theta) \vartheta^{\hat{\theta}} \wedge \vartheta^{\hat{\phi}} j_0 + \sqrt{j_0^2 - 2mr + r^2} \cos(\theta) \sin(\theta) \vartheta^{\hat{t}} \wedge \vartheta^{\hat{\theta}} j_0^2}{\sqrt{\cos^2(\theta) j_0^2 + r^2} \sqrt{j_0^2 - 2mr + r^2} \left(\cos^2(\theta) j_0^2 + r^2 \right)},$$

$$T^{\hat{r}} = \frac{\cos(\theta) \sin(\theta) \vartheta^{\hat{r}} \wedge \vartheta^{\hat{\theta}} j_0^2}{\sqrt{\cos^2(\theta) j_0^2 + r^2} \left(\cos^2(\theta) j_0^2 + r^2 \right)},$$

$$T^{\hat{\theta}} = \frac{\sqrt{j_0^2 - 2mr + r^2} \vartheta^{\hat{r}} \wedge \vartheta^{\hat{\theta}} r}{\sqrt{\cos^2(\theta) j_0^2 + r^2} \left(\cos^2(\theta) j_0^2 + r^2 \right)},$$

$$T^{\hat{\phi}} = \frac{\left(\sqrt{j_0^2 - 2mr + r^2} \vartheta^{\hat{r}} \wedge \vartheta^{\hat{\phi}} + 2 \sin(\theta) \vartheta^{\hat{t}} \wedge \vartheta^{\hat{r}} j_0 \right) \sin(\theta) r + \left(j_0^2 + r^2 \right) \cos(\theta) \vartheta^{\hat{\theta}} \wedge \vartheta^{\hat{\phi}}}{\sqrt{\cos^2(\theta) j_0^2 + r^2} \left(\cos^2(\theta) j_0^2 + r^2 \right) \sin(\theta)}.$$

3. Alternative Theorien

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit zwei alternativen Theorien, die die Vorgehensweise von Eichtheorien verlassen. Beide Theorien haben gemeinsam, daß die Rosen-Yilmaz-Metrik Lösung von ihnen ist. Wir stellen daher zunächst diese Metrik vor. Danach beschäftigen wir uns mit eingeschränkten Variationen bzw. der Maxwell-Theorie als Vergleichsobjekt für eine Theorie mit externem Feld. Wir beschreiben danach die Theorie von Kaniel und Itin [Ka97] und abschließend eine teleparallele Version der Rosen-Theorie [Ro73, Ro74].

3.1. Vorbetrachtungen

3.1.1. Die Rosen-Yilmaz-Metrik

Die Metrik, die 1958 von H. Yilmaz vorgeschlagen wurde [Yi58], ist durch

$$g = e^{-\frac{2m}{r}} dt^2 - e^{\frac{2m}{r}} (dx^2 + dy^2 + dz^2) , \quad (3.1)$$

wobei $r^2 := x^2 + y^2 + z^2$, gegeben. Da Yilmaz diese Metrik später durch Parametrisierung verallgemeinert hat, vgl. z. B. [Yi76], nennen wir die Metrik (3.1) zur Unterscheidung von den Verallgemeinerungen *Rosen-Yilmaz-Metrik*, da sie Lösung der bi-metrischen Theorie von Rosen [Ro73, Ro74] ist.

Wir wählen nun die Kobasisfelder so, daß die Metrikkomponenten orthonormal sind, also die Metrik die Form (1.13) annimmt, da unabhängige Metrikkomponenten nur redundante Feldgleichungen implizieren, vgl. Abschnitt 2.3.2 auf Seite 41. Die zur Rosen-Yilmaz-Metrik gehörende Kobasis lautet dann

$$\vartheta^{\hat{t}} = e^{-\frac{m}{r}} dt , \quad (3.2a)$$

$$\vartheta^{\hat{x}} = e^{\frac{m}{r}} dx , \quad (3.2b)$$

$$\vartheta^{\hat{y}} = e^{\frac{m}{r}} dy , \quad (3.2c)$$

$$\vartheta^{\hat{z}} = e^{\frac{m}{r}} dz . \quad (3.2d)$$

Wir vergleichen nun diese Metrik mit der Schwarzschild-Metrik. Dazu Taylor-nähern wir die Metrik-Komponenten g_{00} und g_{11} bis einschließlich zur dritten Ordnung. Für die Schwarzschild-Metrik ergibt sich

$$g_{00} = 1 - \frac{2m}{r} \quad (\text{exakt}) , \quad (3.3a)$$

3.1. Vorbetrachtungen

$$g_{11} = 1 + \frac{2m}{r} + \frac{4m^2}{r^2} + \frac{8m^3}{r^3} + \mathcal{O}\left(\frac{m^4}{r^4}\right). \quad (3.3b)$$

Bevor wir die Rosen-Yilmaz-Metrik vergleichen können, müssen wir sie von den isotropen Koordinaten in Schwarzschild-Koordinaten umschreiben. Dazu muß man die Umkehrfunktion von $re^{\frac{m}{r}}$ bilden, die wir mit $f(r)$ bezeichnen. Die Metrikkomponenten haben dann folgendes Aussehen:

$$g_{00} = e^{-\frac{2m}{f(r)}}, \quad (3.4a)$$

$$g_{11} = \frac{1}{1 - \frac{m}{f(r)}}. \quad (3.4b)$$

Wir nähern die Umkehrfunktion $f(r)$. Man erhält:

$$\frac{1}{f(r)} = \frac{1}{r} + \frac{m}{r^2} + \frac{3}{2} \frac{m^2}{r^3} + \frac{5}{2} \frac{m^3}{r^4} + \mathcal{O}\left(\frac{m^4}{r^5}\right). \quad (3.5)$$

Damit ergibt sich für die genäherten Rosen-Yilmaz-Komponenten:

$$g_{00} = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{25}{6} \frac{m^3}{r^3} + \mathcal{O}\left(\frac{m^4}{r^4}\right), \quad (3.6a)$$

$$g_{11} = 1 + \frac{2m}{r} + \frac{5m^2}{r^2} + \frac{9m^3}{r^3} + \mathcal{O}\left(\frac{m^4}{r^4}\right). \quad (3.6b)$$

In der Zeit-Komponente der Metrik weicht die Rosen-Yilmaz-Metrik erst in der dritten Ordnung von der Schwarzschild-Metrik ab. Die radiale Komponente zeigt leichte Abweichungen schon in der zweiten Ordnung.

Daher ist die Rosen-Yilmaz-Metrik (RY-Metrik) konsistent mit den klassischen Tests der Allgemeinen Relativitätstheorie. Insbesondere beschreibt sie die post-Newtonsche Perihel-Drehung korrekt, vgl. [Sy71, Seite 296, Fußnote 1]. Ob mit heutiger Meßtechnik, z. B. bei Effekten des Hulse-Taylor-Pulsars, zwischen der Einsteinschen Theorie und Theorien mit der Rosen-Yilmaz-Metrik als Lösung unterschieden werden kann, wäre zu überprüfen.

Motivation für die RY-Metrik

Eine lebensfähige Gravitationstheorie muß das *lokale* Äquivalenzprinzip erfüllen. Insbesondere muß sie die gravitative Rotverschiebung

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \Delta U = -\frac{m\Delta r}{r^2}, \quad (3.7)$$

erklären können, wobei ω für die Frequenz einer elektromagnetischen Welle steht, die im Abstand r zu einer Masse m gemessen wird (wir verwenden hier geometrische Einheiten). Die Frequenzverschiebung, die sich durch einen *kleinen* zusätzlichen Abstand Δr ergibt, bezeichnen wir mit $\Delta\omega$.

Laut Mashhoon [Ma97] schlug Yilmaz vor, dieses lokale Äquivalenzprinzip zu einem *globalen* zu erweitern. Entsprechend kann man Gleichung (3.7) integrieren und erhält

$$\int_{r_0}^{r_1} \frac{d\omega}{\omega} = \int_{r_0}^{r_1} dU . \quad (3.8)$$

Das bedeutet,

$$\ln \left(\frac{\omega(r_1)}{\omega(r_0)} \right) = U(r_1) - U(r_0) , \quad \text{oder} \quad \frac{\omega(r_1)}{\omega(r_0)} = \exp(U(r_1) - U(r_0)) . \quad (3.9)$$

Indem wir den Grenzwert $r_1 \rightarrow \infty$ bilden und die explizite Form $U = -\frac{m}{r}$ verwenden, ergibt sich

$$\frac{\omega(\infty)}{\omega(r)} = \exp \left(\frac{m}{r} \right) , \quad \text{und daher} \quad \frac{\Delta t(\infty)}{\Delta t(r)} = \exp \left(-\frac{m}{r} \right) . \quad (3.10)$$

Weil $\Delta t(\infty)$ nicht von Gravitation beeinflusst ist (wenn wir annehmen, daß die Theorie asymptotisch flach ist), kann man direkt

$$g^{\hat{t}} = e^{-\frac{m}{r}} dt \quad \text{bzw.} \quad g_{00} = e^{-\frac{2m}{r}} dt^2 \quad (3.11)$$

ablesen.

Um die anderen Kobasisfelder bzw. holonomen Metrikkomponenten festzulegen, könnte man sie analog zur Schwarzschild-Metrik modellieren. Wir erhielten dann

$$g \sim e^{-\frac{2m}{r}} dt^2 - e^{\frac{2m}{r}} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) . \quad (3.12)$$

Diese Metrik weicht aber stärker von der Schwarzschild-Lösung ab, als dies bei der RY-Metrik (3.1) der Fall ist. Die Taylor-Näherung der Komponenten dieser Metrik lautet:

$$g_{00} = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{2m^2}{r^2} - \frac{4}{3} \frac{m^3}{r^3} + \mathcal{O} \left(\frac{m^4}{r^4} \right) , \quad (3.13a)$$

$$g_{11} = 1 + \frac{2m}{r} + \frac{2m^2}{r^2} + \frac{4}{3} \frac{m^3}{r^3} + \mathcal{O} \left(\frac{m^4}{r^4} \right) . \quad (3.13b)$$

Es ergibt sich also eine Abweichung in der Zeitkomponente g_{00} bereits in der zweiten Ordnung. Auch die räumliche Komponente weicht doppelt so stark von der Schwarzschild-Metrik ab als die Rosen-Yilmaz-Metrik (aber in die andere Richtung). In der RY-Metrik verwendet man das daher Inverse von g_{00} als isotropen Vorfaktor.

3.1.2. Eingeschränkte Variation

Im Kapitel 2 haben wir bei der Variation des Lagrangians beachtet, daß die Variation δ nicht mit dem Hodge-Stern $*$ vertauscht. Anstelle dessen haben wir Formel (C.12a) verwendet, die wir in Anhang C (Seite 85) hergeleitet haben.

3.1. Vorbetrachtungen

Wir wollen nun die Frage untersuchen, welche Einschränkung der Variation die Forderung

$$\delta^* \psi = * \delta \psi \quad (3.14)$$

erzeugt, wobei ψ eine beliebige p -Form ist. Dazu wenden wir diese Variation zunächst auf die Volumenform η an:

$$\delta \eta = \delta(*1) = *(\delta 1) \equiv 0, \quad (3.15)$$

denn die Konstante 1 wird nicht variiert. Wir benutzen nun die Identität

$$\vartheta^\alpha \wedge \eta_\beta = \delta_\beta^\alpha \eta \quad (3.16)$$

und variieren diese unter Beachtung von (3.15):

$$\delta \vartheta^\alpha \wedge \eta_\beta + \vartheta^\alpha \wedge \delta \eta_\beta = 0. \quad (3.17)$$

Die Vertauschungsbedingung für η_β lautet

$$\delta \eta_\beta = \delta(*\vartheta_\beta) = *(\delta \vartheta_\beta),$$

und somit gilt

$$\vartheta^\alpha \wedge \delta \eta_\beta = \vartheta^\alpha \wedge *(\delta \vartheta_\beta) = \delta \vartheta_\beta \wedge * \vartheta^\alpha = \delta \vartheta_\beta \wedge \eta^\alpha.$$

Hieraus folgt nach Einsetzen in (3.17)

$$\delta \vartheta^\alpha \wedge \eta_\beta + \delta \vartheta_\beta \wedge \eta^\alpha = 0. \quad (3.18)$$

Die allgemeine Änderung der Kobasis unter Translationen und linearen Abbildungen ist durch (1.23) gegeben:

$$\delta \vartheta^\alpha = -\omega_\beta{}^\alpha \vartheta^\beta.$$

Setzt man dies in (3.18) ein und beachtet (3.15), so ergibt sich die Bedingung

$$\omega^{\alpha\beta} + \omega^{\beta\alpha} = 0, \quad \text{d. h. } \omega^{(\alpha\beta)} = 0. \quad (3.19)$$

Wenn also der Hodge-Stern und die Variation vertauschen, so ist die Variation auf die antisymmetrischen linearen Abbildungen, die *Lorentz-Transformationen*, *eingeschränkt*.

Wir können nun umgekehrt fragen, wie die einzelnen Anteile der Zerlegung des Transformationsparameters

$$\delta \vartheta_\beta = \omega_{\alpha\beta} \vartheta^\alpha = \omega_{[\alpha\beta]} \vartheta^\alpha + \widehat{\omega}_{\alpha\beta} \vartheta^\alpha + \frac{1}{4} \omega_\gamma{}^\gamma \omega_{\alpha\beta} \vartheta^\alpha,$$

also der antisymmetrische Anteil, der symmetrisch-spurfrei und der Spur-Anteil, auf die Variation Hodge-dualer Formen wirkt.

Da wir schon wissen, daß $\delta^* = {}^*\delta$ auf Lorentz-Transformationen führt, untersuchen wir jetzt den symmetrisch-spurfreien Anteil $\delta\vartheta_\beta = \widehat{\vartheta}_{\alpha\beta} \vartheta^\alpha$:

$$\begin{aligned}
 \left(\widehat{\delta}^* \phi - {}^*\widehat{\delta} \phi \right) &\stackrel{\text{(C.12a)}}{=} \frac{1}{2} \vartheta^{\alpha\beta} \left(-{}^*(\vartheta_\alpha \wedge (e_\beta] \phi)) - {}^*(\vartheta_\beta \wedge (e_\alpha] \phi)) \right. \\
 &\quad \left. + \vartheta_\alpha \wedge (e_\beta] {}^*\phi) + \vartheta_\beta \wedge (e_\alpha] {}^*\phi) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \vartheta^{\alpha\beta} \left(-e_\alpha] (\vartheta_\beta \wedge {}^*\phi) - e_\beta] (\vartheta_\alpha \wedge {}^*\phi) \right. \\
 &\quad \left. + \vartheta_\alpha \wedge (e_\beta] {}^*\phi) + \vartheta_\beta \wedge (e_\alpha] {}^*\phi) \right) \\
 &\quad = 0, \text{ da } \vartheta_\gamma \wedge \gamma = 0 \\
 &= \frac{1}{2} \vartheta^{\alpha\beta} \left(\underbrace{-2o_{\alpha\beta}}_{=0} {}^*\phi + 4\vartheta_{(\alpha} \wedge (e_{\beta]}] {}^*\phi) \right) \\
 &= 2 \widehat{\vartheta}^{\alpha\beta} \vartheta_\alpha \wedge (e_\beta] {}^*\phi) = 2 \widehat{\delta}^* \vartheta^\beta \wedge (e_\beta] {}^*\phi) \\
 &\stackrel{\text{(C.2)}}{=} 2 \widehat{\delta}^* {}^*\phi,
 \end{aligned}$$

falls ϕ nicht noch von einem anderen Feld abhängt, nach dem variiert wird. In diesem Fall erhalten wir also:

$$\widehat{\delta}^* {}^*\phi = -{}^*\widehat{\delta} \phi. \quad (3.20)$$

Eine analoge Rechnung für den Spur-Anteil ergibt eine vom Formengrad p abhängige Regel. Für $p \neq 4$ und $p \neq 0$ gilt:

$$\delta^{\text{tr}} {}^*\phi = \frac{4-p}{p} {}^*\delta^{\text{tr}} \phi. \quad (3.21)$$

Für die beiden verbleibenden Formgrade kann man keine entsprechende Formel angeben.

3.1.3. Maxwell-Theorie als Vergleichsobjekt

Wir beschreiben hier kurz die Maxwell-Theorie in der Minkowski-Raumzeit in unserer Notation als Modell für eine Theorie, bei der das Eichfeld A als inneres Feld von der Eichung der Translation und der linearen Abbildungen (also von ϑ^α und Γ_{α}^β) unabhängig ist. Insbesondere können wir unabhängig von diesen Größen nach A variieren.

In der Elektrodynamik ist das Potential A gegeben. Der Maxwell-Lagrangian lautet

$$L_{\text{Max}} = \frac{1}{2} dA \wedge {}^*dA. \quad (3.22)$$

Da das Eichfeld A unabhängig von ϑ^α und Γ_{α}^β variiert wird, kommutiert die Variation nach A mit dem Hodge-Stern: $\delta^*A = {}^*\delta A$. Daher erhält man für die Variation des Maxwell-Lagrangians nach A mit der Koableitung $d^\dagger := -{}^*d^*$:

$$\delta L_{\text{Max}} = d(\delta A \wedge {}^*dA) - \delta A \wedge {}^*d^\dagger A.$$

3.2. Die Theorie von Kaniel und Itin

Also lautet die Vakuum-Feldgleichung:

$$-{}^*d^\dagger dA = 0. \quad (3.23)$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir stets die *Lorentz-Eichbedingung*

$$d^\dagger A = 0 \quad (3.24)$$

annehmen. Dann ergibt sich mit dem Wellenoperator $\square := d^\dagger d + dd^\dagger$, vgl. Anhang B.9 (Seite 84), die Vakuum-Feldgleichung als

$$-\square {}^*A = 0. \quad (3.25)$$

Die Lorentz-Bedingung kann nicht aus dem Lagrangian

$$L_{\text{Max}}^\dagger := \frac{1}{2} d^\dagger A \wedge {}^*d^\dagger A, \quad (3.26)$$

hergeleitet werden, da man $d{}^*A$ nicht in dA ausdrücken kann. Daher ist der Lagrangian L_{Max}^\dagger unter der Eichtransformation (1.18) nicht eichinvariant:

$$L_{\text{Max}}^\dagger \longrightarrow L_{\text{Max}}^\dagger + {}^*d^\dagger d\varepsilon \wedge \left(d^\dagger A + \frac{1}{2} d^\dagger d\varepsilon \right). \quad (3.27)$$

Dementsprechend erhalten wir die Wellengleichung nur in einer speziellen Eichung, *nachdem* wir die Feldgleichung durch das Variationsprinzip ermittelt haben.

Obukhov machte uns darauf aufmerksam [Ob97], daß der Lagrangian (3.26) einen Spezialfall des Lagrangians einer Eichtheorie für p -Formen repräsentiert, vgl. [Ob82a]. Man verwendet dabei anstelle der einparametrischen Eichtransformation (1.18) die sechs-parametrische Eichtransformation $A \rightarrow A + d^\dagger \phi$ mit einer 2-Form ϕ . Der Lagrangian (3.26) ist aufgrund der Regel (B.22b) unter dieser Transformation invariant. Die neue „Lorentz-Bedingung“ lautet in diesem Fall $dA = 0$.

3.2. Die Theorie von Kaniel und Itin

3.2.1. Die Feldgleichung

Kaniel und Itin haben in [Ka97] vorgeschlagen, einen speziellen Lagrangian zu untersuchen. Sie verwenden dabei eine eingeschränkte Variation, da sie annehmen, daß der Hodge-Stern und die Variation vertauschen. Die Variation wird also nur im Raum der Lorentz-Transformationen durchgeführt. Da die Variation des Kaniel und Itin-Lagrangian nach Regel (3.20) das Ergebnis Null haben wird, führt diese Variation zu keiner Einschränkung, wenn man sie ebenfalls erlaubt. Kaniel und Itin schließen also nur den Spur-Anteil der Variation aus. Dies entspricht einer Nebenbedingung, volumenerhaltend zu variieren.

Wir beginnen mit dem Yang-Mills-artigen Lagrangian (nach der Rumpf-Zerlegung (2.6) also mit ${}^{(1)}V$):

$$\tilde{V}_{\text{KI}} = d\vartheta^\alpha \wedge {}^*d\vartheta_\alpha. \quad (3.28)$$

Unter der eingeschränkten Variation erhält man, analog zu (3.23), die zugehörige Euler-Lagrange Feldgleichung

$$-{}^*d^\dagger d\vartheta^\alpha = 0. \quad (3.29)$$

Diesmal können wir den Lagrangian aber ergänzen. Wir folgen Kaniel und Itin [Ka97, Gl. (7)], *wechseln aber das Vorzeichen und addieren* einen „adjungierten“ Term (bei Subtraktion ergibt sich der von der Heyde Lagrangian [Hey76], s. u.):

$$V_{\text{KI}} = d\vartheta^\alpha \wedge {}^*d\vartheta_\alpha + d^\dagger\vartheta^\alpha \wedge {}^*d^\dagger\vartheta_\alpha. \quad (3.30)$$

Mit der eingeschränkten Variation nach ϑ^α erhält man nun eine zur Wellengleichung proportionale Feldgleichung:

$$-{}^*\square\vartheta_\alpha = \Sigma_\alpha \quad \text{bzw., wegen Regel (B.24b),} \quad -\square{}^*\vartheta_\alpha = \Sigma_\alpha. \quad (3.31a)$$

In der η -Basis ausgedrückt, also mit $\eta^\alpha = {}^*\vartheta^\alpha$, ergeben sich die (korrigierten) Feldgleichungen von Kaniel und Itin [Ka97]:

$$-\square\eta_\alpha = \Sigma_\alpha. \quad (3.31b)$$

Die Addition des adjungierten Teils in (3.30) bricht hier *nicht* die Eichinvarianz, weil nach Regel (B.18b) $d{}^*\vartheta^\alpha$ und daher $d^\dagger\vartheta^\alpha$ in $d\vartheta^\alpha$ ausgedrückt werden können,

$$d{}^*\vartheta^\alpha = d\eta^\alpha = d\vartheta_\beta \wedge \eta^{\alpha\beta},$$

wobei wir hier die Orthonormalität der Kobasis benutzt haben.

3.2.2. Zerlegung des Lagrangian von Kaniel und Itin

Um die Struktur des Lagrangians von Kaniel und Itin (K-I-Lagrangian) (3.30) besser zu verstehen und um die Verbindung mit den Rechnungen in dieser Arbeit deutlich werden zu lassen, zerlegen wir ihn in die irreduziblen Anteile (2.5) bzw. in die Lagrangians von Rumpf (2.6).

Den ersten Term des K-I-Lagrangian (3.30) haben wir bereits als den Yang-Mills-artigen Lagrangian ${}^{(1)}V$ erkannt. Es bleibt also der Term $d^\dagger\vartheta^\alpha \wedge {}^*d^\dagger\vartheta_\alpha = -d{}^*\vartheta^\alpha \wedge {}^*d{}^*\vartheta_\alpha$ zu untersuchen. Unter Verwendung von (B.18a) und anderer Regeln aus dem

3.2. Die Theorie von Kaniel und Itin

Anhang B erhält man:

$$\begin{aligned}
d^* \vartheta^\alpha \wedge^* d^* \vartheta_\alpha &= d\eta^\alpha \wedge^* d\eta_\alpha = d\vartheta_\beta \wedge \eta^{\alpha\beta} \wedge^* (d\vartheta^\gamma \wedge \eta_{\alpha\gamma}) \\
&= \vartheta^\alpha \wedge \vartheta^\beta \wedge^* d\vartheta_\beta \wedge^* (\vartheta_\alpha \wedge \vartheta_\gamma \wedge^* d\vartheta^\gamma) \\
&= -\vartheta^\alpha \wedge \vartheta^\beta \wedge^* d\vartheta_\beta \wedge^* (\vartheta_\alpha \wedge^* (e_\gamma \lrcorner d\vartheta^\gamma)) \\
&= -\vartheta^\beta \wedge^* d\vartheta_\beta \wedge \vartheta^\alpha \wedge (e_\alpha \lrcorner (e_\gamma \lrcorner d\vartheta^\gamma)) \\
&= -^* d\vartheta_\beta \wedge \vartheta^\beta \wedge (e_\gamma \lrcorner d\vartheta^\gamma) = -^* \left(\vartheta^\beta \wedge (e_\gamma \lrcorner d\vartheta^\gamma) \right) \wedge d\vartheta_\beta \\
&= d\vartheta_\beta \wedge^* \left(e_\gamma \lrcorner \left(\vartheta^\beta \wedge d\vartheta^\gamma \right) \right) - d\vartheta_\gamma \wedge^* d\vartheta^\gamma \\
&= d\vartheta_\alpha \wedge \vartheta_\beta \wedge^* \left(\vartheta^\alpha \wedge d\vartheta^\beta \right) - d\vartheta^\alpha \wedge^* d\vartheta_\alpha = {}^{(4)}V - {}^{(1)}V .
\end{aligned}$$

Wir können nun die Faktoren ρ_I für den K-I-Lagrangian (3.30) ablesen:

$$\rho_1 = 1 + 1 = 2, \quad \rho_2 = 0, \quad \rho_4 = -1. \quad (3.32)$$

Hätten wir den adjungierten Term subtrahiert, so ergäbe sich $\rho_1 = \rho_2 = 0$ und $\rho_4 = 1$, was genau dem von der Heyde-Lagrangian [Hey76] entspricht.

Wir können den K-I-Lagrangian (3.30) also nun in

$$V_{\text{KI}} = 2 d\vartheta^\alpha \wedge^* d\vartheta_\alpha - \left(d\vartheta_\alpha \wedge \vartheta^\beta \right) \wedge^* \left(d\vartheta_\beta \wedge \vartheta^\alpha \right) \quad (3.33)$$

umschreiben.

Für die Zerlegung in irreduzible Anteile berechnen wir die entsprechenden Koeffizienten dieser Zerlegung über die Gleichungen (2.9b). Es ergibt sich:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = 1. \quad (3.34)$$

(Im Fall des von der Heyde-Lagrangians würde sich nur der Faktor a_2 in $a_2 = -2$ abwandeln.)

Also kann der K-I-Lagrangian auch in der Form

$$V = -\frac{1}{2} d\vartheta^\alpha \wedge H_\alpha, \quad (3.35)$$

mit dem Eichfeld-Impuls

$$H_\alpha = -2^* \left({}^{(1)}d\vartheta_\alpha + 4 {}^{(2)}d\vartheta_\alpha + {}^{(3)}d\vartheta_\alpha \right), \quad (3.36)$$

geschrieben werden.

Wir betonen noch einmal, vgl. Abschnitt 2.4.2 (Seite 44), daß ein teleparalleler Lagrangian mit einfacher äußerer Ableitung anstelle der kovarianten Ableitung, also ohne das Eichpotential Konnexion Γ_α^β , nur lokal Lorentz-invariant ist, wenn man die Einsteinsche Wahl (bzw. Vielfache davon) für die Zerlegungsparameter getroffen hat. Für die irreduzible Zerlegung sind dies die Parameter (2.41a). Der K-I-Lagrangian ist also *nicht* lokal Lorentz-invariant. Um dies zu ändern, müßte die Konnexion zusätzlich als Eichpotential auftreten und durch einen dynamischen Zusatzterm im Lagrangian ermittelt werden.

3.2.3. Zerlegung der Feldgleichung

Aus der (korrigierten) K-I-Feldgleichung (3.31b) können wir die Spur extrahieren, indem wir mit ϑ^α überschieben:

$$-\vartheta^\gamma \wedge \square \eta_\gamma = \vartheta^\gamma \wedge \Sigma_\gamma .$$

Zusammen mit dem spurfreien Energie-Impuls-Strom

$$\mathcal{Z}_\alpha := \Sigma_\alpha - \frac{1}{4} e_\alpha \rfloor (\vartheta^\gamma \wedge \Sigma_\gamma) , \quad (3.37)$$

vgl. auch mit [He95, Gl. (5.1.11)], finden wir den spurfreien Anteil und den Spur-Anteil der Feldgleichung (3.31b):

$$-\square \eta_\alpha + \frac{1}{4} e_\alpha \rfloor (\vartheta^\gamma \wedge \square \eta_\gamma) = \mathcal{Z}_\alpha , \quad (3.38a)$$

$$-\vartheta^\gamma \wedge \square \eta_\gamma = \vartheta^\gamma \wedge \Sigma_\gamma . \quad (3.38b)$$

Wir schreiben den spurfreien Anteil (3.38a) noch etwas um, indem wir

$$\begin{aligned} e_\alpha \rfloor (\vartheta^\gamma \wedge \square \eta_\gamma) &= -e_\alpha \rfloor \{ * (\vartheta^\gamma \wedge \square \eta_\gamma) \} = - * (* (\vartheta^\gamma \wedge \square \eta_\gamma) \wedge \vartheta_\alpha) \\ &= - * (\vartheta^\gamma \wedge \square \eta_\gamma) \wedge * \vartheta_\alpha = - * (\vartheta^\gamma \wedge \square \eta_\gamma) \eta_\alpha \end{aligned}$$

benutzen. Dadurch kann das Duale der Kobasis hinter einen Differentialoperator ausgeklammert werden:

$$\left[-\square - \frac{1}{4} * (\vartheta^\gamma \wedge \square \eta_\gamma) \right] \eta_\alpha = \mathcal{Z}_\alpha . \quad (3.39)$$

Natürlich kann man Gleichung (3.38a) weiter in den antisymmetrischen und symmetrisch spurfreien Anteil aufspalten. Zu diesem Zweck beginnen wir mit der vollen Zerlegung des Energie-Impuls-Stroms

$$\Sigma = \widehat{\mathcal{Z}}_\alpha + \frac{1}{2} \vartheta_\alpha \wedge (e_\gamma \rfloor \Sigma^\gamma) + \frac{1}{4} e_\alpha \rfloor (\vartheta^\gamma \wedge \Sigma_\gamma) \quad (3.40)$$

in die Summe von

symmetrisch spurfreien Anteil $\widehat{\mathcal{Z}}_\alpha$, antisymmetrischen Anteil und Spur-Anteil ,

vgl. [He95, Gl. (5.1.15)]. Eine kleine Rechnung liefert dann die Aufspaltung der Feldgleichung (3.31b):

$$-\square \eta_\alpha + \frac{1}{2} \vartheta_\alpha \wedge (e_\gamma \rfloor \square \eta^\gamma) + \frac{1}{4} e_\alpha \rfloor (\vartheta^\gamma \wedge \square \eta_\gamma) = \widehat{\mathcal{Z}}_\alpha , \quad (3.41a)$$

$$-\frac{1}{2} \vartheta_\alpha \wedge \vartheta_\beta \wedge (e_\gamma \rfloor \square \eta^\gamma) = \vartheta_{[\alpha} \wedge \Sigma_{\beta]} , \quad (3.41b)$$

3.2. Die Theorie von Kaniel und Itin

$$-\vartheta^\gamma \wedge \square \eta_\gamma = \vartheta^\gamma \wedge \Sigma_\gamma . \quad (3.41c)$$

Um den Energie-Impuls-Strom mit dem konventionellen Energie-Impuls-Tensor T^α_β vergleichen zu können, berechnen wir das Duale der 4-Form, die aus dem Produkt aus Kobasis und der Energie-Impuls-3-Form Σ_α entsteht:

$$*(\vartheta^\alpha \wedge \Sigma_\beta) = *(\vartheta^\alpha \wedge T^\gamma_\beta \eta_\gamma) = T^\gamma_\beta *(\vartheta^\alpha \wedge \eta_\gamma) = T^\alpha_\beta *\eta = T^\alpha_\beta **1 = -T^\alpha_\beta ,$$

also

$$T_{\alpha\beta} = -*(\vartheta_\alpha \wedge \Sigma_\beta) . \quad (3.42)$$

Insbesondere gilt für den Spur-Anteil der Feldgleichung, den wir ja *nicht* über unsere volumenerhaltende Variation ermitteln:

$$*(\vartheta^\gamma \wedge \square \eta_\gamma) = T^\gamma_\gamma . \quad (3.43)$$

3.2.4. Die Rosen-Yilmaz-Metrik und die K-I-Feldgleichung

Die Rosen-Yilmaz-Kobasis (3.2) erfüllt die spurfreie Vakuum-Feldgleichung (3.38a) mit verschwindendem Quellenterm,

$$\square \eta_\alpha - \frac{1}{4} e_\alpha \rfloor (\vartheta^\gamma \wedge \square \eta_\gamma) = 0 . \quad (3.44)$$

Dies haben wir mit einem Computeralgebra-Programm geprüft. Den zugehörigen Programm-Code haben wir in Anhang D auf Seite 102 abgedruckt.

Wie wir bereits festgestellt haben, ist die Rosen-Yilmaz-Metrik mit den klassischen Tests der Allgemeinen Relativitätstheorie konsistent. Die Integrationskonstante m kann aber nicht als Masse eines begrenzten sphärischen Körpers interpretiert werden, der als Quelle einer *Vakuum*theorie dient. Die Vakuum-Spurgleichung, vgl. (3.41c),

$$\vartheta^\gamma \wedge \square \eta_\gamma = 0 ,$$

ist *nicht* erfüllt. Stattdessen können wir die Spur des Energie-Impuls-Tensors berechnen, indem wir in (3.43) die Rosen-Yilmaz-Kobasis (3.2) einsetzen. Es ergibt sich, siehe auch [Ka97],

$$T^\gamma_\gamma = \left(\frac{2m}{r^2} e^{-\frac{m}{r}} \right)^2 . \quad (3.45)$$

Daher erfüllt die Rosen-Yilmaz-Kobasis die Feldgleichungen

$$\square \eta_\alpha - \frac{1}{4} e_\alpha \rfloor (\vartheta^\gamma \wedge \square \eta_\gamma) = 0 \quad \text{und} \quad *(\vartheta^\gamma \wedge \square \eta_\gamma) = \left(\frac{2m}{r^2} e^{-\frac{m}{r}} \right)^2 . \quad (3.46)$$

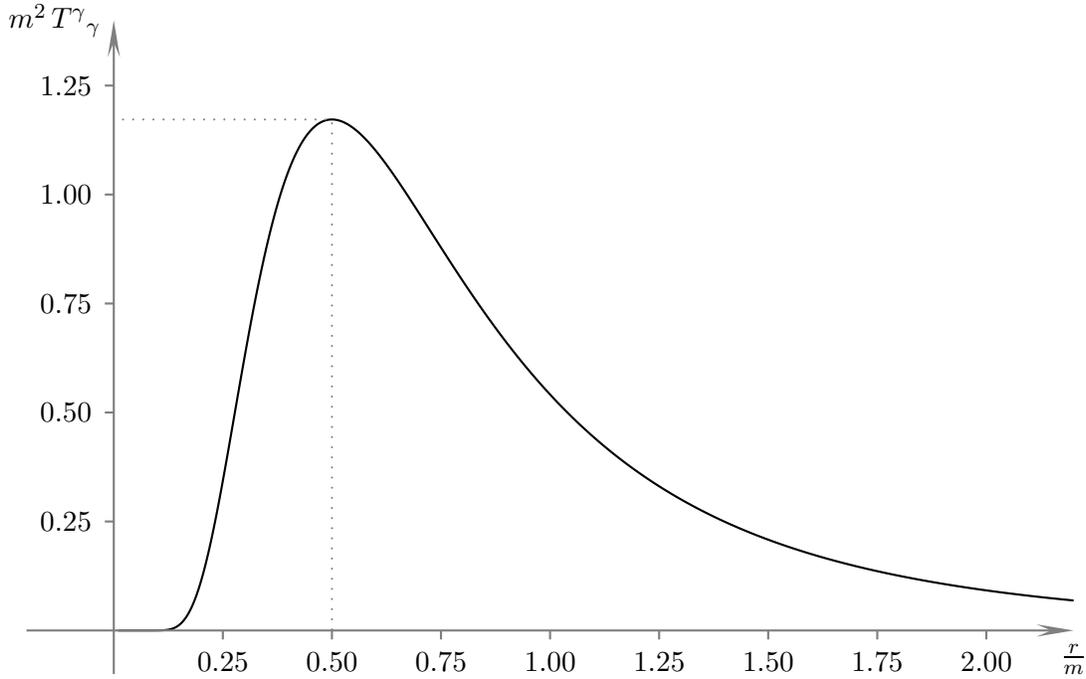


ABBILDUNG 3.1.: Die Materie-Verteilung $T^{\gamma}_{\gamma} = \left(\frac{2m}{r^2}e^{-\frac{m}{r}}\right)^2$, die als Quelle für den Spur-Anteil der Feldgleichungen der Theorie von Kaniel und Itin auftritt.

Die Materieverteilung (3.45) dient als Sternmodell eines Sterns, dessen Materie exponentiell abfallend bis ins Unendliche reicht. Die Verteilung erreicht ihr Maximum an der Stelle $r = m/2$, siehe auch Abbildung 3.1. An diesem Graphen der Spur des Energie-Impuls-Tensors kann man bereits ablesen, daß der größte Teil der Sternmasse innerhalb des Schwarzschild-Radius $r_s = 2m$ liegt. Das Volumenintegral über T^{γ}_{γ} ergibt die Gesamtmasse m des Sterns:

$$4\pi \int_0^{\infty} T^{\gamma}_{\gamma} r^2 dr = \int_0^{\infty} \frac{16\pi m^2}{r^2} e^{-\frac{2m}{r}} dr \stackrel{x=-\frac{2m}{r}, dr=\frac{2m}{x^2} dx}{=} 8\pi m \int_{-\infty}^0 e^x dx = 8\pi m ,$$

wobei der Faktor 8π auftritt, weil in geometrischen Einheiten neben $c = 1$ die Newtonsche Gravitationskonstante G gleich 1 gesetzt wird und nicht die Einsteinsche Gravitationskonstante $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$. Mit anderen Worten kann man Effekte in unserem Sonnensystem sowohl mit der Rosen-Yilmaz-Lösung als auch mit der Schwarzschild-Lösung der Allgemeinen Relativitätstheorie richtig beschreiben. Ob dies z. B. für den Hulse-Taylor-Pulsar gültig bleibt, müssen zukünftige Rechnungen zeigen, die Einflüsse höherer Ordnungen der Metriken beobachten. Bisherige Beobachtungen mit dem Ziel, Schwarze Löcher zu entdecken, konnten bislang zwar große Massenkonzentrationen auf bestimmten kosmischen Längenskalen messen, allerdings ist die Ortsauflösung noch so groß, daß man die Massen nicht auf den zugehörigen Schwarzschild-

3.3. Die Theorie von Rosen in einer teleparallelen Version

Radius beschränken kann. Entsprechend sind die Messungen sowohl mit der möglichen Existenz Schwarzer Löcher als auch mit der Rosen-Yilmaz-Lösung in der Kanieltin-Theorie, die eine Ansammlung der Masse gemäß T^γ_γ , also im wesentlichen innerhalb von $r_s = 2m$, fordert, in Übereinstimmung.

3.3. Die Theorie von Rosen in einer teleparallelen Version

3.3.1. Einführung geeigneter Strukturen

In der Beschreibung der teleparallelen Theorien in Kapitel 2 ist die Kobasis ϑ^α eine dynamische Variable. Wegen der Redundanz der Feldgleichungen für unabhängige Metrikkomponenten, vgl. Abschnitt 2.3.2 (Seite 41), wählen wir die orthonormale Metrik (1.13). Die allgemeine Variation δ vertauscht nicht mit dem Hodge-Stern \star , vielmehr gilt im orthonormalen Fall Regel (C.12b) aus Anhang C.

Bei der Beschreibung von Quantentheorien treten Wellenfunktionen auf. Da Wellen eine Ausdehnung über Längenskalen besitzen, kann es u. a. aus diesem Grund sinnvoll sein, gravitative Felder als effektive Felder auf einer Minkowski-Raumzeit zu betrachten, vgl. [Na96]. Man kann also versuchen, die Kobasis ϑ^α als externes Feld auf einer Minkowski-Raumzeit, analog zur Maxwell-Theorie, zu beschreiben. Wir können nun die Minkowski-Metrik in die externen Vektorfelder ϑ^α entwickeln: $h = o_{ij} dx^i \otimes dx^j = h_{\alpha\beta} \vartheta^\alpha \otimes \vartheta^\beta$. Die Variation dieser externen Felder vertauscht mit dem zur Minkowski-Metrik gehörenden Hodge-Stern.

In der bi-metrischen Rosen-Theorie der Gravitation [Ro73, Ro74] sind die grundlegenden Feldvariablen durch *zwei* Metriken gegeben; beide obigen Metriken g und h treten also in der Theorie auf. Diese Metriken definieren zwei unterschiedliche Hodge-Operatoren \star_g und \star_h . Die beliebige Variation δ wird nur mit dem Hodge-Operator der flachen Metrik vertauschen, $\delta_h^\star = \star_h \delta$, aber nicht mit dem Hodge-Stern der dynamischen Metrik, d. h. im allgemeinen $\delta_g^\star \neq \star_g \delta$, siehe Anhang C.

Um nun die bi-metrische Theorie in unserem Formalismus in eine teleparallele Theorie umschreiben zu können, führen wir zwei unabhängige Graduierungen ein. Jede Graduierung wird durch eine äußere Ableitung d_g bzw. d_h erzeugt. Damit jedes Objekt einen Grad zu beiden Graduierungen tragen kann, führen wir außerdem ein beide Graduierungen beachtendes äußeres Produkt $\wedge_{g,h}$ ein. Anstelle *einer* Mannigfaltigkeit mit *zwei* unterschiedlichen Graduierungen zu betrachten, kann man diese Situation äquivalent auch als *zwei unterschiedliche, aber zueinander diffeomorphe Mannigfaltigkeiten* mit je *einer* Graduierung interpretieren, vergleiche mit der Zeichnung 3.2. Die gerade eben beschriebene Korrespondenz kann mathematisch als Isomorphismus

$$L^{g,h}(TM, \mathbb{R}) \cong L^g(TM_g, \mathbb{R}) \otimes L^h(TM_h, \mathbb{R}) \quad (3.47a)$$

für die Räume alternierender Formen und

$$\psi_g \psi_h \wedge_{g,h} \phi_g \phi_h \cong \left(\psi_g \wedge_g \phi_g \right) \otimes \left(\psi_h \wedge_h \phi_h \right), \quad (3.47b)$$

3.3. Die Theorie von Rosen in einer teleparallelen Version

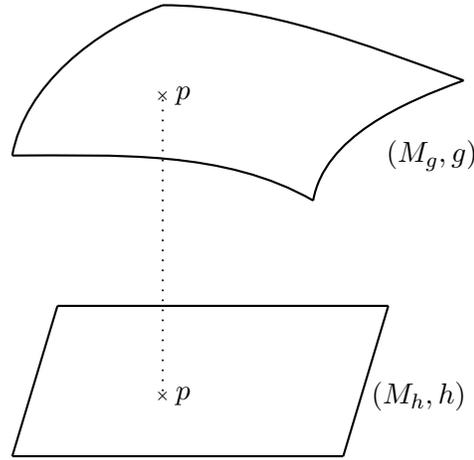


ABBILDUNG 3.2.: Die zwei Metriken g und h kann man so interpretieren, daß sie auf zwei unterschiedlichen, aber zueinander diffeomorphen Mannigfaltigkeiten M_g und M_h definiert sind.

$${}^*_{g,h}\psi_g\psi_h \cong {}^*_g\psi_g \otimes {}^*_h\psi_h. \quad (3.47c)$$

bezüglich der äußeren Produkte bzw. den Hodge-Operatoren beschrieben werden. Zum Beispiel wird die Kobasis ϑ^α als eine 1-Form bezüglich der g -Graduierung und als 0-Form bezüglich der h -Graduierung festgelegt, d. h. $\vartheta^\alpha \in L_g^1(TM_g, \mathbb{R}) \otimes L_h^0(TM_h, \mathbb{R})$. Die Kobasis wird durch diese Konstruktion also dynamisch verstanden.

3.3.2. Der teleparallele Rosen-Lagrangian

Nun folgen wir Rosen [Ro73, Ro74] und differenzieren bei der Konstruktion des Lagrangian nur bezüglich der flachen Mannigfaltigkeit M_h , indem wir nur die äußere Ableitung d_h verwenden. Dadurch wird das Differential der Kobasis $d_h\vartheta^\alpha$ eine 1-Form bezüglich der h -Graduierung und bleibt eine 1-Form bezüglich der g -Graduierung. Wir bezeichnen nun in den folgenden Rechnungen die holonomen Indizes bezüglich der Mannigfaltigkeit (M_g, g) mit lateinischen Buchstaben aus dem Anfang des Alphabets (a, b, c, \dots) und holonome Indizes bezüglich der Mannigfaltigkeit (M_h, h) mit lateinischen Buchstaben aus der Mitte des Alphabets (i, j, k, \dots).

Wir zeigen nun, daß der Rosen-Lagrangian

$$V_{\text{Rosen}} = \frac{1}{4}g^{ab}g^{cd}g_{ac,i}g_{bd,i} - \frac{1}{8}g^{ab}g_{ab,i}g^{cd}g_{cd,i} \quad (3.48a)$$

in unserer Notation durch den folgenden Lagrangian ausgedrückt werden kann:

$$\begin{aligned} 2V_{\text{Rosen}}^{\parallel} = & o_{\alpha\beta} d_h\vartheta^\alpha \wedge_{g,h} {}^*_{g,h} d_h\vartheta^\beta - o_{\alpha\beta} o_{\gamma\delta} \vartheta^\alpha \wedge_{g,h} d_h\vartheta^\beta \wedge_{g,h} {}^*_{g,h} \left(\vartheta^\gamma \wedge_{g,h} d_h\vartheta^\delta \right) \\ & + o_{\alpha\beta} o_{\gamma\delta} \vartheta^\alpha \wedge_{g,h} d_h\vartheta^\gamma \wedge_{g,h} {}^*_{g,h} \left(\vartheta^\delta \wedge_{g,h} d_h\vartheta^\beta \right), \end{aligned} \quad (3.48b)$$

3.3. Die Theorie von Rosen in einer teleparallelen Version

Wir beginnen mit (3.48a) und benutzen die Entwicklung

$$g_{ab} = o_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta = e_{a\alpha} e_b^\alpha \quad (3.49a)$$

und das Differential der Metrikkomponenten

$$g_{ab,i} = e_{a\beta,i} e_b^\beta + e_{a\beta} e_{b^\beta,i} . \quad (3.49b)$$

Dies führt zu

$$\begin{aligned} V_{\text{Rosen}} &= \frac{1}{4} e^{a\alpha} e_b^\alpha e^{c\gamma} e_d^\gamma \left(e_{a\beta,i} e_c^\beta + e_{a\beta} e_{c^\beta,i} \right) \left(e_{b\delta,i} e_d^\delta + e_{b\delta} e_{d^\delta,i} \right) \\ &\quad - \frac{1}{8} e^{a\alpha} e_b^\alpha \left(e_{a\beta,i} e_b^\beta + e_{a\beta} e_{b^\beta,i} \right) e^{c\gamma} e_d^\gamma \left(e_{c\delta,i} e_d^\delta + e_{c\delta} e_{d^\delta,i} \right) \\ &= -\frac{1}{8} \left(e^a_\beta e^c_\delta e_a^\beta e_{c^\delta,i} + e^a_\beta e^d_\delta e_a^\beta e_{d^\delta,i} + e^b_\beta e^c_\delta e_b^\beta e_{c^\delta,i} + e^b_\beta e^d_\delta e_b^\beta e_{d^\delta,i} \right) \\ &\quad + \frac{1}{4} \left(e^a_\alpha e^{b\alpha} e^c_\gamma e_{a\beta,i} e_c^\beta e_b^{\gamma,i} + e^a_\alpha e^{b\alpha} e^c_\gamma e^{d\gamma} e_{a\beta,i} e_c^\beta e_{b\delta} e_d^{\delta,i} \right. \\ &\quad \left. + e^b_\alpha e^c_\gamma e_c^\alpha e_{b^\gamma,i} + e^b_\alpha e^c_\gamma e^{d\gamma} e_c^\alpha e_{b^\delta} e_{d^\delta,i} \right) \\ &= -\frac{1}{2} e^a_\beta e^c_\delta e_a^\beta e_{c^\delta,i} + \frac{1}{2} e^a_\alpha e^{b\alpha} e_{a\beta,i} e_b^{\beta,i} + \frac{1}{2} e^a_\alpha e^d_\beta e_d^\alpha e_{a^\beta,i} . \quad (3.50) \end{aligned}$$

Es ist bei dieser Rechnung wichtig, daß die Positionen der holonomen Indizes a, b, \dots bezüglich der dynamischen Metrik fest bleiben, da wir mit dieser Metrik nicht heben und senken dürfen (es kämen sonst durch (3.49a) jeweils zwei zusätzliche Faktoren in die Formeln).

Wenn wir nun mit (3.48b) starten, erhalten wir ebenfalls Gleichung (3.50), multipliziert mit den Volumenformen η_g und η_h . Wir verwenden dazu $\vartheta^\alpha = e_b^\alpha d_g x^b$ und finden für den ersten Term in (3.48b):

$$\begin{aligned} o_{\alpha\beta} d_h \vartheta^\alpha \wedge_{g,h}^* d_h \vartheta^\beta &= e_a^\beta e_{b\beta,j} \left(d_g x^a \wedge_g^* d_g x^b \right) \otimes \left(d_h x^i \wedge_h^* d_h x^j \right) \\ &= e_a^\beta e_{b\beta,j} g^{ab} \eta_g h^{ij} \eta_h = e^{a\alpha} e_b^\alpha e_{a\beta,i} e_b^{\beta,i} \eta_g \eta_h . \quad (3.51a) \end{aligned}$$

Analog führt der zweite Term aus (3.48b) zu

$$\begin{aligned} -o_{\alpha\beta} o_{\gamma\delta} \vartheta^\alpha \wedge_{g,h} d_h \vartheta^\beta \wedge_{g,h}^* \left(\vartheta^\gamma \wedge_{g,h} d_h \vartheta^\delta \right) & \\ &= -e_a^\alpha e_{c\alpha,i} e_b^\beta e_{d\beta,i} d_g x^a \wedge_g d_g x^c \wedge_g^* \left(d_g x^b \wedge_g d_g x^d \right) \eta_h \\ &= -e_{a\alpha} e_{b\beta} e_c^\alpha e_{d^\beta,i} d_g x^a \wedge_g^* \left(g^{cd} d_g x^b - g^{bc} d_g x^d \right) \eta_h \quad (3.51b) \\ &= -e_{a\alpha} e_{b\beta} e_c^\alpha e_{d^\beta,i} \left(g^{cd} g^{ab} - g^{bc} g^{ad} \right) \eta_g \eta_h \\ &\stackrel{(3.49a)}{=} \left(-e^{c\gamma} e_d^\gamma e_{c\delta,i} e_d^{\delta,i} + e^c_\gamma e^d_\delta e_{c^\delta,i} e_d^{\gamma,i} \right) \eta_g \eta_h . \end{aligned}$$

3.3. Die Theorie von Rosen in einer teleparallelen Version

Der dritte Term in (3.48b) wird in entsprechender Weise umgeformt:

$$\begin{aligned}
& o_{\alpha\beta} o_{\gamma\delta} \vartheta^\alpha \wedge_{g,h} d_h \vartheta^\gamma \wedge_{g,h}^* \wedge_{g,h}^* \left(\vartheta^\delta \wedge_{g,h} d_h \vartheta^\beta \right) \\
&= e_{a\gamma} e_d^\delta e_{b\delta} e_c^{\gamma,i} d_g x^a \wedge_g d_g x^d \wedge_g^* \left(d_g x^b \wedge_g d_g x^c \right) \eta_h \\
&= e_{a\gamma} e_{b\delta} e_d^\delta e_c^{\gamma,i} \left(g^{ab} g^{dc} - g^{db} g^{ac} \right) \eta_g \eta_h \\
&\stackrel{(3.49a)}{=} \left(e^{b\alpha} e_a^\alpha e_{b\beta,i} e_a^{\beta,i} - e_\delta^d e_c^\gamma e_d^\delta e_c^{\gamma,i} \right) \eta_g \eta_h .
\end{aligned} \tag{3.51c}$$

Wenn man diese Ausdrücke (3.51) addiert, findet man in der Tat die Gleichung (3.50), multipliziert mit $\eta_g \eta_h$.

Wenn man den Rosen-Lagrangian (3.48b) in angepaßte Rumpf-Lagrangians aufspaltet, erhalten wir die Rumpf-Koeffizienten der Rosen-Theorie:

$$\rho_1 = \frac{1}{2}, \quad \rho_2 = -\frac{1}{2}, \quad \rho_4 = \frac{1}{2} \tag{3.52a}$$

und daher, nach Gleichung (2.9b), die Koeffizienten einer entsprechenden Aufspaltung in irreduzible Anteile:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = -\frac{1}{2}, \quad a_3 = -\frac{1}{2}. \tag{3.52b}$$

Ein Vergleich mit den Koeffizienten des teleparallelen Äquivalents der Einsteinschen Theorie (2.41a) ergibt, daß sich die Rosen-Theorie von der Einsteinschen Theorie nur im Wert a_2 unterscheidet. Dies ist gerade der Spur-Anteil der Torsion. Aufgrund der unterschiedlich wirkenden Ableitungen dieser Theorien, liefert der Vergleich aber keine weiteren Erkenntnisse.

3.3.3. Feldgleichungen

Die Feldgleichungen erhält man durch Variation des Lagrangian (3.48b) nach ϑ^α . Unser Lagrangian enthält außer dieser Kobasis keine weiteren Feldgrößen, da wir die orthogonale Metrik (1.13) gewählt haben. Es tritt auch keine zusätzliche Konnexion im Lagrangian auf, da die zur Ableitung d_h bezüglich der flachen Metrik h gehörende Konnexion die flache Konnexion ist.

Die Herleitung der Feldgleichung verläuft analog zu Abschnitt 2.2.2 (Seite 33). Insbesondere ergibt sich die zu Gleichung 2.17 analoge Formel

$$\begin{aligned}
2\delta V_{\text{Rosen}} &= \delta d_h \vartheta^\alpha \wedge_{g,h} \\
&\quad \left[2 \wedge_{g,h}^* d_h \vartheta_\alpha - 2 \vartheta_\alpha \wedge_{g,h}^* \wedge_{g,h}^* \left(d_h \vartheta^\beta \wedge_{g,h} \vartheta_\beta \right) + 2 \vartheta_\beta \wedge_{g,h}^* \wedge_{g,h}^* \left(\vartheta_\alpha \wedge_{g,h} d_h \vartheta^\beta \right) \right] \\
&+ \delta \vartheta^\gamma \wedge_{g,h} \left[2 d_h \vartheta_\gamma \wedge_{g,h}^* \wedge_{g,h}^* \left(d_h \vartheta^\beta \wedge_{g,h} \vartheta_\beta \right) + 2 d_h \vartheta^\alpha \wedge_{g,h}^* \wedge_{g,h}^* \left(\vartheta_\alpha \wedge_{g,h} d_h \vartheta_\gamma \right) \right]
\end{aligned}$$

3.3. Die Theorie von Rosen in einer teleparallelen Version

$$\begin{aligned}
& + d_h \vartheta^\alpha \wedge_{g,h} (e_\gamma \rfloor_{g,h}^* d_h \vartheta_\alpha) - \left(e_\gamma \rfloor \left(d_h \vartheta^\beta \wedge_{g,h} \vartheta_\beta \right) \right) \wedge_{g,h}^* \left(d_h \vartheta^\alpha \wedge_{g,h} \vartheta_\alpha \right) \\
& - (e_\gamma \rfloor d_h \vartheta_\alpha) \wedge_{g,h}^* d_h \vartheta^\alpha - d_h \vartheta^\alpha \wedge_{g,h} \vartheta_\alpha \wedge_{g,h} \left(e_\gamma \rfloor_{g,h}^* \left(d_h \vartheta^\beta \wedge_{g,h} \vartheta_\beta \right) \right) \\
& - \left(e_\gamma \rfloor \left(\vartheta_\alpha \wedge_{g,h} d_h \vartheta^\beta \right) \right) \wedge_{g,h}^* \left(d_h \vartheta^\alpha \wedge_{g,h} \vartheta_\beta \right) \\
& \quad - d_h \vartheta^\alpha \wedge_{g,h} \vartheta_\beta \wedge_{g,h} \left(e_\gamma \rfloor_{g,h}^* \left(\vartheta_\alpha \wedge_{g,h} d_h \vartheta^\beta \right) \right) \Big].
\end{aligned}$$

Dies liegt daran, daß

$$\begin{aligned}
\delta_{g,h}^* \psi & = \delta_{hg}^{**} \psi = {}_h^* \delta_g^* \psi = {}_hg^{**} \delta \psi - {}_hg^{**} \left(\delta \vartheta^\alpha \wedge_{g,h} (e_\alpha \rfloor \psi) \right) + {}_h^* \delta \vartheta^\alpha \wedge_{g,h} (e_\alpha \rfloor_g^* \psi) \\
& = {}_{g,h}^* \delta \psi - {}_{g,h}^* \left(\delta \vartheta^\alpha \wedge_{g,h} (e_\alpha \rfloor \psi) \right) + \delta \vartheta^\alpha \wedge_{g,h} (e_\alpha \rfloor_{g,h}^* \psi)
\end{aligned}$$

gilt. Im letzten Summanden kann der Hodge-Stern ${}_h^*$ an $\delta \vartheta^\alpha$ und dem inneren Produkt vorbeigezogen werden, da beide Operationen die Graduierung bezüglich h unbeeinflusst lassen und $\delta \vartheta^\alpha$ eine 0-Form bezüglich h ist.

Nachdem man d_h und δ vertauscht hat, ergibt sich nun aber ein kleiner Unterschied. Während bei den teleparallelen Theorien aus Kapitel 2 die $\delta \vartheta^\alpha$ 1-Formen sind, sind hier die $\delta \vartheta^\alpha$ bezüglich der h -Graduierung 0-Formen. Aus diesem Grunde ergibt sich ein Vorzeichenwechsel bei der Bestimmung der Feldgleichung, so daß diese

$$E_\alpha + d_h H_\alpha = -\Sigma_\alpha \quad (3.53)$$

lautet. Hierbei ist $E_\alpha := \frac{\partial V_{\text{Rosen}}}{\partial \vartheta^\alpha}$, $H_\alpha := -\frac{\partial V_{\text{Rosen}}}{\partial d_h \vartheta^\alpha}$ und $\Sigma_\alpha := \frac{\delta L_{\text{Materie}}}{\delta \vartheta^\alpha}$ für einen zu spezifizierenden Materie-Lagrangian L_{Materie} .

Die Überprüfung, ob die Rosen-Yilmaz-Metrik auch nach der Umschreibung noch Lösung der teleparallelen Rosen-Theorie ist, kann man leider nicht mit `Reduce` und dem `Excalc`-Paket durchführen, da man dort keine zweite unabhängige Graduierung einführen kann. Die Rechnungen per Hand erweisen sich als sehr aufwendig; insbesondere löst man für die Differentialbildung die hier eingeführte Struktur weitgehend wieder auf, so daß man fast die Originaltheorie von Rosen nachrechnet.

Der Nutzen der teleparallelen Umschreibung der Rosen-Theorie bleibt daher stark eingeschränkt. Die Terme $e_a^\alpha e_{b\alpha,i}$ in der Umrechnung erinnern zwar an die Koeffizienten γ_{ikl} der Møllerschen Theorie, eine den teleparallelen Theorien äquivalente Theorie, vgl. [Mey82]. Allerdings liegt in dieser Theorie, anders als hier, der Differentiationsindex nicht in einem anderen Raum.

A. Differentialgeometrische Definitionen

In diesem Anhang haben wir einige der grundlegenden Definitionen der Differentialgeometrie zusammengestellt, wie sie auch in jeder entsprechenden Vorlesung [Re92] bzw. Lehrbuch [KoN63] festgelegt werden. Da diese aber bei manchen Definitionen kleine Unterschiede zeigen, dient unsere Zusammenstellung der Fixierung der Begriffe für diese Arbeit und nebenbei als kleines Nachschlagewerk.

A.1. Affiner Raum

Ein reeller n -dimensionaler *affiner Raum* $A^n = (E, V, \varphi)$ besteht aus einer Menge E , einem reellwertigen n -dimensionalen Vektorraum V und einer Abbildung

$$\varphi : V \times E \longrightarrow E, \quad (\text{A.1})$$

für die die Regeln

$$\varphi(0, p) = p, \quad (\text{A.2a})$$

$$\varphi(v + w, p) = \varphi(v, \varphi(w, p)), \quad (\text{A.2b})$$

$$\forall p, q \in E \text{ existiert genau ein } v \in V : q = \varphi(v, p) \quad (\text{A.2c})$$

gelten. Die Menge E repräsentiert eine Punktmenge, bei der keiner der Punkte ausgezeichnet ist. Der Vektorraum V bezeichnet die Richtungen des affinen Raums und die Abbildung φ gibt an, wie man durch Abtragen eines Richtungsvektors von einem Punkt zu einem anderen gelangt.

A.2. Mannigfaltigkeiten

Topologische Mannigfaltigkeit

Gegeben sei ein nichtleerer Hausdorffraum M . Wir nennen $(U; x)$ bzw. $(U; x_1, \dots, x_n)$ eine *Karte* oder *Koordinatenumgebung* von M , wenn U eine nichtleere offene Teilmenge von M und

$$x = (x_1, \dots, x_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

A.3. Tangentialbündel

ein Homöomorphismus auf eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^n ist. Die einzelnen Funktionen $x_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ heißen *Koordinatenfunktionen* der Mannigfaltigkeit.

Existiert zu jedem Punkt $p \in M$ eine Karte $(U; x)$, wobei U eine offene Umgebung von p ist, so nennen wir die Menge dieser Karten einen *Atlas* \mathcal{A} . Ein nichtleerer Hausdorffraum M mit einem Atlas \mathcal{A} ist eine *topologische Mannigfaltigkeit*.

Differenzierbare Mannigfaltigkeit

Zwei Karten $(U; x)$ und $(V; y)$ heißen C^∞ -verträglich, wenn $U \cap V = \emptyset$ oder aber wenn $U \cap V \neq \emptyset$ und die sogenannte *Koordinatentransformation* $y \circ x^{-1}$ ein C^∞ -Diffeomorphismus ist, d. h. sowohl $y \circ x^{-1}$ als auch dessen Umkehrung $x \circ y^{-1}$ sind beliebig oft differenzierbar. Einen Atlas aus jeweils C^∞ -verträglichen Karten nennen wir einen C^∞ -Atlas A^∞ .

Der „maximale Atlas“

$$\tilde{\mathcal{A}} := \{(U; x) \in \mathcal{A} \mid (U; x) \text{ ist mit allen } (V; y) \in \mathcal{A}^\infty \text{ } C^\infty\text{-verträglich}\} \quad (\text{A.3})$$

heißt die vom Atlas \mathcal{A} erzeugte C^∞ -Struktur. Eine (parakompakte) topologische Mannigfaltigkeit mit einer C^∞ -Struktur $\tilde{\mathcal{A}}$ heißt *differenzierbare Mannigfaltigkeit* bzw. C^∞ -Mannigfaltigkeit.

A.3. Tangentialbündel

Eine Möglichkeit, den Tangentialraum zu definieren, beruht auf differenzierbaren Kurven $\alpha : J \rightarrow M$, wobei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall ist. Die Menge aller Paare (α, t) , bestehend aus einer Kurve α und einem Parameter $t \in J$, bezeichnen wir mit $\mathcal{K}_p M$. Hierbei ist p der Punkt, durch den die Kurve α zum Zeitpunkt t läuft, d. h. $\alpha(t) = p$.

Tangentialraum

In $\mathcal{K}_p M$ definieren wir eine Äquivalenzrelation $(\alpha, t) \sim (\beta, s)$ über

$$(f \circ \alpha)'(t) = (f \circ \beta)'(s) \quad (\text{A.4})$$

für alle beliebig oft differenzierbaren Abbildungen f , die auf einer Umgebung von p definiert sind.

Die Äquivalenzklasse von (α, t) bezeichnen wir mit $\dot{\alpha}(t)$ und nennen sie den *Tangentenvektor* der Kurve α zum Zeitpunkt t . Die Menge aller derartigen Äquivalenzklassen definieren wir als den *Tangentialraum* $T_p M$ von M in p .

Tangentialabbildung

Wenn eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ zwischen zwei Mannigfaltigkeiten gegeben ist, kann man eine Tangentialabbildung $T_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ über

$$T_p f(\dot{\alpha}(t)) := (f \circ \alpha)'(t) \quad (\text{A.5})$$

definieren. Ist diese Abbildung $T_p f$ in allen Punkten $p \in M$ surjektiv (injektiv), so nennt man f eine *Submersion* (*Immersion*).

Das Tangentialbündel und die Lie-Klammer

Mit der Definition des Tangentialraums haben wir jeweils einen unterschiedlichen Richtungsvektorraum für *jeden* Punkt $p \in M$ festgelegt. Dies verallgemeinert den *einen* Richtungsvektorraum V für *alle* Punkte eines affinen Raums (siehe A.1). Entsprechend ist die Mannigfaltigkeit die Verallgemeinerung der Punktmenge eines affinen Raums.¹ Wir vereinigen nun die einzelnen Richtungsvektorräume $T_p M$, so daß alle Richtungsvektoren wieder in einem Raum, dem *Tangentialbündel*

$$TM := \bigcup_{p \in M} T_p M, \quad (\text{A.6})$$

liegen. Dieses Tangentialbündel TM ist eine Mannigfaltigkeit der Dimension $2n$, wenn M eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit ist.

Die *Bündelprojektion* ist die surjektive Abbildung $\pi : TM \rightarrow M$, die einem Vektor $v \in T_p M$ den Punkt $p \in M$ zuordnet, an dem der Vektor anliegt. Karten des Tangentialbündels können mittels dieser Projektion und mit Hilfe von Basisvektorfeldern eingeführt werden. Solche Vektorfelder betrachten wir in Anhang B.2 auf Seite 77 im Zusammenhang mit Linearformen und dem Kotangentialbündel.

Wir definieren nun ein abstraktes Produkt auf dem Tangentialbündel, die *Lie-Klammer*, über

$$\begin{aligned} [\ , \] : TM \times TM &\rightarrow TM \\ (u, v) &\mapsto [u, v] := uv - vu. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Insbesondere ist die Lie-Klammer zweier Vektorfelder wieder ein Vektorfeld, vgl. mit Rechnung (1.9), während die beiden einzelnen Summanden nicht als Vektorfelder verstanden werden können, vgl. Rechnung (1.1).

Die Lie-Klammer ist \mathbb{R} -bilinear und antisymmetrisch

$$[u, v] = -[v, u] \quad (\text{A.8a})$$

und erfüllt die *Jacobi-Identität*

$$[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0, \quad (\text{A.8b})$$

wie man leicht nachrechnet.

¹Die Operation φ eines affinen Raums wird hier noch nicht verallgemeinert. Dies geschieht erst durch die affine Konnexion, die benachbarte (affine) Tangentialräume miteinander verbindet, siehe Abschnitt 1.2.2, Seite 14.

A.4. Faserbündel und Vektorraumbündel

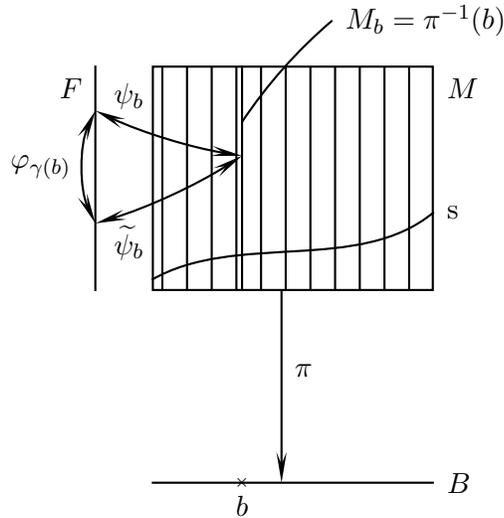


ABBILDUNG A.1.: Ein Faserbündel $\pi : M \rightarrow B$ mit Totalraum M , Basismannigfaltigkeit B , Projektion π und typischer Faser F . Für eine spezielle Faser M_b über b sind zwei lokale Trivialisierungen ψ_b und $\tilde{\psi}_b$ und die Linksaktion $\varphi_{\gamma(b)}$ (falls G -Verträglichkeit vorliegt) angedeutet. Die eingezeichnete in M verlaufende Kurve ist ein Schnitt $s : B \rightarrow M$.

A.4. Faserbündel und Vektorraumbündel

Seien M und B zwei C^∞ -Mannigfaltigkeiten. Eine surjektive Submersion $\pi : M \rightarrow B$ nennen wir *Faserraum* und $M_b := \pi^{-1}(b)$ für $b \in B$ die *Faser über b* . Weiterhin bezeichnen wir M als *Totalraum*, B als *Basis-Mannigfaltigkeit* und π als *Projektion*.

Sei U eine offene Teilmenge von B und F eine weitere C^∞ -Mannigfaltigkeit. Dann verstehen wir unter der *lokalen Trivialisierung* des Faserraums $\pi : M \rightarrow B$ einen beliebig oft differenzierbaren Diffeomorphismus $\psi : U \times F \rightarrow \pi^{-1}(U)$, für den $\pi \circ \psi$ die kanonische Projektion $\text{pr}_U : U \times F \rightarrow U$ ist. Existiert nun zu der *typischen Faser* F und jedem $b \in B$ eine lokale Trivialisierung, so nennen wir $(M, B, \pi : M \rightarrow B)$ ein *Faserbündel*. Zur Veranschaulichung dieser Situation dient Abbildung A.1.

***G*-Verträglichkeit**

Sei G eine *Liesche Gruppe*, das ist eine Menge, die zugleich als Mannigfaltigkeit und als Gruppe betrachtet werden kann. Damit dies konsistent geschehen kann, müssen sowohl die Gruppenmultiplikation $G \times G \rightarrow G, (g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2 \in G$ als auch die Inversion $G \rightarrow G, g \mapsto g^{-1}$ stetig sein.

Für je zwei lokale Trivialisierungen $\psi : U_1 \times F \rightarrow \pi^{-1}(U_1)$ und $\tilde{\psi} : U_2 \times F \rightarrow \pi^{-1}(U_2)$ gilt

$$\forall b \in U_1 \cap U_2 : f_{\psi, \tilde{\psi}} := \psi_b^{-1} \circ \tilde{\psi}_b \in \text{Diff}(F), \quad (\text{A.9})$$

wobei $\text{Diff}(F)$ die Menge der Diffeomorphismen auf F bezeichnet. Die beiden lokalen Trivialisierungen nennen wir G -*verträglich*, wenn die Abbildung $f_{\psi, \tilde{\psi}} : U_1 \cap U_2 \rightarrow \text{Diff}(F)$ mittels einer beliebig oft differenzierbaren Abbildung $\gamma : U_1 \cap U_2 \rightarrow G$ durch

$$\forall b \in U_1 \cap U_2 : f_{\psi, \tilde{\psi}} = \varphi_{\gamma(b)} \quad (\text{A.10})$$

dargestellt werden kann, wobei $\varphi : G \times F \rightarrow F$ eine Linksaktion von G auf F ist.

Vektorbündel

Ein Faserbündel $\pi : E \rightarrow B$ heißt ein *Vektorraumbündel* oder *Vektorbündel*, wenn

- die typische Faser ein Vektorraum V ist,
- jede Faser E_b ebenfalls mit der Struktur eines Vektorraums der Dimension von V versehen werden kann und
- die lokale Trivialisierung faserweise linear ist, d. h. ψ_b ist ein Vektorraum-Isomorphismus.

Das Tangentialbündel TM aus A.3 ist ein wichtiges Beispiel für ein Vektorbündel, wobei $E = TM$ und $B = M$. Wir bezeichnen häufig – wie im allgemeinen Sprachgebrauch üblich – den Totalraum als das Bündel anstelle der oben definierten korrekten Ausdrucksweise, in der das Bündel durch die Projektion π des Totalraums auf die Basismannigfaltigkeit gegeben ist.

Schnitte und Vektorfelder

Bei gegebenem Faserbündel nennt man Abbildungen $s : U \subseteq B \rightarrow E$ mit $\pi \circ s = \text{id}_U$ *Schnitte*, siehe auch Abbildung A.1. Für den Fall des Tangentialbündels werden die Schnitte $u : M \rightarrow TM$ mit $\pi \circ u = \text{id}_M$ meist *Vektorfelder* genannt.

A.5. Affines Tangentialbündel

Jeder Vektorraum kann auch als affiner Raum betrachtet werden (mit der Vektoraddition als Operation φ). Wenn wir diese Sichtweise betonen wollen, bezeichnen wir die affinen Tangentialräume mit A_pM und das Tangentialbündel mit AM .

Während die affine Betrachtung die Gleichwertigkeit aller Vektoren aus A_pM betont, kann man diese durch einen Schnitt $s : U \subseteq M \rightarrow AM$ aufheben und jeweils einen Vektor aus A_pM als Ursprung auszeichnen, siehe Abbildung A.1. Da dieser Ursprung in A_pM mit dem Punkt p der Mannigfaltigkeit eindeutig identifiziert werden kann (mittels des Schnittes s und der Projektion π des Tangentialbündels), nennt man die Auswahl eines solchen Schnittes *Verschmelzung* (englisch: *soldering*). Im Abschnitt 1.2.3 (Seite 16) über die Eichung der Translation haben wir beschrieben,

A.5. Affines Tangentialbündel

wie mittels einer sogenannten *horizontalen Struktur* die verlorene affine Invarianz (d. h. die verlorene Gleichwertigkeit aller Vektoren) in A_pM durch eine Diffeomorphismeninvarianz auf M ersetzt werden kann.

In den Abbildungen 1.1–1.5 auf den Seiten 20 ff. sind Punkte der Mannigfaltigkeit in den Bildern des Tangentialraums eingezeichnet. Da dabei gerade die Verbindung zwischen Diffeomorphismeninvarianz auf M und affiner Invarianz auf A_pM benutzt wird, muß man sich i. a. vorstellen, daß für diese Bilder eine Verschmelzung durchgeführt wurde und eine horizontale Struktur ausgewählt ist, vgl. hierzu die Hinweise zu den Abbildungen auf Seite 20.

B. Definitionen, Eigenschaften und Regeln des äußeren Kalküls

In diesem Anhang sammeln wir wichtige Regeln des äußeren Kalküls reellwertiger alternierender Formen, ohne diese zu beweisen. Diese Gesetzmäßigkeiten sind bereits in anderen Veröffentlichungen zusammengestellt (vergleiche z. B. [Hec95, He94]) und bewiesen (u. a. [Re92, Th86, ChBr82]) worden. Unsere Auflistung dient der Fixierung der Notation und des weiteren der Möglichkeit, bei Umformungen auf die Regeln verweisen zu können. Einige Regeln sind allerdings elementar und werden ständig angewendet. Auch wenn auf diese Eigenschaften nur selten verwiesen wird, haben wir hier diese Grundlagen vollständig aufgeführt.

Notation und Voraussetzungen

Für den Rest dieses und des folgenden Anhangs benutzen wir die folgenden Symbole und Voraussetzungen, sofern nichts anderes gesagt wird:

- Die zugrundeliegende C^∞ -Mannigfaltigkeit M hat die *Dimension* n . Den Raum beliebig oft differenzierbarer Abbildungen über M bezeichnen wir mit $C^\infty(M)$.
- Wir schreiben ψ und ϕ für alternierende \mathbb{R} -wertige Formen des jeweiligen Grades p bzw. q und wir verwenden ω für alternierende Formen beliebigen Grades. Werden i Formen eines festen Grades p bzw. q oder eines beliebigen Grades benötigt, so numerieren wir die Formen durch: ψ_1, \dots, ψ_i bzw. ϕ_1, \dots, ϕ_i oder $\omega_1, \dots, \omega_i$.
- Für beliebige Vektorfelder schreiben wir u und v . Auch hier numerieren wir i Vektorfelder durch, z. B. u_1, \dots, u_i .

B.1. Definition alternierender Formen

Ein *total antisymmetrisches* kovariantes Tensorfeld des Grades p ($p \in \mathbb{N}$) über dem Tangentialbündel TM wird *reellwertige alternierende Differentialform des Grades* p bzw. kurz p -Form genannt. Es handelt sich also um differenzierbare Funktionen

$$\psi : \overbrace{TM \times \cdots \times TM}^{p\text{-mal}} \longrightarrow \mathbb{R},$$

B.2. Basisfelder

die bei Permutation¹ π der einzusetzenden Vektorfelder ihr Vorzeichen dem Vorzeichen der Permutation² π anpassen,

$$\psi(u_1, \dots, u_n) = \operatorname{sgn}(\pi) \psi(u_{\pi(1)}, \dots, u_{\pi(n)}) ,$$

und die an jedem einzelnen Punkt $q_0 \in M$ eine p -lineare Funktion ψ_{q_0} bilden.

Für den Fall $p = 0$, bei dem die bisherige Definition nicht eindeutig zu verstehen ist, ergänzen wir, daß wir die C^∞ -Abbildungen auf M als Differentialformen nullten Grades, also als 0-Formen, bezeichnen wollen.

Wir erhalten so *Vektorbündel aller p -Formen über M* , das heißt nach Anhang A.4, daß an jedem Punkt $q_0 \in M$ die dort liegenden alternierenden p -linearen Formen einen Vektorraum bilden. Wir bezeichnen dieses Vektorbündel mit $\Lambda^p(TM)$.

Falls $p > n$, bilden die $\Lambda^p(TM)$ nur noch Bündel aus Nullvektorräumen $\{0\}$, da die in die ψ einzusetzenden Vektoren nicht mehr linear unabhängig sind. Aufgrund der total antisymmetrischen Eigenschaft dieser ψ , bedeutet dies, daß sie verschwinden müssen: $\psi_{p>n} \equiv 0$. Die direkte Summe der übrigen Bündel $\Lambda^p(TM)$ mit $0 \leq p \leq n$ bezeichnen wir mit

$$\Lambda(TM) := \bigoplus_{p=0}^n \Lambda^p(TM) .$$

B.2. Basisfelder

Karten für das Tangentialbündel konstruiert man über die Projektion $\pi : TM \rightarrow M$ und über die von den lokalen Trivialisierungen ψ_p faserweise gebildeten Isomorphismen, mit denen die T_pM auf die typische Faser von Vektorräumen, das ist einfach der \mathbb{R}^n , abgebildet werden (vgl. hierzu Anhang A.3 und A.4). Konkret nimmt man eine Karte $(U; x_1, \dots, x_n)$ von M , mit der man die n Funktionen $x_i \circ \pi$ bildet, und die n Koeffizienten eines Vektors aus TM bezüglich n Vektorbasisfeldern e_α . Hierbei sind die Vektorbasisfelder e_α Vektorfelder nach Abschnitt A.4, deren Werte $e_\alpha|_p$ am Punkt p faserweise linear unabhängig sind.

Die Auswahl der Vektorbasisfelder ist durch nichts ausgezeichnet. Sind insbesondere die Vektorbasisfelder unabhängig von der Karte $(U; x_1, \dots, x_n)$ der Mannigfaltigkeit gewählt, so nennt man die e_α ein *anholonomes Vektorbasisfeld* oder, zusammen mit $x_i \circ \pi$ *anholonome Koordinaten* für TM .

¹Eine *Permutation* π ist eine bijektive Abbildung der Menge $\{1, \dots, n\}$ auf sich selbst.

²Das *Vorzeichen der Permutation* π ist durch

$$\operatorname{sgn}(\pi) := \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\pi(j) - \pi(i)}{j - i}$$

gegeben.

Nach Auswahl der Karte $(U; x_1, \dots, x_n)$ für die Mannigfaltigkeit M kann man aber auch eine spezielle Wahl für das Vektorbasisfeld treffen: Dazu betrachtet man die Kurven x_i^{-1} in der Mannigfaltigkeit und wählt für $p \in U$ die Tangentialvektoren an diese Koordinatenlinien in p als Basis in $T_p M$ aus, die als *partielle Ableitungsfelder* und symbolisch mit $\partial_i|_p$ bezeichnet werden. Diese spezielle Wahl wird als *holonomes Vektorbasisfeld* bzw. zusammen mit $x_i \circ \pi$ als *holonome Koordinaten* für TM bezeichnet.

Auf dem Kotangentialbündel $T^*M := \Lambda^1(TM)$ wählen wir das zum Vektorbasisfeld duale *Kobasisfeld* ϑ^β aus 1-Formen, d. h. es gilt:

$$e_\alpha \rfloor \vartheta^\beta = \vartheta^\beta(e_\alpha) = \delta_\alpha^\beta . \quad (\text{B.1})$$

Die Koeffizienten einer 1-Form bzgl. dieser Kobasisfelder zusammen mit $x_i \circ \tau$, wobei $\tau : T^*M \rightarrow M$ die Projektion des Kotangentialbündels auf M ist, bilden eine Karte des $2n$ -dimensionalen Kotangentialbündels.

In vier Dimensionen wird das Vektorbasisfeld auch häufig *Vierbein* bzw. *Tetrade* genannt.

Hiermit kann jedes Vektorfeld nach dem Vektorbasisfeld entwickelt werden, nämlich $v = v^\alpha e_\alpha$. Insbesondere ist es möglich, auch die partiellen Ableitungsfelder *holonomer Koordinaten* zu entwickeln:

$$\partial_i = e_i^\alpha e_\alpha , \quad \text{wobei } e_i^\alpha \in \mathcal{C}^\infty(M) . \quad (\text{B.2a})$$

Entsprechend sind 1-Formen nach dem Kobasisfeld entwickelbar, $\psi = \psi_\beta \vartheta^\beta$, so auch speziell die Differentiale einer Koordinatenfunktion (das sind die dualen Kobasisfelder zu den partiellen Ableitungsfeldern):

$$dx^j = e^j_\beta \vartheta^\beta . \quad (\text{B.2b})$$

Umgekehrt kann man nun auch die beliebigen anholonomen Basis- und Kobasisfelder nach den speziellen holonomen Feldern analog zu den Gleichungen (B.2) entwickeln:

$$e_\alpha = e^i_\alpha \partial_i \quad \text{und} \quad \vartheta^\alpha = e_i^\alpha dx^i . \quad (\text{B.3})$$

Aufgrund von (B.1) erhält man für die Koeffizientenfunktionen der Entwicklungen die Bedingungen

$$\begin{aligned} e_i^\gamma e^j_\gamma &= \delta_i^j , & \text{denn } \delta_i^j &= \partial_i \rfloor dx^j = e_i^\gamma e_\gamma \rfloor (e^j_\delta \vartheta^\delta) , & \text{und} \\ e^k_\beta e_k^\alpha &= \delta_\beta^\alpha , & \text{wegen } \delta_\beta^\alpha &= e_\beta \rfloor \vartheta^\alpha = e^k_\beta \partial_k \rfloor (e_l^\alpha dx^l) . \end{aligned}$$

B.3. Äußeres Produkt \wedge

Das äußere Produkt ist eine Abbildung

$$\wedge : \Lambda(TM) \times \Lambda(TM) \longrightarrow \Lambda(TM)$$

mit der Eigenschaft

$$\Lambda^p(TM) \wedge \Lambda^q(TM) \subseteq \Lambda^{p+q}(TM) ,$$

die über die Abbildung

$$(\psi \wedge \phi)(u_1, \dots, u_{p+q}) := \frac{1}{p!q!} \sum_{\text{Permut. } \pi} \text{sgn}(\pi) \psi(u_{\pi(1)}, \dots, u_{\pi(p)}) \phi(u_{\pi(p+1)}, \dots, u_{\pi(p+q)})$$

definiert ist. Durch das äußere Produkt können also Formen höheren Grades aus denen niederen Grades gebildet werden.

Aufgrund dieser Definition gilt:

$$\text{Das äußere Produkt } \wedge \text{ ist } \mathcal{C}^\infty(M)\text{-bilinear ,} \quad (\text{B.4a})$$

$$\text{das äußere Produkt } \wedge \text{ ist assoziativ ,} \quad (\text{B.4b})$$

$$\phi \wedge \psi = (-1)^{qp} \psi \wedge \phi \quad (\text{graduier-symmetrisch}) . \quad (\text{B.4c})$$

Die sogenannten *Monomiale* $\vartheta^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \vartheta^{\alpha_p}$, die mit dem äußeren Produkt aus den Kobasisfeldern gebildet werden können, sind Basisfelder der $\Lambda^p(TM)$ -Bündel. Somit können alternierende Formen nach Monomialen der Kobasis entwickelt werden:

$$\psi = \frac{1}{p!} \psi_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \vartheta^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \vartheta^{\alpha_p} . \quad (\text{B.5})$$

B.4. Inneres Produkt \lrcorner

Das innere Produkt (Einsetzen von Vektorfeldern in Formen), welches mit $v \lrcorner \omega$ und auch $i_v \omega$ notiert wird, ist eine Abbildung

$$\lrcorner : TM \times \Lambda(TM) \longrightarrow \Lambda(TM)$$

mit der Eigenschaft

$$TM \lrcorner \Lambda^p(TM) \subseteq \Lambda^{p-1}(TM) ,$$

die über die Abbildung

$$(v \lrcorner \psi)(u_1, \dots, u_{p-1}) := \psi(v, u_1, \dots, u_{p-1}) = p(\psi(v))(u_1, \dots, u_{p-1}) \quad (\text{B.6})$$

definiert ist. Für 0-Formen wird

$$v \rfloor f \equiv 0$$

festgelegt.

Wir stellen hier die Eigenschaften und Regeln des inneren Produkts zusammen:

$$\text{Das innere Produkt } \rfloor \text{ ist } \mathcal{C}^\infty(M)\text{-bilinear ,} \quad (\text{B.7a})$$

$$v \rfloor (u \rfloor \omega) = -u \rfloor (v \rfloor \omega) , \quad (\text{B.7b})$$

$$v \rfloor (\psi \wedge \omega) = (v \rfloor \psi) \wedge \omega + (-1)^p \psi \wedge (v \rfloor \omega) \quad (\text{ungerade Leibniz-Regel}) . \quad (\text{B.7c})$$

Außerdem gilt die hilfreiche Regel

$$\vartheta^\mu \wedge (e_\mu \rfloor \psi) = p \psi , \quad (\text{B.8a})$$

die man über die Expansion (B.5) und die Regel (B.6) nachrechnet, und die analoge Regel

$$e_\mu \rfloor (\vartheta^\mu \wedge \psi) \stackrel{(\text{B.7c})}{=} \delta_\mu^\mu \psi - \vartheta^\mu \wedge (e_\mu \rfloor \psi) \stackrel{(\text{B.8a})}{=} (n - p) \psi . \quad (\text{B.8b})$$

B.5. Metrik

Ein symmetrisches nicht-entartetes kovariantes 2-Tensorfeld über dem Tangentialbündel TM nennen wir eine *Pseudo-Riemannsche Metrik* oder kurz *Metrik*. Metriken sind also differenzierbare Funktionen

$$g : TM \times TM \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit den Eigenschaften

$$g(u, v) = g(v, u) \quad (\text{Symmetrie}) , \quad (\text{B.9a})$$

$$\text{an jedem Punkt } q_0 \in M \text{ ist } g_{q_0} \text{ bilinear und} \quad (\text{B.9b})$$

$$\left(\forall u \in T_{q_0} M : g_{q_0}(u, v) = 0 \right) \iff v = 0 \quad (\text{Nichtentartung}) . \quad (\text{B.9c})$$

Als Tensor läßt sich die Metrik nach den Tensorprodukten der Kobasisfelder entwickeln:

$$g = g_{\alpha\beta} \vartheta^\alpha \otimes \vartheta^\beta \quad \text{mit } g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha} .$$

Als *Index* $\text{Ind}(g)$ definieren wir die Zahl der negativen Eigenwerte³ der Metrik g .

³Die Eigenwerte eines Tensors bestimmen sich über die Nullstellen λ_i des charakteristischen Polynoms $\det(g_{\alpha\beta} - \lambda \mathbf{1}_{\alpha\beta})$, wobei $\mathbf{1}_{\alpha\beta}$ der Einheitsensor $\text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{n\text{-mal}})$ ist.

B.6. Hodge-Stern \star

Der Hodge-Stern für die Bildung des Hodge-Dualen ist eine Abbildung

$$\star : \Lambda(TM) \longrightarrow \Lambda(TM)$$

mit der Eigenschaft

$$\star (\Lambda^p(TM)) \subseteq \Lambda^{n-p}(TM) ,$$

die über die Abbildung

$$\star \psi := \frac{1}{(n-p)!p!} \sqrt{|\det g_{\mu\nu}|} g^{\alpha_1\gamma_1} \dots g^{\alpha_p\gamma_p} \epsilon_{\alpha_1\dots\alpha_p\beta_1\dots\beta_{n-p}} \psi_{\gamma_1\dots\gamma_p} \vartheta^{\beta_1} \wedge \dots \wedge \vartheta^{\beta_{n-p}} \quad (\text{B.10})$$

definiert ist. Hierbei sind $\epsilon_{\alpha_1\dots\alpha_n}$ die Komponenten der total antisymmetrischen Levi-Civita Tensordichte (mit Gewicht -1), d. h. $\epsilon_{0\dots(n-1)} = +1$ in jedem Koordinatensystem. Der Hodge-Stern ist die einzige hier definierte Abbildung, in die die Metrik $g_{\alpha\beta}$ eingeht.

Wir führen nun die allgemeinen Regeln für den Hodge-Stern auf:

$$\text{Der Hodge-Stern } \star \text{ ist } \mathcal{C}^\infty(M)\text{-linear} , \quad (\text{B.11a})$$

$$\star \star \psi = (-1)^{p(n-p)+\text{Ind}(g)} \psi , \quad (\text{B.11b})$$

$$\star \psi \wedge \phi = \star \phi \wedge \psi \quad \text{für den gleichen Grad: } p = q . \quad (\text{B.11c})$$

Wenn ψ und ϕ nicht den gleichen Grad besäßen, hätten die alternierenden Formen auf der linken bzw. rechten Seite der letzten Gleichung auch unterschiedlichen Grad; daher wäre (B.11c) offensichtlich falsch.

Weiterhin gelten die folgenden Regeln:

$$e_\alpha \lrcorner \star \psi = \star (\psi \wedge \vartheta_\alpha) . \quad (\text{B.12a})$$

$$e_\alpha \lrcorner \psi = (-1)^{n(p+1)+\text{Ind}(g)} \star (\vartheta_\alpha \wedge \star \psi) , \quad (\text{B.12b})$$

$$\star (e_\alpha \lrcorner \psi) = (-1)^{p-1} \vartheta_\alpha \wedge \star \psi , \quad (\text{B.12c})$$

$$\star (e_\alpha \lrcorner \star \psi) = (-1)^{(n-1)(p+1)+\text{Ind}(g)} \psi \wedge \vartheta_\alpha . \quad (\text{B.12d})$$

Diese Regeln hängen voneinander ab, so daß man nur eine Gleichung beweisen muß. Danach folgen die anderen Gleichungen unter Verwendung der Gleichungen (B.4c) und (B.11b).

Nach diesen allgemeinen Regeln wollen wir nun einige spezielle Hodge-duale Formen definieren, die von besonderem Interesse sind:

$$\eta := \star 1 = \frac{1}{n!} \eta_{\alpha_1\dots\alpha_n} \vartheta^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \vartheta^{\alpha_n} \stackrel{(\text{B.10})}{=} \frac{1}{n!} \sqrt{|\det g_{\mu\nu}|} \vartheta^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \vartheta^{\alpha_n} , \quad (\text{B.13a})$$

$$\begin{aligned} \eta^{\alpha_1 \dots \alpha_p} &:= \star (\vartheta^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \vartheta^{\alpha_p}) = \frac{1}{(n-p)!} \eta^{\alpha_1 \dots \alpha_p} \epsilon_{\alpha_{p+1} \dots \alpha_n} \vartheta^{\alpha_{p+1}} \wedge \dots \wedge \vartheta^{\alpha_n} \\ &\stackrel{\text{(B.10)}}{=} \frac{1}{(n-p)!} \sqrt{|\det g_{\mu\nu}|} g^{\alpha_1 \beta_1} \dots g^{\alpha_p \beta_p} \epsilon_{\beta_1 \dots \beta_p \alpha_{p+1} \dots \alpha_n} \vartheta^{\alpha_{p+1}} \wedge \dots \wedge \vartheta^{\alpha_n} , \end{aligned} \quad (\text{B.13b})$$

$$\begin{aligned} \eta^{\alpha_1 \dots \alpha_n} &:= \star (\vartheta^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \vartheta^{\alpha_n}) \\ &\stackrel{\text{(B.10)}}{=} \sqrt{|\det g_{\mu\nu}|} g^{\alpha_1 \beta_1} \dots g^{\alpha_n \beta_n} \epsilon_{\beta_1 \dots \beta_n} = \frac{1}{\sqrt{|\det g_{\mu\nu}|}} \epsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_n} . \end{aligned} \quad (\text{B.13c})$$

Die Formen $\eta^{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ bilden – wie die Monomiale – Basisfelder der Räume $\Lambda^p(TM)$.

Man beachte insbesondere, daß die Funktion $\eta^{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ ausschließlich von den Metrikkoeffizienten $g_{\mu\nu}$ und den Koeffizienten der Levi-Civita Tensordichte abhängt, auch wenn die erste Zeile in (B.13c) scheinbar auf eine zusätzliche Abhängigkeit von den Kobasisfeldern hindeutet.

Aufgrund der Regel (B.12a) besteht die folgende Beziehung zwischen den Hodge-dualen Formen:

$$\eta^{\alpha_1 \dots \alpha_p}{}_{\mu} = e_{\mu} \lrcorner \eta^{\alpha_1 \dots \alpha_p} . \quad (\text{B.14a})$$

Eine ähnliche Formel kann man durch Regel (B.12c) erhalten:

$$\vartheta^{\mu} \wedge \eta^{\alpha_1 \dots \alpha_p} = \sum_{i=1}^p (-1)^{p-i} g^{\mu \alpha_i} \eta^{\alpha_1 \dots \alpha_{i-1} \alpha_{i+1} \dots \alpha_p} . \quad (\text{B.14b})$$

B.7. Äußere Ableitung d

Die äußere Ableitung ist eine Abbildung

$$d : \Lambda(TM) \longrightarrow \Lambda(TM)$$

mit der Eigenschaft

$$d\Lambda^p(TM) \subseteq \Lambda^{p+1}(TM) .$$

Durch die folgenden Regeln wird die äußere Ableitung d eindeutig festgelegt:

$$\text{Die äußere Ableitung } d \text{ ist } \mathbb{R}\text{-linear} , \quad (\text{B.15a})$$

$$d(\psi \wedge \omega) = (d\psi) \wedge \omega + (-1)^p \psi \wedge (d\omega) \quad (\text{ungerade Leibniz-Regel}) , \quad (\text{B.15b})$$

$$d(d\omega) = 0 \quad (\text{Nilpotenz}) . \quad (\text{B.15c})$$

$$\text{Für 0-Formen } f \text{ ist } df \text{ die gewöhnliche Ableitung.} \quad (\text{B.15d})$$

Die äußere Ableitung ist also eine metrikfreie Operation. Obwohl wir sie also schon früher hätten definieren können, führen wir sie erst hier nach der Definition der

B.8. Lie-Ableitung

Metrik und des Hodge-Sterns auf, damit wir auch direkt die äußere Ableitung der eben definierten metrikabhängigen Formen angeben können.

Äußere Ableitung der Metrik-Determinante

Die Herleitung der folgenden Formeln verlaufen analog den Herleitungen der entsprechenden Regeln für die Variation, die wir ausführlich in Anhang C.2 auf Seite 86 dargestellt haben.

Es ergibt sich somit für die äußere Ableitung der inversen Metrikkomponenten $g^{\alpha\beta}$, vgl. (C.3), die Beziehung

$$dg^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\gamma}g^{\delta\beta} dg_{\gamma\delta} . \quad (\text{B.16})$$

Für die äußere Ableitung der Metrik-Determinanten erhält man die Regel

$$d\left(\det(g_{\mu\nu})\right) = \det(g_{\mu\nu}) g^{\alpha\beta} dg_{\alpha\beta} . \quad (\text{B.17})$$

Äußere Ableitung der Hodge-dualen Formen

Auch die Herleitung dieser Regeln verläuft analog zu denen der Variation der Hodge-dualen Formen, siehe die ausführliche Rechnung im Anhang C.3 auf Seite 88. Man beachte allerdings, daß sich zwei Unterschiede ergeben, deren Auswirkungen sich gerade aufheben: Zum einen gilt für die Variation die *gerade* Leibnizregel (C.1c), für die äußere Ableitung hingegen die *ungerade* Leibnizregel (B.15b); zum anderen bleibt der Grad einer Form durch die Variation unverändert, während er sich durch die äußere Ableitung um 1 erhöht. Die Vorzeichenunterschiede durch die ungerade Leibnizregel bei der äußeren Ableitung werden durch die gradierte Kommutativitätsregel (B.4c) wieder ausgeglichen.

Es ergibt sich somit

$$d\eta^{\beta_1\dots\beta_p} = d\vartheta^\mu \wedge \left(e_\mu \lrcorner \eta^{\beta_1\dots\beta_p}\right) + \left(\vartheta^\kappa \wedge \eta^{\beta_1\dots\beta_p\lambda} - \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} \eta^{\beta_1\dots\beta_p}\right) dg_{\kappa\lambda} . \quad (\text{B.18a})$$

Für die spezielle Wahl einer orthonormalen Tetrade gilt $dg_{\alpha\beta} = 0$, so daß sich die einfachere Formel

$$d\eta^{\beta_1\dots\beta_p} = d\vartheta_\mu \wedge \eta^{\beta_1\dots\beta_p\mu} \quad (\text{B.18b})$$

ergibt.

B.8. Lie-Ableitung

Die *Lie-Ableitung* eines Tensorfeldes in bezug auf ein Vektorfeld u beschreibt die Änderung des Tensorfeldes, der es bei Transport entlang des Vektorfeldes unterliegt.

Diese Eigenschaft wird folgendermaßen erreicht: Wir definieren die Lie-Ableitung eines Vektorfeldes v entlang von u durch

$$\ell_u v = [u, v] \quad (\text{B.19a})$$

und die Lie-Ableitung einer alternierenden Form ω als Antikommutator von innerem Produkt und äußerer Ableitung:

$$\ell_v \omega := v \rfloor d\omega + d(v \rfloor \omega). \quad (\text{B.19b})$$

Man erkennt direkt, daß die Lie-Ableitung den Grad der Form unverändert läßt.

Die Lie-Ableitung erfüllt die folgenden Eigenschaften:

$$\text{Die Lie-Ableitung } \ell_v \text{ ist } \mathbb{R}\text{-linear,} \quad (\text{B.20a})$$

$$\text{für 0-Formen } f \text{ ist } \ell_u f \text{ die gewöhnliche Ableitung in Richtung } u, \quad (\text{B.20b})$$

$$\ell_v(\omega_1 \wedge \omega_2) = (\ell_v \omega_1) \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge (\ell_v \omega_2) \quad (\text{gerade Leibniz-Regel}), \quad (\text{B.20c})$$

$$\ell_v(d\omega) = d(\ell_v \omega), \quad (\text{B.20d})$$

$$[\ell_v, \ell_w] u = \ell_{[v, w]} u \quad \text{und} \quad [\ell_v, \ell_w] \omega = \ell_{[v, w]} \omega, \quad (\text{B.20e})$$

$$[\ell_v, i_u] \omega = i_{[v, u]} \omega \quad \text{bzw.} \quad \ell_v(u \rfloor \omega) - u \rfloor \ell_v \omega = [v, u] \rfloor \omega. \quad (\text{B.20f})$$

Die ersten vier Eigenschaften ergeben sich direkt aus der Definition (B.19), den Eigenschaften der äußeren Ableitung und des inneren Produkts.

Für den Beweis der Eigenschaft (B.20e) verwendet man die im Abschnitt 1.1.2 auf Seite 5 gezeigte Aussage, daß Ableitungen, die die Art des Objekts nicht ändern, durch ihre Wirkung auf Vektorfelder und Funktionen festgelegt sind. Damit reicht folgender

BEWEIS:

$$\begin{aligned} \text{Für Vektorfelder: } \quad [\ell_v, \ell_w] u &= \ell_v \ell_w u - \ell_w \ell_v u = \ell_v [w, u] - \ell_w [v, u] \\ &= [v, [w, u]] - [w, [v, u]] \stackrel{(\text{A.8a}), (\text{A.8b})}{=} [[v, w], u] = \ell_{[v, w]} u. \end{aligned}$$

$$\text{Für Funktionen: } \quad [\ell_v, \ell_w] f = v w(f) - w v(f) = [v, w] f = \ell_{[v, w]} f. \quad \blacksquare$$

Die Ableitungs-Kombinationen der Eigenschaft (B.20f) ergeben jeweils eine Derivation, die den Formengrad um 1 erniedrigt. Da jede Form nach (B.5) in Funktionen und 1-Formen entwickelt werden kann, braucht man die Eigenschaft bei solchen Derivationen nur für Funktionen und 1-Formen zu überprüfen. Somit:

BEWEIS: Durch das innere Produkt ergeben die Derivationen $[\ell_v, i_u] f$ und $i_{[v, u]} f$ für Funktionen f jeweils Null.

Für 1-Formen ϕ verwenden wir den Ausdruck für die Lie-Ableitung, der sich aus der zur Gleichung (1.6a) analogen allgemeinen Formel ergibt:

$$(\ell_v \phi)(u) = \ell_v(\phi(u)) - \phi([v, u]).$$

Damit erhält man

$$[\ell_v, i_u] \phi = \ell_v(\phi(u)) - i_u(\ell_v \phi) = \ell_v(\phi(u)) - \ell_v(\phi(u)) + \phi([v, u]) = i_{[v, u]} \phi. \quad \blacksquare$$

B.9. Spezielle Operatoren

Wir definieren hier noch einige weitere Operatoren, die sich als Kombinationen der bisher eingeführten Abbildungen darstellen lassen und listen einige Regeln für diese Operationen auf.

Kodifferential

Wir definieren das Kodifferential d^\dagger zur äußeren Ableitung d über

$$d^\dagger \psi = (-1)^{n(p-1)+\text{Ind}(g)} *d*\psi . \quad (\text{B.21})$$

Das Kodifferential erniedrigt den Formengrad um 1, bildet also p -Formen auf $(p-1)$ -Formen ab.

Die folgenden beiden Eigenschaften,

$$\text{das Kodifferential } d^\dagger \text{ ist } \mathbb{R}\text{-linear} , \quad (\text{B.22a})$$

$$d^\dagger (d^\dagger \omega) = 0 \quad (\text{Nilpotenz}) \quad (\text{B.22b})$$

ergeben sich direkt aus den entsprechenden Regeln (B.15a), (B.11a) und (B.15c) für das äußere Produkt und den Hodge-Operator.

Wellen- bzw. d'Alembert-Operator

Der *Wellen-* bzw. *d'Alembert-Operator* ist als Antikommutator der äußeren Ableitung und des Kodifferentials definiert:

$$\square := dd^\dagger + d^\dagger d = -d*d* - *d*d . \quad (\text{B.23})$$

Es gelten die folgenden Vertauschungsregeln:

$$d \square = \square d , \quad (\text{B.24a})$$

$$* \square = \square * , \quad (\text{B.24b})$$

$$d^\dagger \square = \square d^\dagger . \quad (\text{B.24c})$$

C. Variationen und äußerer Kalkül

Der Hodge-Stern $*$ und die Variation δ vertauschen i. a. nicht. Die Annahme der Vertauschbarkeit, $\delta^*\omega = *\delta\omega$, impliziert eine Einschränkung auf spezielle Variationen, nämlich auf lokale Lorentz-Transformationen; vgl. Abschnitt 3.1.2, Seite 56. Durch die Forderung (C.1b), die wir gleich stellen werden, werden diese speziellen Variationen noch weiter auf *globale* Lorentz-Transformationen begrenzt.

In verschiedenen Artikeln, z. B. [Schw79] und [Schw80], wurde die Vertauschbarkeit angenommen, ohne die resultierende Einschränkung zu bemerken oder zu erwähnen. Da die korrekte Abhängigkeit für unsere Rechnungen und zur Untersuchung der eingeschränkten Variationen entscheidend ist, leiten wir den richtigen Zusammenhang in diesem Anhang her.

Wir beginnen mit vorbereitenden Rechnungen und einfachen Eigenschaften, die wir für die allgemeinen Variationen voraussetzen.

Grundlegende Eigenschaften

Für unsere Variationen δ setzen wir folgende Eigenschaften voraus:

$$\text{Die Variation } \delta \text{ ist } \mathbb{R}\text{-linear ,} \quad (\text{C.1a})$$

sie vertauscht mit der äußeren Ableitung,

$$[d, \delta] = 0 \quad (\text{Kommutativität}) , \quad (\text{C.1b})$$

und erfüllt die (gerade) Leibnizregel

$$\delta(\omega_1 \wedge \omega_2) = \delta\omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \delta\omega_2 . \quad (\text{C.1c})$$

C.1. Variation der Kobasis-Produkte

Analog zur Regel (B.8a) kann man die Gesetzmäßigkeit

$$\frac{1}{p!} \psi_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \delta (\vartheta^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \vartheta^{\alpha_p}) = \delta \vartheta^\mu \wedge (e_\mu \lrcorner \psi) \quad (\text{C.2})$$

nachrechnen. Die Funktion $\psi_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$, vgl. (B.5), steht hier vor der Variation, da sie von anderen Feldgrößen, nach denen ebenfalls variiert wird, abhängen kann.

C.2. Variation und Metrik

BEWEIS: Zum Beweis beginnen wir mit der rechten Seite:

$$\begin{aligned}\delta\vartheta^\mu \wedge (e_\mu \lrcorner \psi) &= \delta\vartheta^\mu \wedge \frac{1}{(p-1)!} \psi_{\mu\alpha_2\dots\alpha_p} \vartheta^{\alpha_2} \wedge \dots \wedge \vartheta^{\alpha_p} \\ &= \frac{1}{p!} \psi_{\mu\alpha_2\dots\alpha_p} p (\delta\vartheta^\mu) \wedge \vartheta^{\alpha_2} \wedge \dots \wedge \vartheta^{\alpha_p} \\ &\stackrel{(C.1c)}{=} \frac{1}{p!} \psi_{\mu\alpha_2\dots\alpha_p} \delta (\vartheta^\mu \wedge \vartheta^{\alpha_2} \dots \wedge \vartheta^{\alpha_p}) .\end{aligned}$$

■

C.2. Variation und Metrik

Die Metrikkomponenten sind i. a. von den Kobasisfeldern unabhängig, so daß wir unabhängig nach $\delta\vartheta^\alpha$ und $\delta g_{\alpha\beta}$ variieren, wobei die Position der Indizes fest ist.

Die *inversen Metrikkomponenten* sind durch

$$g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha \tag{C.3}$$

bestimmt, so daß wir durch Variation dieser Gleichung und wegen $\delta(\delta_\gamma^\alpha) = 0$ die Beziehung

$$\delta g^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\gamma} g^{\delta\beta} \delta g_{\gamma\delta} \tag{C.4}$$

erhalten.

Variation der Metrik-Determinanten

Bei der Definition der Hodge-dualen Formen tritt ein Ausdruck mit der *Determinanten der Metrik* auf.

DEFINITION: Zu jedem Endomorphismus $A : V \rightarrow V$ existiert genau eine Zahl $\det(A) \in \mathbb{R}$, so daß

$$\forall \omega \in \Lambda^n(V), \forall v_1, \dots, v_n \in V : \quad \omega(Av_1, \dots, Av_n) = \det(A) \omega(v_1, \dots, v_n) .$$

Diese Zahl nennen wir *Determinante des Endomorphismus*.

Um jetzt die Variation der Metrik-Determinanten ausrechnen zu können, leiten wir zunächst her, wie man diese Determinante in anderer Form darstellen kann. Dazu betrachten wir die reellwertige Differentialgleichung

$$f' = \text{Spur}(A) f \quad \text{mit } A \in \text{End}(\mathbb{R}^n) . \tag{C.5}$$

Die Funktion

$$f_1(t) = \exp(t \text{Spur}(A)) \tag{C.6a}$$

löst die Differentialgleichung (C.5), wie man direkt sieht. Ebenso wird (C.5) durch die Funktion

$$f_2(t) = \det(\exp(tA)) \tag{C.6b}$$

gelöst. Um dies zu erkennen, muß man sich erinnern, daß die Differentialrechnung auf Vektorräumen das Differential der Determinante mit

$$D_A \det(X \circ A) = \text{Spur}(X) \det(A)$$

angibt. Hiermit zeigt man: Falls \tilde{y} Lösung der endomorphismenwertigen Differentialgleichung $\tilde{y}' = A \circ \tilde{y}$ ist, so ist $y := \det(\tilde{y})$ Lösung von (C.5):

$$\begin{aligned} \det(\tilde{y}) &= D_t(\det(\tilde{y}))(1) \\ &= D_{\tilde{y}(t)} \det(\underbrace{D_t \tilde{y}(1)}_{=\tilde{y}'=A \circ \tilde{y}}) \\ &= \text{Spur}(A) \det(\tilde{y}) . \end{aligned}$$

Die Funktion $\tilde{y} := \exp(tA)$ erfüllt die Voraussetzung, so daß (C.6b) in der Tat Lösung der Differentialgleichung (C.5) ist.

Da beide Lösungen (C.6a) und (C.6b) im Punkt $t = 0$ den gleichen Wert besitzen, $f_1(0) = f_2(0) = 1$, gilt nach dem Eindeutigkeitssatz für die Differentialgleichung (C.5) sogar $f_1 \equiv f_2$. Insbesondere gilt für $t = 1$:

$$\exp(\text{Spur}(A)) = \det(\exp(A)) . \quad (\text{C.7})$$

Da sich die Matrix-Darstellungen von Endomorphismen und die von Metriken nicht unterscheiden, wenden wir diese Formel auf unsere Metrikkomponenten an:

$$\det(g_{\mu\nu}) = \det(\exp(\ln(g_{\mu\nu}))) = \exp(\text{Spur}(\ln(g_{\mu\nu}))) .$$

Somit gilt

$$\text{Spur}(\ln(g_{\mu\nu})) = \ln(\det(g_{\mu\nu})) . \quad (\text{C.8})$$

Aufgrund der Linearität der Spur können wir diese Gleichung einfach unter Verwendung der Kettenregel variieren,

$$g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} = \frac{1}{\det(g_{\mu_1\nu_1})} \delta(\det(g_{\mu_2\nu_2})) ,$$

und erhalten schließlich für die Variation der Metrikdeterminanten

$$\delta(\det(g_{\mu\nu})) = \det(g_{\mu\nu}) g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} . \quad (\text{C.9})$$

Für die Variation der Wurzel der Determinanten ergibt sich, erneut mit Hilfe der Kettenregel:

$$\delta \sqrt{\det(g_{\mu\nu})} = \frac{1}{2} \sqrt{\det(g_{\mu\nu})} g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} . \quad (\text{C.10})$$

C.3. Variation der $\eta^{\beta_1 \dots \beta_p}$

Wir können nun die Variation der Hodge-dualen p -Formen $\eta^{\beta_1 \dots \beta_p}$ ausrechnen:

$$\begin{aligned}
 \delta \eta^{\beta_1 \dots \beta_p} &= \frac{1}{(n-p)!} \delta \left(\eta^{\beta_1 \dots \beta_p} \eta_{\beta_{p+1} \dots \beta_n} \vartheta^{\beta_{p+1}} \wedge \dots \wedge \vartheta^{\beta_n} \right) \\
 &\stackrel{(B.13b)}{=} \frac{1}{(n-p)!} \eta^{\beta_1 \dots \beta_p} \eta_{\beta_{p+1} \dots \beta_n} \delta \left(\vartheta^{\beta_{p+1}} \wedge \dots \wedge \vartheta^{\beta_n} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{(n-p)!} \delta \left(\sqrt{|\det g_{\mu\nu}|} g^{\alpha_1 \beta_1} \dots g^{\alpha_p \beta_p} \epsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_p \beta_{p+1} \dots \beta_n} \right) \vartheta^{\beta_{p+1}} \wedge \dots \wedge \vartheta^{\beta_n} \\
 &\stackrel{(C.1c), (C.10), (C.4), (B.13b)}{=} \frac{n-p}{(n-p)!} \eta^{\beta_1 \dots \beta_p} \eta_{\beta_{p+1} \beta_{p+2} \dots \beta_n} \left(\delta \vartheta^{\beta_{p+1}} \right) \wedge \left(\vartheta^{\beta_{p+2}} \wedge \dots \wedge \vartheta^{\beta_n} \right) \\
 &\quad + \left(\frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} \eta^{\beta_1 \dots \beta_p} - \sum_{i=1}^p g^{\kappa\beta_i} \eta^{\beta_1 \dots \beta_{i-1} \lambda \beta_{i+1} \dots \beta_p} \right) \delta g_{\kappa\lambda} \\
 &\stackrel{(B.13b)}{=} \delta \vartheta^{\beta_{p+1}} \wedge \eta^{\beta_1 \dots \beta_p} \eta_{\beta_{p+1}} + \left(\frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} \eta^{\beta_1 \dots \beta_p} \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{i=1}^p (-1)^{p-i} g^{\kappa\beta_i} g^{\lambda\rho} e_{\rho} \rfloor \eta^{\beta_1 \dots \beta_{i-1} \lambda \beta_{i+1} \dots \beta_p} \right) \delta g_{\kappa\lambda} \\
 &\stackrel{(B.14b)}{=} \delta \vartheta^{\beta_{p+1}} \wedge \eta^{\beta_1 \dots \beta_p} \eta_{\beta_{p+1}} + \left(\frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} \eta^{\beta_1 \dots \beta_p} - g^{\lambda\rho} e_{\rho} \rfloor \left(\vartheta^{\kappa} \wedge \eta^{\beta_1 \dots \beta_p} \right) \right) \delta g_{\kappa\lambda} .
 \end{aligned}$$

Also gilt:

$$\delta \eta^{\beta_1 \dots \beta_p} = \delta \vartheta^{\mu} \wedge \left(e_{\mu} \rfloor \eta^{\beta_1 \dots \beta_p} \right) + \left(\vartheta^{\kappa} \wedge \eta^{\beta_1 \dots \beta_p \lambda} - \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} \eta^{\beta_1 \dots \beta_p} \right) \delta g_{\kappa\lambda} . \quad (C.11a)$$

Für die spezielle Wahl einer orthonormalen Tetrade gilt $\delta g_{\alpha\beta} = 0$, so daß sich die einfachere Formel

$$\delta \eta^{\beta_1 \dots \beta_p} = \delta \vartheta_{\mu} \wedge \eta^{\beta_1 \dots \beta_p \mu} \quad (C.11b)$$

ergibt.

C.4. Variation und der Hodge-Stern

Nun können wir das wesentliche Ergebnis dieses Anhangs herleiten.

Für eine p -Form ϕ gilt:

$$\vartheta^{\beta_1} \wedge \dots \wedge \vartheta^{\beta_p} \wedge \star \phi \stackrel{(B.11c)}{=} \phi \wedge \star \left(\vartheta^{\beta_1} \wedge \dots \wedge \vartheta^{\beta_p} \right) \stackrel{(B.13b)}{=} \phi \wedge \eta^{\beta_1 \dots \beta_p} .$$

Die gerade Leibniz-Regel (C.1c) für die Variation führt zu

$$\delta \left(\vartheta^{\beta_1} \wedge \dots \wedge \vartheta^{\beta_p} \right) \wedge \star \phi + \vartheta^{\beta_1} \wedge \dots \wedge \vartheta^{\beta_p} \wedge \delta \star \phi = \delta \phi \wedge \eta^{\beta_1 \dots \beta_p} + \phi \wedge \delta \eta^{\beta_1 \dots \beta_p} .$$

Wir kürzen $\psi_p := \vartheta^{\beta_1} \wedge \dots \wedge \vartheta^{\beta_p}$ ab und erhalten mit der Variation von $\eta^{\beta_1 \dots \beta_p}$ nach Gleichung (C.11a):

$$\begin{aligned}
 \psi_p \wedge \delta^* \phi &= \delta \phi \wedge \eta^{\beta_1 \dots \beta_p} - \delta \psi_p \wedge \star \phi + \phi \wedge \delta \vartheta^\mu \wedge \eta^{\beta_1 \dots \beta_p}{}_\mu \\
 &\quad + \phi \wedge \left(\vartheta^\kappa \wedge \eta^{\beta_1 \dots \beta_p \lambda} - \frac{1}{2} g^{\kappa \lambda} \eta^{\beta_1 \dots \beta_p} \right) \delta g_{\kappa \lambda} \\
 &\stackrel{(B.13b), (B.11c)}{=} \psi_p \wedge \star (\delta \phi) - \delta \psi_p \wedge \star \phi + \phi \wedge \delta \vartheta^\mu \wedge (e_\mu \rfloor \eta^{\beta_1 \dots \beta_p}) \\
 &\quad + \left(\phi \wedge \vartheta^\kappa \wedge (g^{\lambda \rho} e_\rho \rfloor \eta^{\beta_1 \dots \beta_p}) - \frac{1}{2} \psi_p \wedge g^{\kappa \lambda} \star \phi \right) \delta g_{\kappa \lambda} \\
 &\stackrel{(B.4c), (C.2)}{=} \psi_p \wedge \left(\star (\delta \phi) - \frac{1}{2} \star \phi g^{\kappa \lambda} \delta g_{\kappa \lambda} \right) - \delta \vartheta^\mu \wedge (e_\mu \rfloor \psi_p) \wedge \star \phi \\
 &\quad + (-1)^p \delta \vartheta^\mu \wedge \phi \wedge (e_\mu \rfloor \star \psi_p) + (-1)^p g^{\lambda \rho} e_\rho \rfloor (\phi \wedge \vartheta^\kappa) \wedge \star \psi_p \delta g_{\kappa \lambda} \\
 &\stackrel{(B.11c), (B.12c)}{=} \psi_p \wedge \left(\star (\delta \phi) - \frac{1}{2} \star \phi g^{\kappa \lambda} \delta g_{\kappa \lambda} \right) + \delta \vartheta^\mu \wedge (e_\mu \rfloor (\phi \wedge \star \psi_p) \\
 &\quad - (e_\mu \rfloor \phi) \wedge \star \psi_p - e_\mu \rfloor (\psi_p \wedge \star \phi) + (-1)^p \psi_p \wedge (e_\mu \rfloor \star \phi) \\
 &\quad \quad \quad + \psi_p \wedge \vartheta^\lambda \wedge \star (\phi \wedge \vartheta^\kappa) \delta g_{\kappa \lambda} \\
 &\stackrel{(B.11c), (B.12a)}{=} \psi_p \wedge \star (\delta \phi) - \psi_p \wedge \star (\delta \vartheta^\mu \wedge (e_\mu \rfloor \phi)) + \psi_p \wedge \delta \vartheta^\mu \wedge (e_\mu \rfloor \star \phi) \\
 &\quad - \psi_p \wedge \frac{1}{2} \star \phi g^{\kappa \lambda} \delta g_{\kappa \lambda} + \psi_p \wedge \vartheta^\lambda \wedge g^{\kappa \rho} e_\rho \rfloor (\star \phi) \delta g_{\kappa \lambda} .
 \end{aligned}$$

Da $\psi_p := \vartheta^{\beta_1} \wedge \dots \wedge \vartheta^{\beta_p}$ aus p beliebigen Kobasisfeldern zusammengesetzt ist, gilt schließlich für beliebige p -Formen ϕ :

$$\begin{aligned}
 \delta^* \phi &= \star \delta \phi - \star (\delta \vartheta^\alpha \wedge (e_\alpha \rfloor \phi)) + \delta \vartheta^\alpha \wedge (e_\alpha \rfloor \star \phi) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \star \phi g^{\alpha \beta} \delta g_{\alpha \beta} + \vartheta^\alpha \wedge g^{\beta \gamma} e_\gamma \rfloor (\star \phi) \delta g_{\alpha \beta} . \quad (C.12a)
 \end{aligned}$$

Für die spezielle Wahl orthogonaler Tetraden gilt $\delta g_{\alpha \beta} = 0$, so daß die beiden Summanden in der letzten Zeile von (C.12a) wegfallen. Es verbleibt die einfachere Formel

$$\delta^* \phi = \star \delta \phi - \star (\delta \vartheta^\alpha \wedge (e_\alpha \rfloor \phi)) + \delta \vartheta^\alpha \wedge (e_\alpha \rfloor \star \phi) . \quad (C.12b)$$

D. Verwendete Computeralgebra-Programme

In dieser Arbeit haben wir für verschiedene Tests und Überprüfungen das Computeralgebra-Programm `Reduce` [St93] mit dem Zusatzpaket `Excalc` [Schr87], das die Regeln des äußeren Kalküls implementiert, verwendet. In Computeralgebra-Programmen kann man zwar keine abstrakten Identitäten allgemein nachprüfen, es hat sich jedoch als sehr effektiv herausgestellt, sie mit speziellen Ansätzen bzw. Lösungen zu testen, für die sie auch erfüllt sein müssen.

Wir stellen im folgenden zunächst die modularen Programm-Teile vor, mit denen die verschiedenen geometrischen Größen, z.B. die Krümmung, berechnet werden. Dann folgt eine Auflistung der verwendeten allgemeinen Ansätze und der speziellen Lösungen (bestimmter Feldgleichungen). Als letztes folgen die Programme für die Noether-Identitäten und für die Feldgleichungen.

Die einzelnen `Reduce`-Programme und die Ergebnisse in den Output-Dateien der `Reduce`-Läufe stehen auch in zwei gepackten Files unter

<http://www.ph-cip.uni-koeln.de/~muench/texte/diplom/>

zur Verfügung.

D.1. Die modularen Programmteile

In den Files mit den allgemeinen Ansätzen definieren wir jeweils eine Kobasis ϑ^α und die Torsion T^α . Das folgende Programm stellt durch Berechnung der Konnexion aus den Ansätzen für Kobasis und Torsion sicher, daß die 1. Cartansche Strukturgleichung (1.10b) automatisch erfüllt ist. Die Berechnung der Konnexion erfolgt dabei über die Zerlegung $\Gamma_\beta^\alpha = \tilde{\Gamma}_\beta^\alpha - K_\beta^\alpha$ in Christoffelsymbol und Verdrehung. Die Berechnung des Christoffelsymbols ist in `Excalc` implementiert, die Berechnung der Verdrehung führen wir nach Gleichung (2.35b) durch:

```
%  
% file connection.exi  
% 1997-06-30  
% UM (Uwe Münch)
```

D.1. Die modularen Programmteile

```

5 %
  % computes the connections
  % Input : coframe o(a), frame e(a), torsion torsion2(a)
  % Output: contorsion contor1(a,b), Levi-Civita connection chris1(a,b),
  %         connection conn1(a,b)
10 %
  % conventions: Hehl et. al., PRs 258 (1995)

  %*****
  % computing contortion *
15 %*****
  pform otor3=3,etor1(a,b)=1,contor1(b,c)=1$
  antisymmetric contor1$

  otor3      := torsion2(a)^o(-a)$
20 etor1(a,b) := e(a)|torsion2(b)$
  contor1(a,b) := etor1(a,b)-etor1(b,a)-(1/2)*(e(a)|(e(b)|otor3))$

  clear otor3,etor1$

25 %*****
  % Levi-Civita connection and total connection *
  %*****
  pform conn1(a,b)=1, chris1(a,b)=1$
  antisymmetric conn1, chris1$
30
  riemannconx chris$
  % because of our conventions, we have to take the transpose
  chris1(a,b):=chris(b,a)$
  clear chris$
35 conn1(a,b):=chris1(a,b)-contor1(a,b)$
  end$

```

Das folgende Programm berechnet die Krümmung. Die 2. Cartansche Strukturgleichung (1.12a) ist automatisch erfüllt, da sie zur Definition der Krümmung verwendet wird. Da die Konnexion aufgespalten in Riemannschen und post-Riemannschen Anteil vorliegt, berechnen wir auch bei der Krümmung die entsprechenden Anteile:

```

%
% file curvature.exi
% 1997-06-12
% UM (Uwe Münch)
5 %
  % computes the curvatures
  % Input: contor1(a,b), chris1(a,b)
  % Output: riem2(a,b), curv2(a,b)
  %
10 % conventions: Hehl et. al., PRs 258 (1995)

  pform curv2(a,b)=2,riem2(a,b)=2$
  antisymmetric curv2,riem2$

```

D.2. Verwendete Ansätze und Lösungen

```

15 riem2(a,b):=d chris1(a,b) + chris1(-c,b)^chris1(a,c)$
   curv2(a,b):=riem2(a,b)-d contor1(a,b)+contor1(-c,b)^contor1(a,c)
       -chris1(-c,b)^contor1(a,c)-contor1(-c,b)^chris1(a,c)$
   curv2(a,b):=curv2(a,b);
   end$

```

Das folgende Programm berechnet E_α , H_α und $m^{\alpha\beta}$ nach den entsprechenden Gleichungen (2.18b), (2.18a) bzw. (2.20) für den quadratischen Teleparallelismus (2.8):

```

%
% file telepara.exi
% 1997-09-07
% UM (Uwe Münch)
5 %
% defines the Lagrangian, the  $E_\alpha$ , the  $H_\alpha$  and the  $m^{\alpha\beta}$ 
% for the teleparallism, see equations (2.8), (2.18b), (2.18a) and (2.20)
% Input : coframe o(a), frame e(a), torsion torsion2(a),
% Output: htr2(a), Lagrangian vtr4, trenergy3(a), metreenergy4(a,b)
10 % Constants: rho1, rho2, rho4
%
% conventions: Hehl et. al., PRs 258 (1995)

pform htr2(a)=2,vtr4=4, trenergy3(a)=3, metreenergy4(a,b)=4$
15 htr2(a):= (-1/(10**2))* (rho1 * # torsion2(a) + rho2 * (o(a) ^
      # (torsion2(-d) ^ o(d))) + rho4 * o(d) ^ # (o(a)^torsion2(-d)))$

vtr4 := -(1/2)*(torsion2(a)^htr2(-a))$
20 trenergy3(-a) := (1/(2*10**2))*(rho1 * e(-a) _| (torsion2(b) ^ #
torsion2(-b)) - 2 * rho1 * (e(-a) _| torsion2(b)) ^ # torsion2(-b) +
rho2 * e(-a)_| (torsion2(c) ^ o(-c) ^ # (torsion2(d) ^ o(-d))) +
rho4 * e(-a)_| (torsion2(d) ^ o(-c) ^ # (torsion2(c) ^ o(-d))) -
25 2 * rho2 * (e(-a)_| torsion2(c)) ^ o(-c) ^ # (torsion2(d) ^ o(-d)) -
2 * rho4 * (e(-a)_| torsion2(d)) ^ o(-c) ^ # (torsion2(c) ^ o(-d)))$

metreenergy4(a,b) := (1/(2*10**2)) * (2 * rho1 * torsion2(a) ^ # torsion2(b) +
2 * rho2 * (torsion2(a) ^ o(b)) ^ # (torsion2(c) ^ o(-c)) +
30 2 * rho2 * (torsion2(b) ^ o(a)) ^ # (torsion2(c) ^ o(-c)) +
2 * rho4 * (torsion2(a) ^ o(-c)) ^ # (torsion2(c) ^ o(b)) +
2 * rho4 * (torsion2(b) ^ o(-c)) ^ # (torsion2(c) ^ o(a)) -
(e(a) _| o(b)) * (2 * 10**2) * vtr4
+ 2 * rho1 * torsion2(c) ^ o(a) ^ (e(b) _| (# torsion2(-c)))
35 + 2 * rho2 * (torsion2(c) ^ o(-c)) ^ o(a) ^ (e(b) _| (# (torsion2(d) ^ o(-d))))
+ 2 * rho4 * (torsion2(c) ^ o(-d)) ^ o(a) ^ (e(b) _| (# (torsion2(d) ^ o(-c))))$
end$

```

D.2. Verwendete Ansätze und Lösungen

Starke Identitäten sind solche, die direkt für einen gewählten Lagrangian gültig sind, ohne daß die Feldgrößen die Feldgleichungen erfüllen müssen. Zu ihrer Überprüfung

D.2. Verwendete Ansätze und Lösungen

reichen also allgemeine Ansätze aus. Sind hingegen die Identitäten nur für Lösungen der Feldgleichungen richtig, so sind sie *schwache Identitäten*. Hier benötigen wir für unsere Test also die konkreten Lösungen.

Um beide Arten von Identitäten abzudecken, sind die folgenden Lösungen der Feldgleichungen jeweils in zwei Input-Files aufgeteilt: das für den Ansatz und das für die konkrete Lösung. In den Ansatz-Dateien werden jeweils die Strukturen der Kobasis ϑ^α und der Torsion T^α festgelegt. Die hier noch offen gelassenen Funktionen werden dann in den Lösungs-Files konkret angegeben.

Wir haben fünf Ansätze und Lösungen verwendet. Mehr zu diesen Ansätzen steht im Abschnitt 2.6 auf Seite 50.

- Teleparallele Schwarzschild-Lösung

In [Bae80] hat P. Baekler die teleparallele Schwarzschild-Lösung vorgestellt, die wir hier verwendet haben. Der Ansatz führt zu folgendem Reduce-Code:

```

%
% file sst-ansatz.exi
% 1997-06-12
% UM (Uwe Münch)
5 %
% Ansatz for Schwarzschild teleparallel (sst)
%
% conventions: Hehl et.al., PRs 258 (1995)
%
10 % built on: kn-ansatz.exi, UM, 1997-06-12

sin(theta)**2:=1-cos(theta)**2$
%*****
%
%          ansatz for coframe
%*****
15 pform mm1=0, mm2=0,
      vv1=0, vv2=0, vv3=0, vv4=0$
fdomain mm1=mm1(r,t), mm2=mm2(r,t),
      vv1=vv1(r,t), vv2=vv2(r,t), vv3=vv3(r,t), vv4=vv4(r,t)$
20
coframe
o(t) = mm1 * d t,
o(x) = mm2 * d r,
o(y) = r * d theta,
25 o(z) = r * sin(theta) * d phi
with signature 1,-1,-1,-1$

frame e$
%*****
%          ansatz for torsion
%*****
30 pform torsion2(a)=2$

torsion2(t) := vv1 * o(t)^o(x)$

```

```

35 torsion2(x) := -vv2 * o(t)^o(x)$
torsion2(y) := -vv3 * o(t)^o(y) + vv4 * o(x)^o(y)$
torsion2(z) := -vv3 * o(t)^o(z) + vv4 * o(x)^o(z)$
end$

```

Die explizite Lösung steht mittels folgender Zeilen bereit:

```

%
% file sst-loesung.exi
% 1997-06-12
% UM (Uwe Münch)
5 %
% solution functions for teleparallel Schwarzschild-solution
%
% conventions: Hehl et.al., PRs 258 (1995)
%
10 % built on: kn-loesung.exi, UM, 1997-06-12

mm1 := sqrt(1 - (2*m0/r))$
mm2 := 1/mm1$

15 vv1 := -m0/((r**2) * mm1)$
vv2 := -vv1$
vv3 := vv1$
vv4 := vv1$

20 conn1(a,b):=conn1(a,b)$
torsion2(a):=torsion2(a)$
end$

```

- Teleparallele Schwarzschild-Lösung mit verschwindender Konnexion

Der Ansatz:

```

%
% file sst0c-ansatz.exi
% 1997-06-12
5 % UM (Uwe Münch)
%
% Ansatz for Schwarzschild teleparallel (sst)
%
% conventions: Hehl et.al., PRs 258 (1995)
10 %
% built on: kn-ansatz.exi, UM, 1997-06-12

sin(theta)**2:=1-cos(theta)**2$
%*****
15 % ansatz for coframe *
%*****
pform mm1=0, mm2=0$
fdomain mm1=mm1(r,t), mm2=mm2(r,t)$

20 coframe
o(t) = mm1 * d t,

```

D.2. Verwendete Ansätze und Lösungen

```

o(x) = mm2 * d r,
o(y) = r * d theta,
o(z) = r * sin(theta) * d phi
25 with signature 1,-1,-1,-1$

frame e$
%*****
%
%          ansatz for torsion          *
30 %*****
pform torsion2(a)=2$

torsion2(a) := d o(a)$
end$

und die Lösung:

%
% file sst0c-loesung.exi
% 1997-06-12
5 % UM (Uwe Münch)
%
% solution functions for teleparallel Schwarzschild-solution
%
% conventions: Hehl et.al., PRs 258 (1995)
10 %
% built on: kn-loesung.exi, UM, 1997-06-12

mm1 := sqrt(1 - (2*m0/r))$
mm2 := 1/mm1$
15

conn1(a,b):=conn1(a,b)$
torsion2(a):=torsion2(a)$
end$

```

- Die axialsymmetrische McCrea-Kerr-Lösung

Diese Lösung ist z.B. in [Bae88] als Spezialfall einer Kerr-NUT-Lösung mit verschwindenden NUT-Parameter angegeben. Der Reduce-Code dieses Ansatzes lautet:

```

%
% file kernnut-ansatz.exi
% 1997-06-12
5 % UM (Uwe Münch)
%
% Ansatz for Kerr-Nut-solution
%
% conventions: Hehl et.al., PRs 258 (1995)
%
10 % built on: knx1.exi, fwh, 1987-06-17

sin(theta)**2:=1-cos(theta)**2$
%*****

```

D.2. Verwendete Ansätze und Lösungen

```

%          ansatz for coframe          *
15 %*****
pform sigsqr=0, delsq=0, ffsqr=0,
      vv1=0, vv2=0, vv3=0, vv4=0, vv5=0$
fdomain sigsqr=sigsqr(r,theta),delsqr=delsqr(r),
      ffsqr=ffsqr(theta), vv1=vv1(r,theta), vv2=vv2(r,theta),
20      vv3=vv3(r,theta), vv4=vv4(r,theta), vv5=vv5(r,theta)$

coframe
o(t) = (delsqr/sigsqr)*(d t
      -(j0*sin(theta)**2+2*n0*cos(theta))*d phi),
25 o(x) = (sigsqr/delsqr)* d r,
o(y) = (sigsqr/ffsqr) * d theta,
o(z) = (ffsqr/sigsqr) * sin(theta)*(j0*d t-(r**2+j0**2+n0**2)*d phi)
with signature 1,-1,-1,-1$

30 frame e$

%*****
%          ansatz for torsion          *
%*****
35 pform torsion2(a)=2$

torsion2(t) := - (sigsqr/delsqr)      * vv1 * o(t)^o(x)
              + (sigsqr/delsqr)**2 * vv2 * (o(t)^o(y)-o(x)^o(y))
              + (sigsqr/delsqr)**2 * vv3 * (o(t)^o(z)-o(x)^o(z))
40              -2* (sigsqr/delsqr)      * vv4 * o(y)^o(z)$
torsion2(x) := torsion2(t)$
torsion2(y) := (sigsqr/delsqr)      * vv5 * (o(t)^o(y)-o(x)^o(y))
              + (sigsqr/delsqr)      * vv4 * (o(t)^o(z)-o(x)^o(z))$
torsion2(z) := - (sigsqr/delsqr)      * vv4 * (o(t)^o(y)-o(x)^o(y))
45              + (sigsqr/delsqr)      * vv5 * (o(t)^o(z)-o(x)^o(z))$

end$

```

Und hier folgt die explizite Lösung als Reduce-Code:

```

%
% file kernnut-loesung.exi
% 1997-06-12
% UM (Uwe Münch)
5 %
% solution funtions for Kerr-Nut-solution
%
% conventions: Hehl et.al., PRs 258 (1995)
%
10 % built on: knx1.exi, fwh, 1987-06-17
%
@(sigsqr,r):=r/sigsqr$
@(sigsqr,theta):=j0*sin(theta)*(n0-j0*cos(theta))/sigsqr$
@ (delsqr,r):=(lam*r*(2*r**2+j0**2+6*n0**2)/3+r-m0)/delsqr$
15 @ (ffsqr,theta):=lam*sin(theta)*j0*(j0*cos(theta)-2*n0)/(3*ffsqr)$

vv1:=( m0*r**2-2*q0**2*r - m0*(j0*cos(theta) - n0)**2 )/sigsqr**4$
vv2:=( -(m0*r-q0**2)*j0*sin(theta)*(j0*cos(theta)-n0) )

```

D.2. Verwendete Ansätze und Lösungen

```

20      vv3:= ((m0*r-q0**2)*j0*sin(theta)*r )      *ffsqr/sigsqr**5$
      vv4:= (m0*r-q0**2)*(j0*cos(theta)- n0)      *ffsqr/sigsqr**5$
      vv5:= (m0*r-q0**2)*r                        /sigsqr**4$
                                              /sigsqr**4$

      delsqrt**2:=(1/3)*lam*r**2*(r**2+j0**2)+r**2+j0**2-n0**2
25      -2*m0*r+2*q0**2+lam*(2*n0**2*r**2-n0**4+j0**2*n0**2)$
      ffsqr**2 :=1-(1/3)*lam*j0**2*cos(theta)**2+(4/3)*lam*j0*n0*cos(theta)$
      sigsqrt**2:=r**2+(j0*cos(theta)-n0)**2$

      conn1(a,b):=conn1(a,b)$
30      torsion2(a):=torsion2(a)$
      end$

```

- Teleparallele McCrea-Kerr-Lösung mit verschwindender Konnexion
Auch hier der Ansatz:

```

%
% file kerr0c-ansatz.exi
% 1997-07-01
5 % UM (Uwe Münch)
%
% Ansatz for Kerr-solution with zero connection
%
% conventions: Hehl et.al., PRs 258 (1995)
10 %
% built on: kerrnut-ansatz.exi, UM, 1997-06-12

sin(theta)**2:=1-cos(theta)**2$
%*****
%          ansatz for coframe          *
%*****
pform delsqrt=0, rrsqr=0, ffsqr=0$
fdomain delsqrt=delsqr(r),rrsqr=rrsqr(r,theta),
ffsqr=ffsqr(theta)$
20

coframe
o(t) = (delsqr/rrsqr)*(d t -(j0*sin(theta)**2 )*d phi),
o(x) = (rrsqr/delsqr)* d r,
o(y) = (rrsqr/ffsqr) * d theta,
25 o(z) = (ffsqr/rrsqr) * sin(theta)*(j0*d t-(r**2+j0**2)*d phi)
with signature 1,-1,-1,-1$

frame e$

%*****
%          ansatz for torsion          *
%*****
30 pform torsion2(a)=2$

torsion2(a) := d o(a)$
35 end$

```

und die Lösung:

D.2. Verwendete Ansätze und Lösungen

```

%
% file kerr0c-loesung.exi
% 1997-06-12
5 % UM (Uwe Münch)
%
% solution funtions for Kerr-Nut-solution
%
% conventions: Hehl et.al., PRs 258 (1995)
10 %
% built on: knx1.exi, fwh, 1987-06-17
%
delsqrt:=sqrt(r**2+j0**2-2*m0*r-(1/2)*q0**2)$
ffsqrt :=1$
15 rrsqrt:=sqrt(r**2+(j0*cos(theta))**2)$

conn1(a,b):=conn1(a,b)$
torsion2(a):=torsion2(a)$
end$

```

- Isotroper Ansatz

Hier haben wir eine Tetrade in isotropen Koordinaten eingegeben:

```

%
% file iso-ansatz.exi
% 1997-09-07
5 % UM (Uwe Münch)
%
% Ansatz for isotropic coordinates (iso)
%
% conventions: Hehl et.al., PRs 258 (1995)
10 %
% built on: kn-ansatz.exi, UM, 1997-06-12

%*****
%               ansatz for coframe                *
%*****
15 pform  psi=0, r=0$
fdomain psi=psi(x,y,z), r=r(x,y,z)$

coframe
20 o(t) = psi      * d t,
o(x) = (1/psi) * d x,
o(y) = (1/psi) * d y,
o(z) = (1/psi) * d z
with signature 1,-1,-1,-1$
25

frame e$
%*****
%               ansatz for torsion                *
%*****
30 pform torsion2(a)=2$

torsion2(a) := d o(a)$
end$

```

D.3. Die einzelnen Tests

Die folgende Lösung ist die Rosen-Yilmaz-Tetrade (3.2), vgl Abschnitt 3 (Seite 53):

```
%
% file rosen.exi
5 % 1997-09-11
% UM (Uwe Münch)
%
% solution functions for Rosen-Yilmaz-solution
%
10 % conventions: Hehl et.al., PRs 258 (1995)
%
% built on: sst0c-loesung.exi, UM, 1997-06-12

psi := exp(-m0/r)$
15 r**2:= (x**2+y**2+z**2)$
@(r,x):= x/r; @(r,y):= y/r; @(r,z):= z/r;

torsion2(a):=torsion2(a)$
end$
```

D.3. Die einzelnen Tests

D.3.1. Überprüfung der Feldgleichungen

Mit dem folgenden Programm testen wir, ob die einzelnen Lösungen wirklich Lösung der Feldgleichung (2.16b) sind. In den Zeilen 17–21 des zugehörigen Codes wählen wir aus, welcher Ansatz verwandt wird, z. B. der zur teleparallelen Schwarzschild-Lösung (vgl. Seite 94) oder zur McCrea-Kerr-Lösung (vgl. Seite 96). Entsprechend bestimmen wir in den Zeilen 27–31 den Namen der Ausgabedatei. In den Zeilen 50–54 wird die zum Ansatz passende Lösung geladen. Wir geben die Krümmung und die erste Feldgleichung vor und nach dem Laden der Lösung aus. Abschließend setzen wir die Konstanten ρ_1 , ρ_2 und ρ_4 auf die Werte der Einstein-Wahl (2.41b) und überprüfen die 1. Feldgleichung erneut. Außerdem geben wir die Konnexion und die Torsion aus, für das Aussehen dieser Größen siehe Abschnitt 2.6.

```
%
% file feldglg.exi
% 1997-07-01
% UM (Uwe Münch)
5 %
% checks the field equation (2.16b) for special cases
%
% conventions: Hehl et.al., PRs 258 (1995)
%
10 % built on: knx1.exi, fwh, 1987-06-17
%
load_package excalc$ off exp$ linelength 73$

%*****
```

D.3. Die einzelnen Tests

```

15 %           loading ansatz and compute-files           *
%*****
%in "kerrnut-ansatz.exi"; %
%in "kerr0c-ansatz.exi";
%in "iso-ansatz.exi";
20 %in "sst-ansatz.exi";
   in "sst0c-ansatz.exi"; %

   factor o(t),o(x),o(y),o(z)$

25 in "connection.exi";

%out "feldglg-kn.reo"; %
%out "feldglg-kerr0c.reo";
%out "feldglg-rosen.reo";
30 %out "feldglg-sst.reo";
   out "feldglg-sst0c.reo"; %

%*****
%           curvature and first field equation           *
35 %*****
   in "curvature.exi";
   clear contor1,chris1$

   pform energycomplex3(a)=3,first3(a)=3,noether1st4(a)=4$
40 in "telepara.exi"; %

   energycomplex3(-a):= d htr2(-a) - conn1(-a,-b) ^ htr2(b)$
   first3(a):= energycomplex3(a) - trenergy3(a);

45 %*****
%           substitution of metric and torsion functions   *
%           for the special solution                       *
%*****
50 %in "kerrnut-loesung.exi"; q0:=0; n0:=0; lam:=0;%
%in "kerr0c-loesung.exi"; q0:=0;
%in "rosen.exi";
%in "sst-loesung.exi";
   in "sst0c-loesung.exi"; %

55 energycomplex3(-a):= energycomplex3(-a)$
   curv2(a,b):=curv2(a,b);
   first3(a):= first3(a);

60 % special cases:
   rho1:=0;
   rho2:=-1/2;
   rho4:=1;
   torsion2(a):=torsion2(a);
65 conn1(a,b):=conn1(a,b);
   first3(a):= first3(a);

```

D.3. Die einzelnen Tests

```
quit;
```

Erwartungsgemäß sind alle hier benutzten Lösungen mit Ausnahme der Rosen-Yilmaz-Metrik Lösungen des Einsteinschen Teleparallelismus.

Daß die Rosen-Yilmaz-Metrik die Feldgleichungen (3.46) der Kaniel und Itin-Theorie erfüllt, haben wir mit dem folgenden Programm überprüft:

```
%
% file kaniel.exi
% 1997-09-14
% UM (Uwe Münch)
5 %
% checks the field equations (3.46) of K-I-theory
%
% conventions: Hehl et.al., PRs 258 (1995)
%
10 % built on: feldglg.exi, UM, 1997-07-01
%
load_package excalc$ off exp$ linelength 73$

%*****
15 %          loading ansatz and compute-files          *
%*****
in "iso-ansatz.exi";
factor o(t),o(x),o(y),o(z)$

20 out "kaniel.reo";
in "rosen.exi";

pform dalembert3(a)=3, tracedual4=4, mattertest=0, feldtest3(a)=3;

25 sgn:=-1$ % a bug in Reduce (should work automatically...)
dalembert3(a):= d (# (d (# (# o(a)))) + # (d (# (d (# (o(a))))))$
tracedual4:= o(-c) ^ dalembert3(c)$
mattertest:= # tracedual4 - (2 * m0/(r**2) * exp(-m0/r))**2;
feldtest3(a):= dalembert3(a) - (1/4)* e(a) _| tracedual4;
30 quit;
```

D.3.2. Die Noether-Identitäten

Kettenregel

Aus der Translationsinvarianz des Teleparallelismus-Lagrangians folgt u. a. die Kettenregel (2.23a). Diese starke Identität muß also für alle Kobasis-Torsions-Ansätze gelten, die die 1. Cartansche Strukturgleichung (1.10b) erfüllen. Neben der Kettenregel haben wir hier auch überprüft, daß die 1. Cartansche Strukturgleichung wirklich gilt, unsere Konstruktion der Konnexion also konsistent ist. Es folgt der zugehörige Code:

D.3. Die einzelnen Tests

```

%
% file kettenregel.exi
% 1997-06-11
% UM (Uwe Münch)
5 %
% checks the equation (2.23a) for special cases
%
% conventions: Hehl et.al., PRs 258 (1995)
%
10 % built on: knx1.exi, fwh, 1987-06-17

load_package excalc$ off exp$ linelength 73$

%*****
15 %           loading ansatz and compute-files           *
%*****
%in "kerrnut-ansatz.exi"; %
%in "kerr0c-ansatz.exi";
%in "iso-ansatz.exi";
20 %in "sst-ansatz.exi";
   in "sst0c-ansatz.exi"; %

factor o(t),o(x),o(y),o(z)$

25 in "connection.exi";

%out "kettenregel-kn.reo"; %
%out "kettenregel-kerr0c.reo";
%out "kettenregel-iso.reo";
30 %out "kettenregel-sst.reo";
   out "kettenregel-sst0c.reo"; %
%
%*****
%                               the tests                               *
35 %*****

pform cartan1st2(a)=2$
%%
%% Test: 1.) Cartan structure equation:  $T^\alpha = D(\vartheta^\alpha)$ 
40 %%
   cartan1st2(a):=torsion2(a) - d o(a) + conn1(a,b) ^ o(-b);

%% Test: 2.)  $H_\alpha$  and  $E_\alpha$  defined by (2.18a)
%%           and (2.18b)
45 %% Is chain rule (2.23a) valid?
%%
pform test3(a)=3$
in "telepara.exi";

50 test3(-a):= trenergy3(-a) - e(-a)_|vtr4 - (e(-a)_|torsion2(b))^htr2(-b);
quit;

```

D.3. Die einzelnen Tests

In den Zeilen 17–21 des obigen Input-Files haben wir dabei die verschiedenen Ansätze, z. B. zur teleparallelen Schwarzschild-Lösung (vgl. Seite 94) oder zur McCrea-Kerr-Lösung (vgl. Seite 96), ausgewählt; entsprechend bestimmen wir in den Zeilen 27–31 die Namen der Dateien, in die die Ergebnisse geschrieben werden sollen.

Es zeigt sich, daß die 1. Cartansche Strukturgleichung und die Kettenregel für alle benutzten Ansätze erfüllt sind, da die Komponenten von `cartan1st2` und `test3` jeweils erwartungsgemäß verschwinden. Insbesondere sind die unabhängigen Definitionen von E_α , H_α und $V_{||}$ in diesem und den folgenden Programmen konsistent.

Lorentz-Invarianz

Die zweite Noether-Identität (2.27a) hängt nur von der Wahl des Lagrangians ab, ist also auch eine starke Identität. Daher muß sie wiederum von allen Kobasis-Torsions-Ansätzen, für die die 1. Cartansche Strukturgleichung (1.10b) gilt, erfüllt werden. Mittels des folgenden Programms haben wir dies für unsere Ansätze überprüft. Wieder bestimmen wir in den Zeilen 17–21 im nachfolgenden Code die Input-Files der verschiedenen Ansätze (vgl. Seite 94 ff) und geben in den Zeilen 27–31 die gewünschten Namen der Output-Files an.

```
%
% file lorentz.exi
% 1997-09-07
% UM (Uwe Münch)
5 %
% checks the equation (2.27a) for special cases
%
% conventions: Hehl et.al., PRs 258 (1995)
%
10 % built on: knx1.exi, fwh, 1987-06-17

load_package excalc$ off exp$ linelength 73$

%*****
15 %           loading ansatz and compute-files           *
%*****
%in "kerrnut-ansatz.exi"; %
%in "kerr0c-ansatz.exi";
%in "iso-ansatz.exi";
20 %in "sst-ansatz.exi";
in "sst0c-ansatz.exi"; %

factor o(t),o(x),o(y),o(z)$

25 in "connection.exi";

%out "lorentz-kn.reo"; %
%out "lorentz-kerr0c.reo";
%out "lorentz-iso.reo";
30 %out "lorentz-sst.reo";
out "lorentz-sst0c.reo"; %
```

```

%
%*****
%
%               the test
%               *
35 %*****
pform test4(a,b)=4$
in "telepara.exi";

test4(a,b):= -metrenergy4(a,b) + o(b) ^ trenergy3(a) - torsion2(b) ^ htr2(a);
40 quit;

```

Es ergab sich jeweils für alle Komponenten von `test4(a,b)` – wie erwartet – Null, also gilt (2.27a) in der Tat für die speziellen benutzten Ansätze.

1. Noether-Identität

In dem Test der 1.Noether-Identität haben wir die starke Noether-Identität, die man aus (2.22) ablesen kann, für verschwindende Nichtmetrizität geprüft (in Reduce-Programmen ist es nicht einfach möglich, eine Nichtmetrizität zu erzeugen, da automatisch die orthogonale Metrik (1.13) gewählt wird). In den Zeilen 17–21 der folgenden Eingabedatei haben wir dabei die verschiedenen Ansätze, z. B. zur teleparallelen Schwarzschild-Lösung (vgl. Seite 94) oder zur McCrea-Kerr-Lösung (vgl. Seite 96), ausgewählt; entsprechend bestimmen wir in den Zeilen 27–31 die Namen der Dateien, in die die Ergebnisse geschrieben werden sollen.

```

%
% file noether1.exi
% 1997-09-07
% UM (Uwe Münch)
5 %
% checks the equation (2.23b) for special cases
%
% conventions: Hehl et.al., PRs 258 (1995)
%
10 % built on: knx1.exi, fwh, 1987-06-17
%
load_package excalc$ off exp$ linelength 73$

%*****
15 %               loading ansatz and compute-files
%               *
%*****
%in "kerrnut-ansatz.exi"; %
%in "kerr0c-ansatz.exi";
%in "iso-ansatz.exi";
20 %in "sst-ansatz.exi";
in "sst0c-ansatz.exi"; %

factor o(t),o(x),o(y),o(z)$

25 in "connection.exi";

%out "noether1-kn.reo"; %

```

D.3. Die einzelnen Tests

```
%out "noether1-kerr0c.reo";
%out "noether1-iso.reo";
30 %out "noether1-sst.reo";
out "noether1-sst0c.reo"; %

%*****
%                               noether1-test                               *
35 %*****
pform energycomplex3(a)=3,first3(a)=3,noether1st4(a)=4$

in "curvature.exi";
in "telepara.exi";
40
energycomplex3(-a):= d htr2(-a) - conn1(-a,-b) ^ htr2(b)$
first3(a):= trenergy3(a) - energycomplex3(a)$
noether1st4(a):= d trenergy3(a) - conn1(a,c) ^ trenergy3(-c) -
45           (e(a) _| torsion2(c)) ^ first3(-c) + e(a) _|
           (curv2(-c,d) ^ o(c)) ^ htr2(-d);

quit;
```

Wie erwartet ist die Noether-Identität `noether1st4(a)` für alle verwandten Ansätze komponentenweise Null, also erfüllt.

E. A note on post-Riemannian structures of spacetime

In diesem Anhang drucken wir den Artikel [HM97] ab, eine Antwort von Friedrich W. Hehl und Uwe Muench auf den Artikel [Me97]:

Abstract

A four-dimensional differentiable manifold is given with an arbitrary linear connection $\Gamma_{\alpha}^{\beta} = \Gamma_{i\alpha}^{\beta} dx^i$. Megged [Me97] has claimed that he can define a metric $G_{\alpha\beta}$ by means of a certain integral equation such that the connection is compatible with the metric. We point out that Megged's implicate definition of his metric $G_{\alpha\beta}$ is equivalent to the assumption of a vanishing nonmetricity. Thus his result turns out to be trivial.

In the metric-affine theory of gravitation [He95, GrHe96], spacetime is assumed to be a four-dimensional differentiable manifold equipped with a linear connection Γ_{α}^{β} and, *independently*, with a metric $g_{\alpha\beta}$. Ne'eman and one of us proposed methods [He85, Ne97] how one could measure the torsion $T^{\alpha} := D\vartheta^{\alpha}$ (here ϑ^{α} is the coframe) and the nonmetricity $Q_{\alpha\beta} := -Dg_{\alpha\beta}$ of spacetime. In a recent note, Megged [Me97] has claimed that the use of the nonmetricity $Q_{\alpha\beta}$ is misleading in some sense, since one can define a metric, provided the connection is given, such that it is automatically "connection compatible", if we use his words. We will point out that this rests on the hidden assumption of a vanishing nonmetricity. Since Megged discards the original independent metric $g_{\alpha\beta}$ as a meaningful physical field, there is no way that nonmetricity could enter his theory later.

E.1. Metric-affine spacetime

If a metric $g_{\alpha\beta}$ and a connection Γ_{α}^{β} are given, for the conventions see [He95], then we can raise and lower indices by means of $g_{\alpha\beta}$, such as in $\Gamma_{\alpha\beta} := \Gamma_{\alpha}^{\gamma} g_{\gamma\beta}$, for example. With the definition of the nonmetricity $Q_{\alpha\beta} := -Dg_{\alpha\beta}$, it is straightforward to compute the symmetric part of the connection (see [Scho54] or [He95, eq. (3.10.6)]):

$$2\Gamma_{(\alpha\beta)} = dg_{\alpha\beta} + Q_{\alpha\beta} . \tag{E.1}$$

These are 40 equations, and *no relation* between metric and connection has been assumed.

E.2. Riemann-Cartan spacetime

If we assume the nonmetricity to vanish, then we find a Riemann-Cartan geometry:

$$Q_{\alpha\beta} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\Gamma_{(\alpha\beta)} = dg_{\alpha\beta} . \quad (\text{E.2})$$

We can choose the coframe to be orthonormal (orthonormal gauge),

$$g_{\alpha\beta} \stackrel{*}{=} o_{\alpha\beta} := \text{diag}(+1, -1, -1, -1) , \quad (\text{E.3})$$

then

$$\Gamma_{(\alpha\beta)} \stackrel{*}{=} 0 \quad \text{or} \quad \Gamma_{\alpha\beta} \stackrel{*}{=} -\Gamma_{\beta\alpha} , \quad (\text{E.4})$$

i. e., we are left with 24 independent components of a Lorentz connection. Thus the connection one-form is $\text{SO}(1,3)$ -valued, describing the fact, that the scalar product of two vectors is *invariant* under parallel transport in such a spacetime.

E.3. Megged's ansatz

He allows only for a connection to be the primary geometrical quantity. Let us call his connection $\hat{\Gamma}_\alpha^\beta$. Then he defines *implicitly* a metric $G_{\alpha\beta} = G_{\beta\alpha}$ by the relation

$$\hat{\Gamma}_\alpha^\gamma G_{\gamma\beta} + \hat{\Gamma}_\beta^\gamma G_{\alpha\gamma} = dG_{\alpha\beta} , \quad (\text{E.5})$$

see his equations [Me97, eq. (7)] and [Me97, eq. (8)]. The $G_{\alpha\beta}$, defined by (E.5), can be taken for raising and lowering indices, such as in $\hat{\Gamma}_{\alpha\beta} := \hat{\Gamma}_\alpha^\gamma G_{\gamma\beta}$, for example. Then (E.5) can be rewritten as

$$2\hat{\Gamma}_{(\alpha\beta)} = dG_{\alpha\beta} . \quad (\text{E.6})$$

If we compare (E.6) with (E.1), we recognize that the ansatz (E.5), which represents 40 independent equations, is equivalent to the assumption

$$\hat{Q}_{\alpha\beta} := -\hat{D}G_{\alpha\beta} = 0 . \quad (\text{E.7})$$

Of course, this can also be seen directly from (E.5), since

$$dG_{\alpha\beta} - \hat{\Gamma}_\alpha^\gamma G_{\gamma\beta} - \hat{\Gamma}_\beta^\gamma G_{\alpha\gamma} =: \hat{D}G_{\alpha\beta} . \quad (\text{E.8})$$

In other words, the equation (E.5), postulated by Megged, amounts to the assumption of a vanishing nonmetricity $\hat{Q}_{\alpha\beta} = 0$. And then it is not surprising to fall back to the metric-compatible Riemann-Cartan spacetime.

Acknowledgments: We are grateful to Ofer Megged for discussions and for making his paper available to us prior to publication.

Literaturverzeichnis

- [Bae80] P. Baekler: *The unique spherically symmetric solution of the U_4 -theory of gravity in the teleparallelism limit*; Phys. Lett. **B94** (1980) 44–50.
- [Bae82] P. Baekler, F. W. Hehl, and E. W. Mielke: *Vacuum solutions with double duality properties of a quadratic Poincaré gauge field theory*; Proc. of the 2nd Marcel Grossmann Meeting on the Recent Progress of the Fundamentals of General Relativity 1978, pp. 413–453. R. Ruffini, editor (North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1982).
- [Bae88] P. Baekler, M. Gürses, F. W. Hehl, J. D. McCrea: *The exterior gravitational field of a charged spinning source in the Poincaré gauge theory: A Kerr-Newman metric with dynamic torsion*; Phys. Lett. **A128** (1988) 245–250.
- [Bae92] P. Baekler, E. W. Mielke, F. W. Hehl: *Dynamical symmetries in topological 3D gravity with torsion*; Nuovo Cimento **107B** (1992) 91–110.
- [ChBr82] Y. Choquet-Bruhat, C. DeWitt-Morette, and M. Dillard-Bleick: *Analysis, Manifolds and Physics*; (North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1982).
- [Do90] C. T. J. Dodson, T. Poston: *Tensor Geometry*; 2nd ed. (Springer, Berlin 1990).
- [Gr93] F. Gronwald and F. W. Hehl: *Stress and hyperstress as fundamental concepts in continuum mechanics and in relativistic field theory*; In *Advances in Modern Continuum Dynamics*. International Conference in Memory of Antonio Signorini, Isola d’Elba, June 1991, pp. 1–32. G. Ferrarese, editor (Pitagora Editrice, Bologna 1993).
- [GrHe96] F. Gronwald and F. W. Hehl: *On the gauge aspects of gravity*; In: International School of Cosmology and Gravitation: 14th Course: Quantum Gravity, held May 1995 in Erice, Italy. Proceedings. P.G. Bergmann et al.(eds). (World Scientific, Singapore 1996). Los Alamos eprint archive gr-qc/9602013.
- [Gr96] F. Gronwald: *On the gauge structure and covariant gauge fixing of metric-affine gravity*; PhD Thesis, University of Cologne, 1996; F. Gronwald:

Metric-Affine Gauge Theory of Gravity I. Fundamental Structure and Field Equations; Int. J. of Mod. Phys. **D** (1997) in print.

- [Gr97] F. Gronwald, private communication.
- [Ha95] D. Hartley: *Normal frames for non-Riemannian connections*; Class. Quantum Grav. **12** (1995) L103–L105.
- [Hec95] R.D. Hecht: *Erhaltungsgrößen in der Poincaré-Eichtheorie der Gravitation*; Dissertation an der Universität zu Köln, 1995.
- [He76] F. W. Hehl, P. von der Heyde, G. D. Kerlick, and J. M. Nester: *General relativity with spin and torsion: Foundations and prospects*; Rev. Mod. Phys. **48** (1976) 393–416.
- [He85] F. W. Hehl: *On the kinematics of the torsion of spacetime*; Found. Phys. **15** (1985) 451–471.
- [He94] F. W. Hehl: *Relativitätstheorie II*; Vorlesungsskript. WS 1994/95.
- [He95] F. W. Hehl, J. D. McCrea, E. W. Mielke, Y. Ne’eman: *Metric-affine gauge theory of gravity: Field equations, Noether identities, world spinors, and breaking of dilation invariance*; Physics Reports **258** (1995) 1–171.
- [HM97] F. W. Hehl, U. Muench: *A note on post-Riemannian structures of spacetime*; Los Alamos eprint archive gr-qc/9708007.
- [Hey76] P. von der Heyde: *Is gravitation mediated by the torsion of spacetime?*; Z. Naturf. **31a** (1976) 1725–1726.
- [Il97] B. Z. Iliev: *Normal frames and the validity of the equivalence principle: I. Cases in a neighbourhood and at a point*; J. Phys. **A29** (1996) 6895–6901; *II. The case along paths*; J. Phys. **A30** (1997) 4327–4336.
- [Ka97] S. Kaniiel and Y. Itin: *Gravity on a parallelizable manifold*; Los Alamos eprint archive gr-qc/9707008 (1997). Presented at the 8th Marcel Grossmann Meeting in Jerusalem on 1997-06-23.
- [KoN63] S. Kobayashi and K. Nomizu: *Foundations of Differential Geometry*; Vol. I (Interscience Publ., New York 1963).
- [Kop82] W. Kopczyński: *Problems with metric-teleparallel theories of gravitation*; J. Phys. **A15** (1982) 493.
- [Ma97] B. Mashhoon, private communication.
- [Me97] O. Megged: *Post-Riemannian spacetimes admit a causal structure*; Los Alamos eprint archive gr-qc/9706068, 22 June 1997.

- [Mey82] H. Meyer: *Møller's tetrad theory of gravitation as a special case of Poincaré gauge theory—a coincidence?*; Gen. Rel. Grav. J. **14** (1982) 531–547.
- [Mie91] E. W. Mielke, P. Baekler: *Topological gauge model of gravity with torsion*; Phys. Lett. **A156** (1991) 399–403.
- [Mie92] E. W. Mielke: *Ashtekar's complex variables in general relativity and its teleparallelism equivalent*; Ann. Phys. (N.Y.) **219** (1992) 78–108.
- [MTW73] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler: *Gravitation*; (W. H. Freeman and Company, San Francisco 1973).
- [Na96] A. Nairz: *A class of metric theories of gravitation on Minkowski spacetime*; Found. Phys. **26** (1996) 369–389; *Errata: A class of metric theories of gravitation on Minkowski spacetime*; Found. Phys. **27** (1997) 759–762.
- [Ne97] Y. Ne'eman and F. W. Hehl: *Test matter in a spacetime with nonmetricity*; Class. Quantum Grav. **14** (1997) A251–A259.
- [Nit80] J. Nitsch and F. W. Hehl: *Translational gauge theory of gravity: Post-Newtonian approximation and spin precession*; Phys. Lett. **B90** (1980) 98–102.
- [Ob82a] Yu. N. Obukhov: *The geometrical approach to antisymmetric tensor field theory*; Phys. Lett. **109B** (1982) 195–199.
- [Ob97] Yu. N. Obukhov, private communication.
- [ON83] B. O'Neill: *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*; (Academic Press, New York 1983).
- [PS85a] J.-F. Pascual-Sánchez: *On the limits of Poincaré gauge theory*; Phys. Lett. **A108** (1985) 387–390.
- [PS85b] J.-F. Pascual-Sánchez: *Constrained macroscopic limit of Poincaré gauge theory of gravity*; Lett. Nuovo Cim. **44** (1985) 326–328.
- [Ple76] J. F. Plebanski and M. Demianski: *Rotating, Charged, and Uniformly Accelerating Mass in General Relativity*; Ann. of Phys. (N.Y.) **98** (1976) 98–127.
- [Pu97] R. A. Puntigam, C. Lämmerzahl, F. W. Hehl: *Maxwell's theory on a post-Riemannian spacetime and the equivalence principle*; Class. Quantum Grav. **14** (1997) 1347–1356.
- [Re92] H. Reckziegel: *Definitionen, Formeln, Sätze zu dem Vorlesungszyklus über Differentialgeometrie*; Vorlesungsskript. WS 1992/93–SS 1994.
- [Ro73] N. Rosen: *A Bi-Metric Theory of Gravitation*; Gen. Rel. Grav. J. **4** (1973) 435–447.

- [Ro74] N. Rosen: *A Theory of Gravitation*; Ann. of Phys. (N.Y.) **84** (1974) 455–473.
- [Rum78] H. Rumpf: *On the translational part of the Lagrangian in the Poincaré gauge theory of gravitation*; Z. Naturf. **33a** (1978) 1224–1225.
- [Rum79] H. Rumpf: *Quasiclassical limit of the Dirac equation and the equivalence principle in the Riemann-Cartan geometry*; in: Proc. of the 6th Course of the International School of Cosmology and Gravitation on *Spin, Torsion, Rotation, and Supergravity*; held at Erice, Italy, May 1979, P. G. Bergmann and V. de Sabbata (eds). (Plenum Press, New York 1980).
- [Scho54] J. A. Schouten: *Ricci-Calculus*; 2nd ed. (Springer, Berlin 1954).
- [Schr87] E. Schrüfer, F.W. Hehl, and J.D. McCrea: *Exterior calculus on the computer: The REDUCE-package EXCALC applied to general relativity and the Poincaré gauge theory*; Gen. Rel. Grav. J. **19** (1987) 197.
- [Schw79] M. Schweizer and N. Straumann: *Poincaré gauge theory of gravitation and the binary pulsar* 1913 + 16; Phys. Lett. **A71** (1979) 493–495.
- [Schw80] M. Schweizer, N. Straumann, and A. Wipf: *Post-Newtonian generation of gravitational waves in a theory of gravity with torsion*; Gen. Rel. Grav. J. **12** (1980) 951–961.
- [St93] D. Stauffer, F.W. Hehl, N. Ito, V. Winkelmann, and J.G. Zabolitzky: *Computer Simulation and Computer Algebra – Lectures for Beginners*; 3rd ed. (Springer, Berlin 1993).
- [Sy71] J.L. Synge: *Relativity: The General Theory*; (North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1971).
- [Th86] W. Thirring: *Classical Field Theory, A Course in Mathematical Physics 2*; 2nd ed. (Springer, New York 1986).
- [Wa82] R.P. Wallner: *Feldtheorie im Formenkalkül*; Dissertation an der Universität Wien. 1982.
- [Yi58] H. Yilmaz: *New Approach to General Relativity*; Phys. Rev. **111** (1958) 1417–1426.
- [Yi76] H. Yilmaz: *Physical foundations of the new theory of gravitation*; Ann. of Phys. (N.Y.) **101** (1976) 413–432.

Danksagung

Zum Schluß dieser Arbeit möchte ich mich bei den vielen hilfreichen Kollegen und Mitmenschen bedanken. Ohne ihre vielschichtige Unterstützung wäre diese Arbeit nicht möglich gewesen.

Da der Platz nicht ausreicht, alle namentlich zu erwähnen (und ich sicherlich noch jemanden vergessen würde), möchte ich mich hier stellvertretend bei den folgenden Personen bedanken:

- Mein besonderer Dank geht an Professor Dr. Friedrich W. Hehl für die Vergabe des spannenden Diplom-Themas, zahlreiche Verbesserungsvorschläge und sehr interessante Diskussionen, sowie für die gesamte Betreuung,
- weiterhin an Professor Dr. H. Micklitz für die Zweitkorrektur dieser Arbeit.
- In unserer Arbeitsgruppe hatte insbesondere Frank Gronwald stets ein offenes Ohr für meine Fragen; seine ständige Hilfsbereitschaft und die interessanten und tiefgehenden Diskussionen haben mir sehr geholfen.
- Mit ebenfalls sehr hilfreichen Diskussionen unterstützten mich die ehemaligen Mitarbeiter von Professor Dr. Hehl: Dr. Yuri Obukhov, Werner Esser, Dr. Roland Puntigam, Jan Budczies und die derzeitigen Mitarbeiter Ralph Metzler und Jürgen Weidmann.
- Ganz besonders möchte ich mich bei meinen Korrekturlesern Jan Budczies, Andreas Dworsky, Frank Gronwald, Georg Harzheim, Kai-Oliver Klauck, Eduard Neufeld und Jürgen Weidmann für ihre kritische Durchsicht dieser Arbeit und die damit verbundenen Mühen bedanken. Ich betone, daß alle verbleibenden Fehler alleine auf mich zurückzuführen sind.
- Bei Daniel Schlieper möchte ich mich für die freundliche, einwöchige Leihgabe seines Notebooks bedanken.
- Ohne die vorhergehende Ausbildung an der Universität zu Köln und an dem Gymnasium Zündorf wäre diese Arbeit ebenfalls nicht möglich gewesen. Hiermit gilt mein Dank den Professoren der Mathematik und Physik der Universität zu Köln, stellvertretend insbesondere Professor Dr. H. Reckziegel für seine Inspiration, seine Menschlichkeit und seine sowohl unterhaltsamen als ebenso lehrreichen Vorlesungen,

- und meinen Schullehrern, insbesondere Heiner Platzbecker, der durch faszinierende Experimente mein Interesse für die Phänomene der Natur weckte, und Günter Birkenfeld, geb. Titz, für die nicht-physikalische Seite meiner Menschformung.
- Meinem besten Freund, Dirk Schütze, und seiner Familie danke ich für ihre Freundschaft und die benötigten Aufmunterungen,
- und insbesondere meinen Eltern, Christa und Helmut Münch, und meiner Großmutter, Ruth Brandt, für die Rücksichtnahme und die fortwährende Unterstützung während meines Studiums in jeder Hinsicht.

Danke!

Erklärung

Uwe Münch
Schmittgasse 92
51143 Köln

15. September 1997

Hiermit erkläre ich, daß ich die vorliegende Diplomarbeit selbständig und ohne unzulässige Hilfe angefertigt, die benutzten Quellen und Hilfsmittel vollständig angegeben und die Stellen dieser Arbeit, die anderen Werken in Wortlaut oder im Sinn entnommen sind, in jedem Einzelfall als Entlehnung kenntlich gemacht habe.

(Uwe Münch)