Diplomkolloquium

Über teleparallele Gravitationstheorien

Uwe Münch

24. September 1997

Übersicht:

- Geometrische Größen
- Gravitation als Eichtheorie der Translationen: Teleparallelismus-Theorien
- Alternative Theorien
  - Rosen-Yilmaz-Metrik
  - Theorie von Kaniel und Itin

Institut für Theoretische Physik (Universität zu Köln)

Wieso teleparallele Theorien?

[. . .] gravity is that field, which corresponds to a gauge invariance with respect to displacement transformations.

R. P. Feynman

- *Eichpotential* der $3 + 1$ *Translationen* in Raum und Zeit, die *Kobasis* ϑ^α (4 Kovektoren), und deren *Feldstärke*, die *Torsion* $T^\alpha = D\vartheta^\alpha$, treten explizit im Lagrangian auf

- Einfachere Struktur als Einsteinsche Allgemeine Relativitätstheorie: nur Potential und 1. Ableitungen im Lagrangian

  analog zu Quantenfeldtheorien der anderen Wechselwirkungen (elektroschwache und starke Wechselwirkung)

- niederenergetischer Spezialfall einer Theorie mit höherer Symmetrie, der metrisch-affinen Gravitationstheorie.

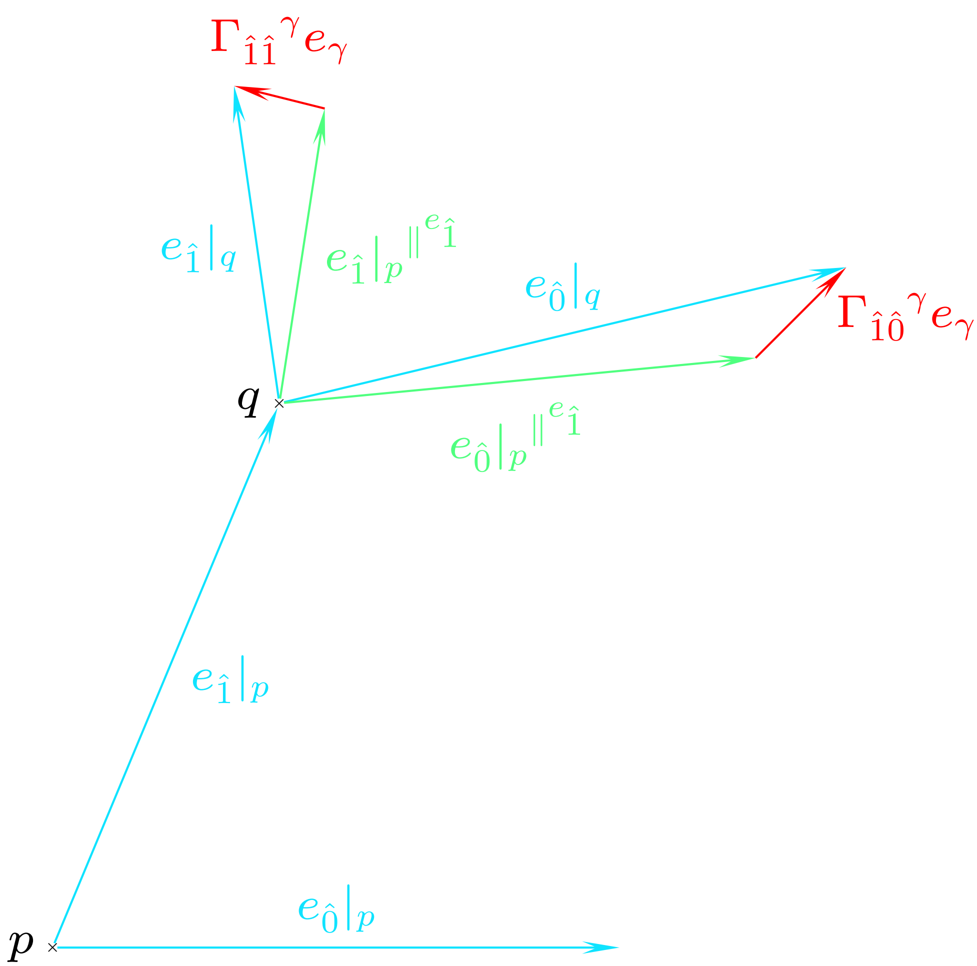
  Eichpotential der Lorentz-Transformationen (3 räumliche Drehungen und 3 Boosts): Konnexion ${\Gamma_\beta}^\alpha$ (6 Kovektoren)

Die geometrischen Größen

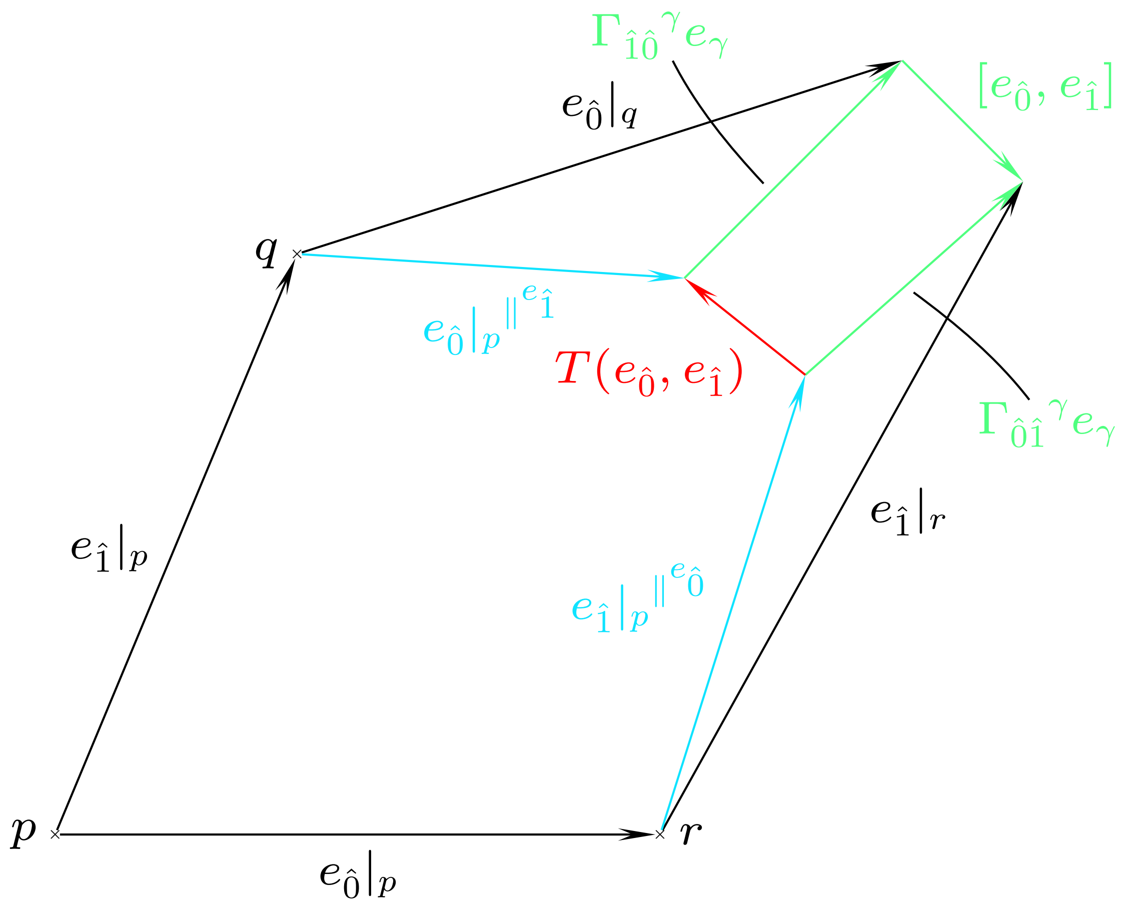
Basis-Vektorfelder e_α und Kobasis ϑ^β dual zueinander:
$\vartheta^\beta(e_\alpha) = \delta^\beta_\alpha$.

Konnexion $\Gamma_\beta{}^\alpha$: beschreibt Parallelverschiebung von Vektoren.

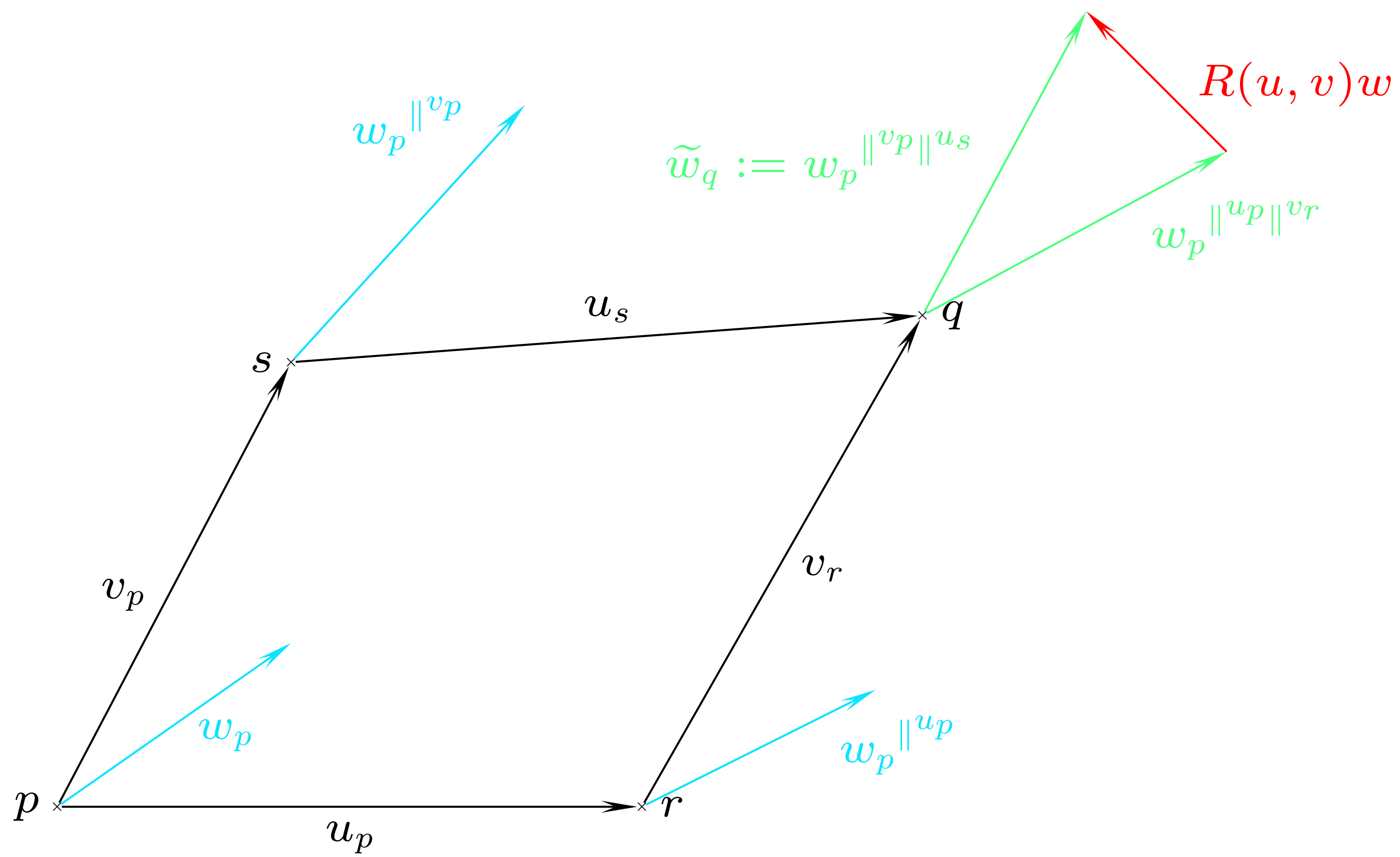
Die folgenden Bilder gelten infinitesimal.



Die Torsion $T^\alpha = D\vartheta^\alpha$: Feldstärke der Verschiebungen



Die Krümmung: Feldstärke der Lorentz-Transformationen



Teleparallelismus

wegunabhängige Parallelverschiebung: Krümmung $R_\alpha{}^\beta = 0$

Lagrangian ($T^\alpha = D\vartheta^\alpha$):

$$L_{\mathsf{GR}_{||}} = V_{||}(\vartheta^\alpha, T^\alpha) + L_{\mathsf{Materie}}(\vartheta^\alpha, \Psi, D\Psi) + R_\alpha{}^\beta \wedge \lambda^\alpha{}_\beta$$

Aufspaltung des Eich-Lagrangian $V_{||} = \frac{1}{2\ell^2}\left(\rho_1\,{}^{(1)}V + \rho_2\,{}^{(2)}V + \rho_4\,{}^{(4)}V\right)$, wobei (nach Rumpf):

$$ {}^{(1)}V = T^\alpha \wedge {}^\star T_\alpha \qquad \text{(reiner Yang-Mills Typ)}\ ,$$

$$ {}^{(2)}V = \left(T_\alpha \wedge \vartheta^\alpha\right) \wedge {}^\star\left(T_\beta \wedge \vartheta^\beta\right)\ ,$$

$$ {}^{(4)}V = \left(T_\alpha \wedge \vartheta^\beta\right) \wedge {}^\star\left(T_\beta \wedge \vartheta^\alpha\right)\ .$$

Variation des Lagrangians ergibt Materiefeldgleichung, Nebenbedingung ${R_\alpha}^\beta = 0$ und Gravitations-Feldgleichung:

$$D \underbrace{\frac{\partial V_\parallel}{\partial\, D\vartheta^\alpha}}_{\text{Erregung}} + \overbrace{\frac{\partial V_\parallel}{\partial\vartheta^\alpha}}^{\text{Energie-Impuls des Eichfelds}} = -\Sigma_\alpha := -\underbrace{\frac{\partial L_{\text{Materie}}}{\partial\vartheta^\alpha}}_{\text{Quelle: Energie-Impuls der Materie}} \; .$$

Konkrete Berechnung der Erregung und des Energie-Impulses des Eichfelds (allgemeiner Fall, zusätzlich mit unabhängigen Metrikkomponenten $g_{\alpha\beta}$) mit Regel

$$\begin{aligned} \delta^\star\Phi = {}^\star\delta\Phi - {}^\star\Big(\delta\vartheta^\alpha\wedge(e_\alpha\rfloor\Phi)\Big) + \delta\vartheta^\alpha\wedge\Big(e_\alpha\rfloor{}^\star\Phi\Big) \\ + \left(\vartheta^\alpha\wedge\Big(e^\beta\rfloor{}^\star\Phi\Big) - \frac{1}{2}\,{}^\star\Phi\; g^{\alpha\beta}\right)\,\delta g_{\alpha\beta}\; . \end{aligned}$$

- In Literatur nicht immer korrekt durchgeführt.
- Konkrete Durchführung der Variation erzeugt längere Ausdrücke für die partiellen Ableitungen
- Überprüfung der Ausdrücke durch Einsetzen in Noether-Identitäten.

Einstein-Wahl

Eich-Lagrangian $V_{\|}$ des Teleparallelismus für Koeffizientenwahl

$$\rho_1 = 0 \ , \quad \rho_2 = -\frac{1}{2} \ , \quad \rho_4 = 1 \ .$$

äquivalent zu Einstein-Lagrangian

$$V_{\mathsf{Einstein}} = \frac{1}{2\ell^2} \widetilde{R}_{\alpha\beta} \wedge {}^\star \left(\vartheta^\alpha \wedge \vartheta^\beta \right) = \frac{1}{2\ell^2} \sqrt{\det(g_{\mu\nu})}\, R$$

mit $Ric_{\alpha\beta} := \widetilde{R}_{\gamma\alpha\beta}{}^{\gamma}$ und $R := Ric_{\alpha}{}^{\alpha}$. Hieraus erhält man die Einsteinsche Feldgleichung:

$$G_{\alpha\beta} := Ric_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\, g_{\alpha\beta} R = 2\ell^2\, T_{\alpha\beta} \qquad \text{(Energie-Impuls-Tensor)} \ .$$

Alternative Theorien

Auch Quantisierung des Teleparallelismus noch nicht gelungen.

Problem (u. a.): Raumzeit nur *lokal* wie Minkowski-Raumzeit betrachtbar. In Quantenfeldtheorien aber *ausgedehnte* Wellenfunktionen.

Daher Ansätze:

- *lokales* Äquivalenzprinzip („Einstein-Aufzug") erweitern,
- gravitative Felder als effektive Felder auf Minkowski-Hintergrund.

Also:

- Wie sieht eine Kobasis ϑ^α aus, die eine Art globales Äquivalenzprinzip erfüllt?

  $\longrightarrow$ Rosen-Yilmaz-Kobasis
- Bei Variation nach nicht-geometrischen Feldern (z. B. nach elektromagnetischem Potential A) gilt $\delta^\star A = {}^\star\delta A$. Eingeschränkte Variationen?

  $\longrightarrow$ Theorie nach Kaniel und Itin

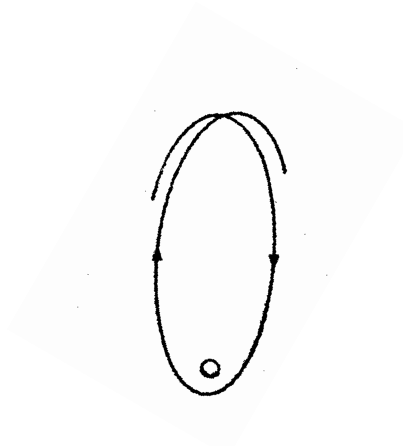
Rosen-Yilmaz-Metrik

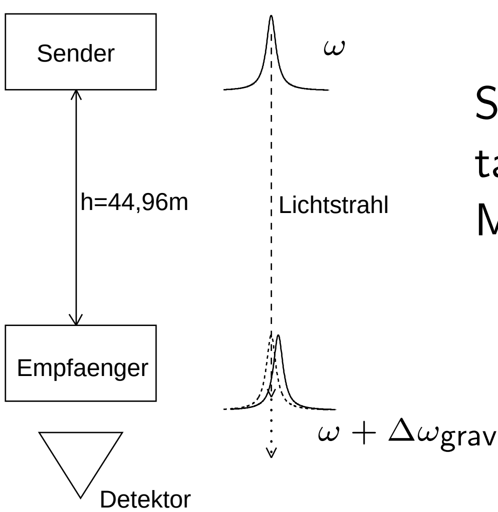
Lösungen sind äquivalent darstellbar als *orthogonale Kobasis* oder als *Metrik*.

Die Schwarzschild-Kobasis (Lösung der Teleparallelismus-Theorie mit Einstein-Wahl) führt zur *Schwarzschild-Metrik* (SSM) (in geometrischen Einheiten: $c = 1$, $G = 1$):

$$\hat{g} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} dr^2 - r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2\right)$$

Typische Teilchen-Bahn:





SSM erfüllt lokales ÄP. Z. B. gravitative Rotverschiebung auf Erde mit Masse M:

$$\frac{\Delta\omega_{\text{grav}}}{\omega} = \Delta U_{\text{grav}} = -\frac{M \Delta r}{r^2} \ .$$

Erweiterung des ÄP: gültig entlang radialer Kurven. Dann Integral bildbar:

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega} = \int_{r_0}^{\infty} dU \qquad \overset{U=-\frac{m}{r}}{\Longrightarrow} \qquad \frac{\omega(r)}{\omega(\infty)} = \frac{\Delta t(\infty)}{\Delta t(r)} = \exp\left(-\frac{m}{r}\right) \ .$$

Daher Bedingung an Rosen-Yilmaz-Metrik:

$$g_{\hat{t}\hat{t}} = e^{-\frac{2m}{r}}\, dt^2 \ .$$

Zwei mögliche Metriken, die das erweiterte ÄP erfüllen:

$$\widetilde{g} = e^{-\frac{2m}{r}} dt^2 - e^{\frac{2m}{r}} dr^2 - r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right) \ ,$$

$$g = e^{-\frac{2m}{r}} dt^2 - e^{\frac{2m}{r}} \left(dr^2 + r^2\, d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2\right) \qquad \text{(Rosen-Yilmaz-Metrik)} \ .$$

Näherungen der Metriken: Schwarzschild-Metrik:

$$\hat{g}_{\hat{t}\hat{t}} = 1 - \frac{2m}{r} \qquad \text{(exakt)} , \qquad \hat{g}_{\hat{r}\hat{r}} = 1 + \frac{2m}{r} + \frac{4m^2}{r^2} + \frac{8m^3}{r^3} + \mathcal{O}\left(\frac{m^4}{r^4}\right) \; .$$

Metriken, die erweitertes ÄP erfüllen:

Faktoren analog SSM:

$$\widetilde{g}_{\hat{t}\hat{t}} = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{2m^2}{r^2} - \frac{4}{3}\frac{m^3}{r^3} + \mathcal{O}\left(\frac{m^4}{r^4}\right) \; ,$$

$$\widetilde{g}_{\hat{r}\hat{r}} = 1 + \frac{2m}{r} + \frac{2m^2}{r^2} + \frac{4}{3}\frac{m^3}{r^3} + \mathcal{O}\left(\frac{m^4}{r^4}\right) \; .$$

Isotrope Faktoren (auf Form der SSM transformiert):

$$g_{\hat{t}\hat{t}} = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{25}{6}\frac{m^3}{r^3} + \mathcal{O}\left(\frac{m^4}{r^4}\right) \; ,$$

$$g_{\hat{r}\hat{r}} = 1 + \frac{2m}{r} + \frac{5m^2}{r^2} + \frac{9m^3}{r^3} + \mathcal{O}\left(\frac{m^4}{r^4}\right) \; .$$

Im Rahmen der heutigen Meßgenauigkeit: Keine Abweichungen der Rosen-Yilmaz-Metrik von Schwarzschild-Metrik bei klassischen Tests der Allgemeinen Relativitätstheorie:
u. a. Perihel-Drehung des Merkur und Lichtablenkung an der Sonne korrekt beschrieben.

Zur Theorie von Kaniel und Itin

Lagrangian mit *Koableitung* $d^\dagger := -{}^\star d\, {}^\star$, nach der Idee von Kaniel und Itin:

$$V_{\mathsf{KI}} = d\vartheta^\alpha \wedge {}^\star d\vartheta_\alpha + d^\dagger\vartheta^\alpha \wedge {}^\star d^\dagger\vartheta_\alpha \ .$$

Eingeschränkte spurfreie Variation: volumenerhaltend:

$$\delta\vartheta^\alpha = \omega_\beta{}^\alpha\vartheta^\beta \quad \text{mit} \qquad \omega_\gamma{}^\gamma = 0 \ .$$

Antisymmetrische Variation: $\delta^\star = {}^\star\delta$, symmetrisch-spurfreie Variation: $\delta^\star = -{}^\star\delta$.

Damit Feldgleichung:

$$-\Box\,{}^\star\vartheta_\alpha = \Sigma_\alpha \ .$$

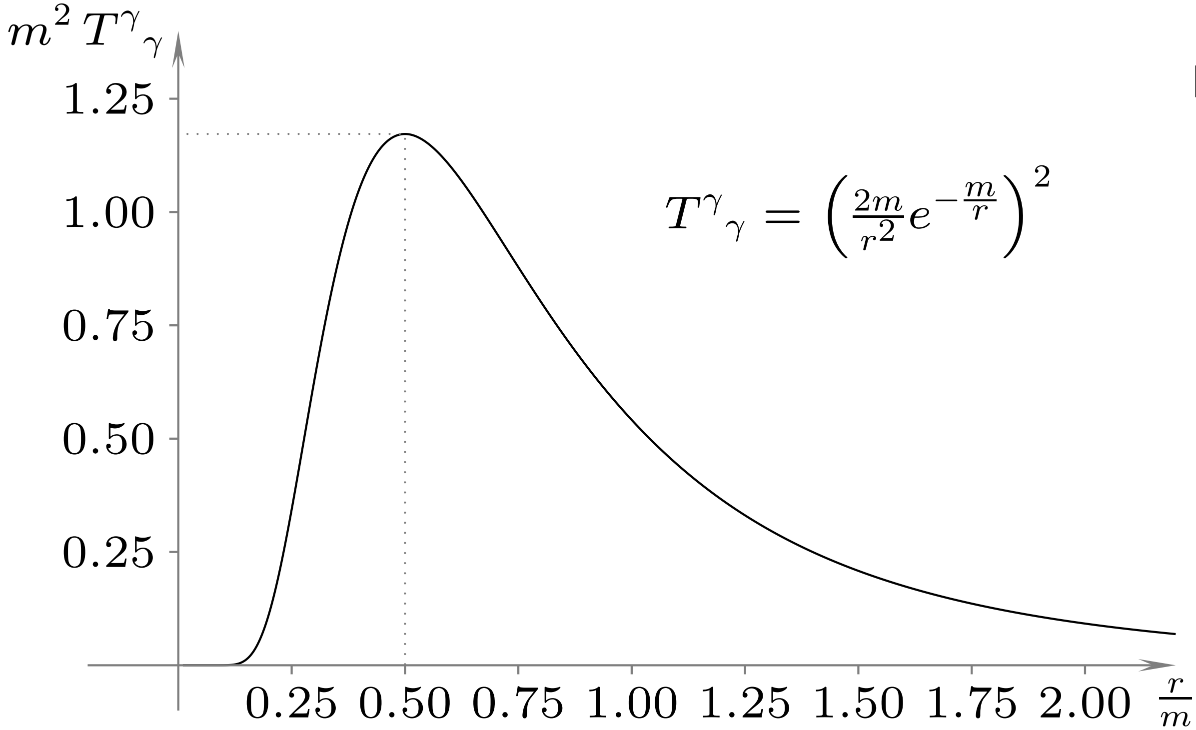
Aufspaltung in

$$-\Box^\star\vartheta_\alpha + \frac{1}{4}e_\alpha\rfloor\left(\vartheta^\gamma \wedge \Box^\star\vartheta_\gamma\right) = \not{\Sigma}_\alpha \qquad \text{(spurfrei)}$$

$$-\vartheta^\gamma \wedge \Box^\star\vartheta_\gamma = \vartheta^\gamma \wedge \Sigma_\gamma \ \ \text{(Spur-Anteil)} \ .$$

Rosen-Yilmaz-Kobasis ist Lösung dieser Feldgleichungen für

$$\not{\Sigma}_\alpha = 0 \quad \text{und} \qquad T^\gamma{}_\gamma := -{}^\star\left(\vartheta^\gamma \wedge \Sigma_\gamma\right) = \left(\frac{2m}{r^2}e^{-\frac{m}{r}}\right)^2 \ .$$



Eigenschaften des Sternmodells:

- Materie des Sterns reicht ins Unendliche, exponentiell abfallend,
- Maximum der Massenverteilung bei $r = \frac{m}{2}$,
- wesentliche Masse des Sterns innerhalb des Schwarzschild-Radius $r_s = 2m$ (klassischer Radius Schwarzer Löcher),

- *Gesamtmasse* des Sterns:

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty T^\gamma{}_\gamma\, r^2\, dr = \int\limits_0^\infty \frac{m^2}{2\pi r^2}\, e^{-\frac{2m}{r}}\, dr \; = m \int\limits_{-\infty}^0 e^x\, dx = m \;.$$

Zusammenfassung

- Teleparallelismus als Eichtheorie der Translationen allgemein untersucht,
- geometrische Größen veranschaulicht,
- Verbindung mit Einsteinscher Theorie für spezielle Koeffizienten,
- Rosen-Yilmaz-Metrik erfüllt eine Art globales Äquivalenzprinzip, zur Schwarzschild-Metrik ähnlich,
- Theorie von Kaniel und Itin: eingeschränkte volumenerhaltende Variation, Wellengleichung als Feldgleichung
- Rosen-Yilmaz-Kobasis Lösung des spurfreien Anteils der Feldgleichung, Spur-Anteil liefert benötigte Massenverteilung eines Sterns.