

Vorab-Version 0.97

Mitschrift zur Vorlesung

Funktionentheorie¹

Uwe Münch
Schmittgasse 92
51143 Köln

Sommersemester 92²

e-mail³: `muench@ph-cip.uni-koeln.de`

¹Die Mitschrift basiert auf der Vorlesung von Prof. Armbrust im SS 92.

²Version vom 3. Mai 1997

³Bitte Korrekturen an diese Adresse senden. Danke.

Vorwort

Dies ist ein Skript zu der Vorlesung Funktionentheorie, die von Herrn Prof. Dr. M. Armbrust im Sommersemester 1992 gehalten wurde.

Dieses Skript wurde mit dem Textsatzprogramm $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ unter der Testversion des Formats $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X} 2_{\epsilon}$ im Kompatibilitätsmodus gesetzt. Einige Zeichen wurden mit einer $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}\text{-L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ -Option erzeugt, die zusätzliche Symbole bereitstellt. Die Zeichnungen sind mit dem Programm xfig erstellt und in $\text{P}_{\text{T}}\text{C}_{\text{T}}\text{E}_{\text{X}}$ konvertiert. Dank daher an Donald Knuth, Leslie Lamport, Stefan Lindner, Lutz Birkhahn, Rainer Schöpf, Frank Mittelbach und vielen anderen für die Bereitstellung dieser Programme auf PD-Basis.

Weiterhin möchte ich betonen, daß dieses Skript lediglich aus der Mitschrift der Vorlesung von Herrn Prof. Armbrust entstanden ist, die Oliver Höhn für mich gemacht hat. Ganz besonderer Dank gilt daher Herrn Prof. Armbrust für seine Vorlesung und Oliver Höhn für seine Mitschrift. Ohne diese Vorlesung bzw. der Mitschrift gäbe es das Skript ja nicht.

In den Anhängen A und B sind einige ausgewählte Aufgaben mit Lösungen aus den Übungen zusammengestellt. Ich danke Oliver Rudolf für seine gute Darstellung der Lösungen in seiner Übungsgruppe. Im Anhang C habe ich einige Ergänzungen aus der Literatur zusammengestellt, auf die Prof. Armbrust an einigen Stellen verwiesen hat (das dauerte leider 3 Semester ...). Weiterhin steht im Anhang D etwas zu den (für Physiker wichtigen) Kramers-Kronig-Relationen.

Oliver Flimm und Clemens Weber haben diese Mitschrift Korrektur gelesen und auf Schreibfehler durchsucht. Ich möchte mich hiermit auch herzlich bei ihnen bedanken.

Inhaltsverzeichnis

1. Die komplexen Zahlen	1
1.1 Die Riemannsche Zahlenkugel, stereographische Projektion	5
1.2 Die Möbiustransformation	7
2. Unendliche Reihen	9
2.1 Potenzreihen, Zweige	12
3. Komplexe Differentiation	17
3.1 Definition und grundlegende Aussagen	17
3.2 Die Cauchy–Riemann’schen Differentialgleichungen	20
3.3 Analytische (holomorphe) Funktionen	23
4. Komplexe Integration	25
4.1 Stammfunktionen	30
4.2 Umlaufzahl und Orientierung	35
5. Die Cauchy–Integralformel	38
5.1 Taylor–Entwicklung analytischer Funktionen	41
5.2 Laurent–Entwicklung und Singularitäten	43
6. Der Residuensatz	51
6.1 Anwendungen des Residuensatzes	55
6.1.1 Residuenkalkül	58
6.2 Meromorphie	68
7. Konforme Abbildungen	69
8. Analytische Fortsetzung	74
A. Aufgaben	79
B. Lösungen	90

Inhaltsverzeichnis

C. Ergänzungen	123
C.1 Der Weierstraß'sche Konvergenzsatz	123
C.2 Stammfunktionen und Wegunabhängigkeit	126
C.3 Der Cauchy-Integralsatz	128
C.4 Beschränktheit von $\cot(\pi z)$ auf C_N	128
C.5 Der Riemann'sche Abbildungssatz	129
C.6 Der Monodromiesatz	129
C.7 Meromorphe Funktionen	129
C.8 Der Satz von Mittag-Leffler	132
C.9 Der kleine Satz von Picard	133
D. Die Kramers-Kronig-Relationen	134
D.1 Etwas mehr über Hauptwerte	134
D.2 Herleitung der Kramers-Kronig-Relationen	137
Index	140

Abbildungsverzeichnis

1.1	Die Gaußsche Zahlenebene	2
1.2	Die dritten Einheitswurzeln	4
1.3	Stereographische Projektion, Riemann'sche Zahlenkugel	5
4.1	Jordan-Kurve	25
4.2	Riemannsumme	26
4.3	Polygonzugänderungen bei Überschneidungen	34
4.4	Integration über „Ringgebiete“	35
5.1	Zur Laurentreihenentwicklung	45
6.1	Zum Beweis des Residuensatzes	52
6.2	Ein Weg (Beispiel zum Residuensatz)	54
6.3	Der Graph von $f \circ \gamma = e^{-3it} (e^{it} - 2)$	56
6.4	Ellipse	64
7.1	Die auf $\mathbb{C}^*$ konforme Funktion z^2	71
7.2	Eine auf $\mathbb{C}^* \setminus \{-1, 1\}$ konforme Funktion	71
8.1	Kreiskettenverfahren	75
8.2	Analytische Fortsetzung mittels Logarithmenzweigen	77
D.1	Annäherung des Pols von rechts	136
D.2	Ersatzkurve durch linken Bogen	136
D.3	Differenz von Links- und Rechtswert	136
D.4	Zur Cauchy-Formel mit z_0 auf der Kontour	138

1. Die komplexen Zahlen

Wir führen die Menge

$$\mathbb{C} := \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

ein. Dabei gilt die definierende Gleichung $i^2 = -1$. (Es gilt natürlich $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ (nämlich, für $y = 0$)). Die laxe Formulierung, „ i ist Wurzel von -1 “, ist so nicht korrekt, denn mit i ist auch $-i$ Lösung der definierenden Gleichung. Es gilt $i \neq -i$, denn wäre $i = -i$, so gälte

$$0 = i + i = 2i .$$

Da für diese Zwei $2 \in \mathbb{R}$ gilt, müßte daher $i = 0$ sein. Aus der definierenden Gleichung sehen wir: $i \notin \mathbb{R}$, daher natürlich insbesondere nicht Null.

Wir wollen nun Operationen $+$ und $\cdot$ so definieren, daß $\mathbb{C}$ ein Körper ist. (Die Körperaxiome sollten ja bekannt sein (abelsche Gruppe bzgl. beider Operationen; Distributivität).)

Für die Addition erfüllt folgende Rechenregel die Forderung:

$$(x + iy) + (u + iv) := (x + u) + i(y + v) .$$

Aus dieser Additionsvorschrift und $i \notin \mathbb{R}$ folgt:

$$x + iy = u + iv \iff x = u \quad \text{und} \quad y = v .$$

Weiterhin erinnert diese Additionsvorschrift an die Vektoraddition im $\mathbb{R}^2$. Durch die Identifikation von $z = x + iy$ mit dem Paar $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ kann man also die komplexen Zahlen als Vektoren im $\mathbb{R}^2$ auffassen, die mit einer speziellen Multiplikation ausgestattet sind (s.u.). Entsprechend stellt man die komplexen Zahlen in der **Gaußschen Zahlenebene** dar (siehe Bild 1.1).

Definition: Für die komplexe Zahl $z = x + iy$ bezeichnen wir

$$\operatorname{Re}(x + iy) = x$$

als den *Realteil* von z ,

$$\operatorname{Im}(x + iy) = y$$

als den *Imaginärteil* von z .

i wird als *imaginäre Einheit* bezeichnet, für $\operatorname{Re}(z) = 0$ heißt z *imaginäre Zahl*. ■

Die Multiplikationsvorschrift, die $\mathbb{C}$ zu einer abelschen Gruppe bzgl. $\cdot$ macht, ist folgende:

$$(x + iy) \cdot (u + iv) := (xu - yv) + i(xv + yu) .$$

Wir überprüfen hier nur die Gruppeneigenschaft ‚Existenz des Inversen‘.

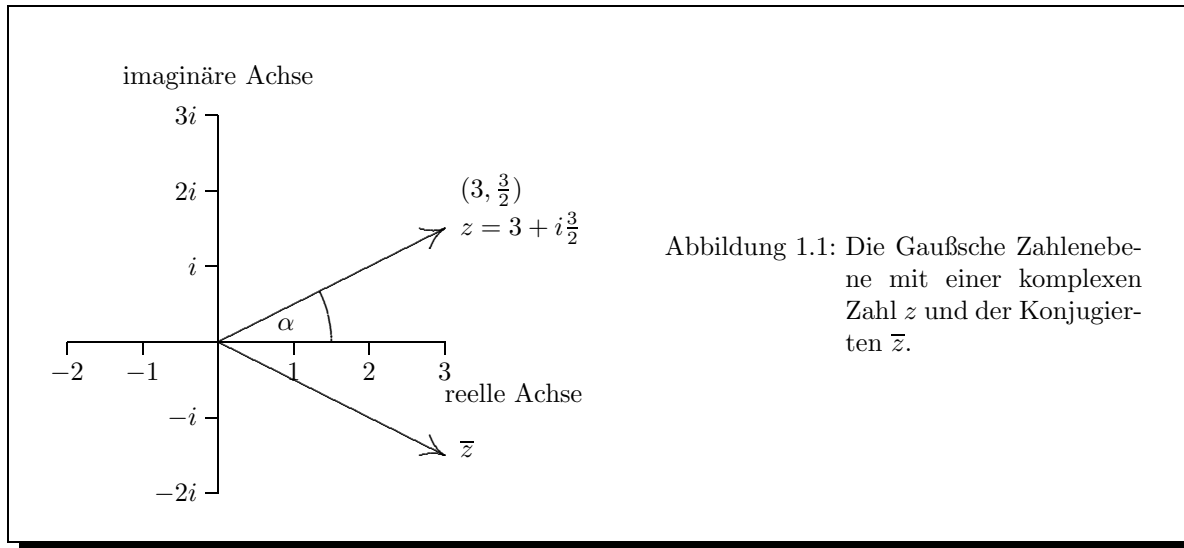


Abbildung 1.1: Die Gaußsche Zahlenebene mit einer komplexen Zahl z und der Konjugierten $\bar{z}$.

Behauptung: Für $z = x + iy \neq 0$ ist

$$\frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

das multiplikativ Inverse. (selbst nachrechnen)

Definition: Für $z = x + iy$:

$$|z| = +\sqrt{x^2 + y^2}$$

heißt *Betrag von z* (natürlich gilt hier: $|z| = 0 \iff z = 0$),

$$\bar{z} = x - iy$$

heißt *Konjugierte zu z* . Geometrisch handelt es sich um eine Spiegelung an der reellen Achse (vgl. Bild 1.1). ■

Es gilt:

$$|z|^2 = z\bar{z} = |\bar{z}|^2.$$

Dies liegt daran, daß $\bar{\bar{z}} = z$ gilt.

Definition: Eine Funktion $\phi : K_1 \longrightarrow K_2$ mit den Eigenschaften

$$\phi(z_1 + z_2) = \phi(z_1) + \phi(z_2) \quad \text{und}$$

$$\phi(z_1 z_2) = \phi(z_1) \phi(z_2)$$

nennt man *Körperisomorphismus*. Gilt $K_1 = K_2$, so heißt ϕ *Körperautomorphismus*. ■

Die Konjugation ist somit ein Körperautomorphismus von $\mathbb{C}$.

Weitere nützliche Beziehungen und Ausdrücke zwischen den bisher definierten Begriffen sind:

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) ,$$

$$\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) ,$$

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2| .$$

Um im folgenden die komplexen Zahlen auch in Polarkoordinaten darstellen zu können, definieren wir:

Definition: Der *Hauptwert des Arguments* von z ($\neq 0$), $\operatorname{Arg}(z)$, ist der orientierte Winkel $\in [0, 2\pi[$ zwischen der positiven reellen Achse und dem Ortsvektor von z .

$$\arg(z) := \operatorname{Arg}(z) + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z}) .$$

Dabei ist $\arg(z)$ eine unbestimmte Funktion. ■

Aus der Abbildung 1.1 erkennt man, daß für den Polarwinkel gilt:

$$\cos(\alpha) = \frac{x}{|z|} , \quad \sin(\alpha) = \frac{y}{|z|} .$$

Also sieht die **Polardarstellung** der komplexen Zahlen so aus:

$$z = x + iy = |z| (\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)) \quad (1.1)$$

Wie wir oben schon gesehen haben, ist die Addition komplexer Zahlen geometrisch eine Addition von Ortsvektoren. Wie sieht es mit der geometrischen Interpretation der komplexen Multiplikation aus ?

$$\begin{aligned} z_j &= |z_j| (\cos(\alpha_j) + i \sin(\alpha_j)) & j &= 1, 2 \\ z_1 z_2 &= |z_1| |z_2| ((\cos(\alpha_1) \cos(\alpha_2) - \sin(\alpha_1) \sin(\alpha_2)) + i (\sin(\alpha_2) \cos(\alpha_1) + \sin(\alpha_1) \cos(\alpha_2))) \\ &= |z_1| |z_2| (\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2)) \end{aligned}$$

Dabei gilt:

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2) - 2k\pi ,$$

mit k geeignet 0 oder 1, oder einfacher geschrieben:

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) .$$

Also können wir die Funktion

$$z \mapsto az = |a||z| (\cos(\operatorname{Arg}(z) + \alpha) + i \sin(\operatorname{Arg}(z) + \alpha)) ,$$

wobei $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\alpha = \operatorname{Arg}(a)$, als *Drehstreckung* identifizieren (Drehung um α , Streckung um $|a|$, dies ist die gesuchte geometrische Interpretation).

Nun können wir hiermit eine Formel für die Potenzen (mit $n \in \mathbb{Z}$) finden:

$$z = |z| (\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)) \implies z^n = |z|^n (\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha)) .$$

Man sieht nämlich leicht, daß diese Formel für $n = -1, 0, 1$ gilt und mit vollständiger Induktion ergibt sich obige Gleichung. Als Folgerung ergibt sich die sogenannte

Moivre-Formel:

$$(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))^n = \cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha) .$$

Wir suchen nun die n -ten Wurzeln einer komplexen Zahl $w = |w| (\cos(\gamma) + i \sin(\gamma))$, wobei $\gamma = \arg(w)$. Für die n -te Wurzel $z = |z| (\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))$ von w gilt also:

$$|w| (\cos \gamma + i \sin \gamma) = w = z^n = |z|^n (\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha)) .$$

Hieraus folgt sofort:

$$|z| = \sqrt[n]{|w|} \quad \text{und} \quad \gamma = n\alpha + 2k\pi$$

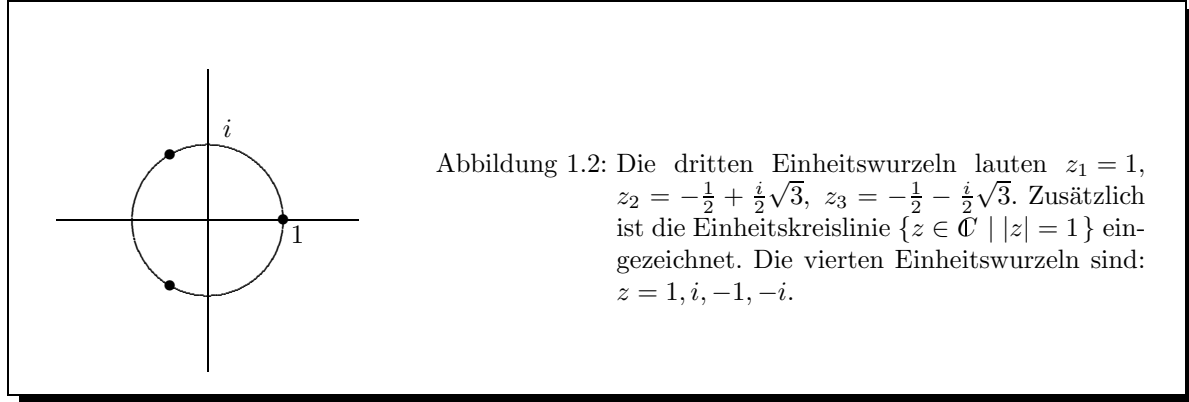
für irgendein $k \in \mathbb{Z}$. Also ergibt sich $\alpha \in [0, 2\pi[$ aus

$$\alpha = \frac{\gamma}{n} - \frac{2k\pi}{n} \quad \text{mit } k \in \{1 - n, \dots, 0\} .$$

Die Hauptwerte $\alpha = \frac{\gamma}{n}, \frac{\gamma}{n} + \frac{2\pi}{n}, \dots, \frac{\gamma}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}$ liefern also n verschiedene n -te Wurzeln aus w , weitere n -te Wurzeln aus w gibt es nicht. Insbesondere ergibt sich für $w = 1$:

$$1, \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}, \dots, \cos \frac{2(n-1)\pi}{n} + i \sin \frac{2(n-1)\pi}{n},$$

die sogenannten **n -ten Einheitswurzeln**. Seien nun ε_1 und ε_2 zwei n -te Einheitswurzeln. Dann ist auch das Produkt eine n -te Einheitswurzel: $(\varepsilon_1 \varepsilon_2)^n = \varepsilon_1^n \varepsilon_2^n = 1 \cdot 1 = 1$. Es ergibt sich sogar, daß die n -ten Einheitswurzeln unter der Multiplikation eine Gruppe bilden.



Sei nun $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z^n = w$ und $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ die n -ten Einheitswurzeln, so gilt: $z\varepsilon_1, \dots, z\varepsilon_n$ sind alle n -ten Wurzeln aus w . Denn wäre $z\varepsilon_i = z\varepsilon_j$, so gälte $(z \neq 0) \quad \varepsilon_i = \varepsilon_j$. Aber für $i \neq j$ sind die Einheitswurzeln verschieden, somit sind obige Wurzeln alle n -ten Wurzeln.

Wir definieren nun:

$$\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\} .$$

Wir wollen, daß aus $\lim |z_n| = +\infty$ ($\in \widehat{\mathbb{R}}$) (also reell gesehen) $\lim z_n = \infty$ ($\in \widehat{\mathbb{C}}$) (das komplexe Unendlich) folgt. Dazu definieren wir die Umgebung um Unendlich (zusätzlich zu den Umgebungen um jeden Punkt $\in \mathbb{C}$ bzgl. der euklidischen Norm) ($R \in \mathbb{R}_+$):

$$U_R(\infty) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\} \cup \{\infty\} .$$

Mit dieser (kanonischen) Topologie ist $\widehat{\mathbb{C}}$ kompakt (vgl. unten).

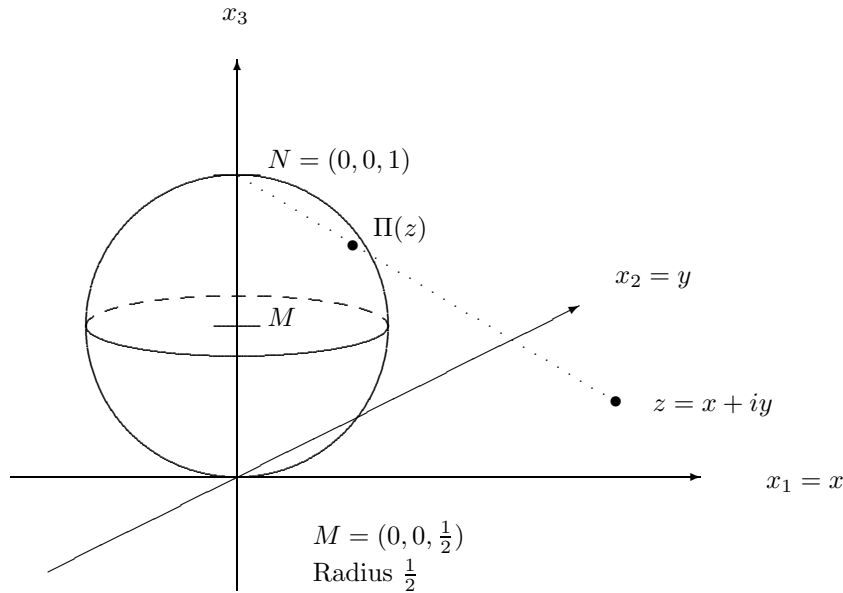


Abbildung 1.3: Bijektive Abbildung der Gaußschen Zahlenebene ($\widehat{\mathbb{C}}$) auf die Riemann'sche Zahlenkugel mittels stereographischer Projektion. (Diese stereographische Projektion erklärt auch, warum $\widehat{\mathbb{C}}$ kompakt ist (vgl. Text).)

Aus Folgenbetrachtungen ergeben sich die Definitionen folgender Ausdrücke für $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \infty \pm z &:= \pm z + \infty := \infty; & \frac{z}{\infty} &:= 0, \\ \infty \cdot z &:= z \cdot \infty := \infty =: \infty \cdot \infty, \end{aligned}$$

und falls $z \neq 0$:

$$\frac{z}{0} := \infty =: \frac{\infty}{0}.$$

Undefiniert sind weiterhin folgende Ausdrücke:

$$\infty \pm \infty; \quad 0 \cdot \infty; \quad \frac{\infty}{\infty}; \quad \frac{0}{0}.$$

Beachte: $\widehat{\mathbb{C}}$ ist **kein** Körper!

1.1 Die Riemannsche Zahlenkugel, stereographische Projektion

Wir betrachten nun Abbildung 1.3 im $\mathbb{R}^3$ mit kartesischen Koordinaten: Die Sphäre S^2 wird **Riemann'sche Zahlenkugel** genannt und wird durch die Gleichung

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_3 \quad (1.2)$$

parametrisiert. Die Abbildung Π , die in der Abbildung 1.3 angedeutet ist, heißt *stereographische Projektion*¹. Um die Funktion Π explizit angeben zu können, folge man dem folgenden Rezept: Der Funktionswert $\Pi(z)$ ergibt sich aus der Bestimmung von $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ so, daß

$$(0, 0, 1) + \lambda(x, y, -1)$$

auf S^2 liegt ($\lambda = 0$ ist trivialerweise der Nordpol und daher uninteressant). Dazu setzt man obige Geradengleichung in Glg. 1.2 ein. Es ergibt sich nach Berechnung von λ :

$$\Pi(z) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + 1} \right).$$

Für $(x_1, x_2, x_3) \in S^2 \setminus \{N\}$ ist

$$(x_1, x_2, x_3) = \Pi \left(\frac{x_1}{1 - x_3} + i \frac{x_2}{1 - x_3} \right).$$

Mit $\Pi(\infty) = N$ wird Π eine Bijektion zwischen $\widehat{\mathbb{C}}$ und S^2 . Da die Funktion sogar stetig ist in beiden Richtungen, ist Π sogar Homöomorphismus (und wir sehen jetzt auch ein, daß $\widehat{\mathbb{C}}$ kompakt ist²).

Definition: Der *chordale Abstand* zweier Punkte $a, b \in \widehat{\mathbb{C}}$ ist

$$\rho(a, b) := \text{euklidischer Abstand } d(\Pi(a), \Pi(b)) \text{ im } \mathbb{R}^3.$$

■

Dies ist eine **Metrik auf $\widehat{\mathbb{C}}$** , die natürlich nicht die gleiche Metrik ist wie die euklidische (der Zahlenebene) auf $\mathbb{C}$. Sie liefert aber die gleiche Topologie auf $\widehat{\mathbb{C}}$ wie die obige. Für den chordalen Abstand gilt: $\rho(a, b) \leq 1$ (das ist der Durchmesser der Riemann'schen Zahlenkugel).

Wir erklären folgende Begriffe:

Kreis in $\widehat{\mathbb{C}}$:= Kreis in $\mathbb{C}$.

Gerade in $\widehat{\mathbb{C}}$:= (Gerade in $\mathbb{C}$) $\cup \{\infty\}$.

Kreise auf S^2 := nichtleere, mehrpunktige Schnitte von Ebenen mit S^2 .

Satz 1: Die Projektion Π bildet Kreise in $\widehat{\mathbb{C}}$ auf Kreise in $S^2 \setminus \{N\}$ ab und Geraden in $\widehat{\mathbb{C}}$ auf Kreise in S^2 durch N .

Beweis: Die Ebene

$$E : \quad \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = \delta \quad ((\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \delta \in \mathbb{R})$$

habe mit S^2 mindestens zwei Punkte gemeinsam. Das Urbild in $\mathbb{C}$ von $E \cap S^2$ unter Π wird beschrieben durch

$$\begin{aligned} \alpha \frac{x}{x^2 + y^2 + 1} + \beta \frac{y}{x^2 + y^2 + 1} + \gamma \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + 1} &= \delta \\ \iff \alpha x + \beta y + (\gamma - \delta)(x^2 + y^2) &= \delta. \end{aligned}$$

Aus der Ebenengleichung erkennt man:

$$\gamma = \delta \iff N \in E.$$

¹Vergleiche zu den Aussagen zur stereographischen Projektion und zur Möbiustransformation auch die Aufgabe 176 aus den Übungen zur Analysis III; beachte allerdings, daß dort f die Umkehrfunktion zu dem Π hier ist und die Riemann'sche Kugel dort anders liegt.

²Wir haben einen Homöomorphismus zwischen $\widehat{\mathbb{C}}$ und S^2 . Mit Analysis III, 12.16, und da S^2 kompakt (im $\mathbb{R}^3$) nach Heine-Borel (12.19), folgt diese Bemerkung.

Falls $\gamma = \delta$: $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ (sonst wäre der Schnitt nicht mehripunktig), also ist das Urbild von $S^2 \cap E$ in $\mathbb{C}$ eine Gerade, also ist $\Pi^{-1}(S^2 \cap E)$ eine Gerade in $\widehat{\mathbb{C}}$.

Falls $\gamma \neq \delta$: Also ist $\gamma - \delta \neq 0$ und $\Pi^{-1}(S^2 \cap E)$ ist ein Kreis in $\mathbb{C}$, also ein Kreis in $\widehat{\mathbb{C}}$ (denn mindestens zwei Punkte lösen die Gleichung nach Voraussetzung).

■

1.2 Die Möbiustransformation

Definition: Sei $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$. Die Abbildung

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

von $\widehat{\mathbb{C}}$ auf $\widehat{\mathbb{C}}$ (insbesondere $-\frac{d}{c} \mapsto \infty$ und $\infty \mapsto \frac{a}{c}$) heißt *Möbiustransformation*.

■

Der Ansatz

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

liefert durch formale Rechnung (in $\mathbb{C}$)

$$z = \frac{dw - b}{-cw + a} \quad \det \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \neq 0,$$

also wieder eine Möbiustransformation. ($\frac{a}{c} \mapsto \infty$, $\infty \mapsto -\frac{d}{c}$). (Also: das Inverse existiert; Abbildung auf $\widehat{\mathbb{C}}$).

Bezüglich Hintereinanderausführung bilden die Möbiustransformationen eine Gruppe.

$$id_{\widehat{\mathbb{C}}} : a = 1, b = 0, c = 0, d = 1.$$

Diese Gruppe wird erzeugt durch spezielle Möbiustransformationen:

1. **Translationen:** $w = z + b$ ($b \in \mathbb{C}$).
2. **Drehstreckungen:** $w = az$ ($a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$).
3. **Inversion:** $w = \frac{1}{z}$.

Behauptung: Translationen und Drehstreckungen führen Geraden in Geraden und Kreise in Kreise über. Inversionen führen

- Geraden durch 0 in Geraden durch 0
- Geraden ohne 0 in Kreise durch 0
- Kreise durch 0 in Geraden ohne 0
- Kreise ohne 0 in Kreise ohne 0

über.

Beweis: Sei $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{C}$, so daß $|q|^2 > \alpha\gamma$. Dann beschreibt

$$\alpha z \bar{z} + q \bar{z} + \bar{q} z + \gamma = 0 \quad (1.3)$$

einen Kreis oder eine Gerade, letzteres genau dann, wenn $\alpha = 0$. Denn setzt man in (1.3) $z = x + iy$ und $q = u + iv$ ein, so erhält man

$$\alpha(x^2 + y^2) + 2ux + 2vy + \gamma = 0.$$

Diese Gleichung beschreibt unter den angegebenen Bedingungen alle Kreise und Geraden in $\mathbb{C}$.

Setzt man nun $w = \frac{1}{z}$ in (1.3) ein und multipliziert mit $w\bar{w}$, so ergibt sich:

$$\alpha + qw + \bar{q}\bar{w} + \gamma w\bar{w} = 0.$$

Diese Gleichung beschreibt das Bild (bzw. Urbild) der Gleichung (1.3) unter Inversion; es handelt sich also wieder um einen Kreis oder Gerade (Strukturgleichheit der Gleichungen). Für $\gamma = 0$ beschreibt die invertierte Gleichung eine Gerade, für $\alpha = 0 \wedge \gamma = 0$ beschreibt sie eine Gerade durch 0. Betrachtet man die Ausgangsgleichung für diese Bedingungen, so erhält man die Behauptung. ■

Sei $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ Möbiustransformation. Falls $c = 0$, ist $d \neq 0$ und

$$f(z) = \underbrace{\overbrace{\frac{a}{d} z}^{\text{Drehstreckung}} + \frac{b}{d}}_{\text{Translation}}.$$

Sei $c \neq 0$: Dann ist $f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$, wobei

$$\begin{aligned} f_1(z) &= z + \frac{d}{c}, \\ f_2(z) &= \frac{1}{z}, \\ f_3(z) &= \frac{1}{c^2} \underbrace{(bc - ad)}_{\neq 0} z, \\ f_4(z) &= z + \frac{a}{c}. \end{aligned}$$

Denn damit gilt:

$$z \xrightarrow{f_1} z + \frac{d}{c} \xrightarrow{f_2} \frac{1}{z + \frac{d}{c}} \xrightarrow{f_3} \frac{bc - ad}{c^2 z + cd} \xrightarrow{f_4} \frac{az + b}{cz + d}.$$

Also gilt der folgende Satz:

Satz 2: Möbiustransformationen sind bijektive Abbildungen von $\widehat{\mathbb{C}}$ auf sich; sie bilden bzgl. Hintereinanderausführung eine Gruppe, die von Translationen, Drehstreckungen und der Inversion $\frac{1}{z}$ erzeugt wird. Das Bild einer Geraden oder eines Kreises unter einer Möbiustransformation ist entweder eine Gerade oder ein Kreis.

2. Unendliche Reihen

Anmerkung von mir: In diesem Kapitel gehen wir davon aus, daß die im folgenden unbewiesenen Aussagen und Sätze in der Vorlesung Analysis für das Reelle bewiesen wurden. Der Beweis der entsprechenden komplexen Aussage geht nach dem gleichen Prinzip, es sind keine neuen Betrachtungen notwendig. Wer die Vorlesung von Professor Reckziegel gehört hat, kennt den Beweis meist schon fürs Komplexe, teilweise sogar für beliebige Banachräume (somit sind die Aussagen hier nicht neu, sondern nur eine Zusammenstellung). In Fußnoten werde ich Hinweise auf die jeweiligen Kapitel im Reckziegel-Skript, seiner Vorlesung bzw. der zugehörigen Übung geben.

Wir setzen den Konvergenzbegriff in $\mathbb{C}$ voraus¹ und erklären den Grenzwert gegen ∞ in $\widehat{\mathbb{C}}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty \iff \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = +\infty \quad (\in \widehat{\mathbb{R}}).$$

Falls $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = w$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$, wobei $z_n, w_n \in \mathbb{C}$, so gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n \pm w_n) = z \pm w. \quad (2.1)$$

Beweis: Den Beweis sieht man durch Zerlegen in Real- und Imaginärteil und Betrachten der reellen Folgen². ■

Eine *unendliche Reihe* ist ein Ausdruck

$$\sum_{k=m}^{\infty} a_k, \quad \text{wobei} \quad m \in \mathbb{Z}, \quad a_k \in \mathbb{C}.$$

Eine *Partialsumme* ist die endliche Summe

$$\sum_{k=m}^n a_k =: s_n \quad (n \geq m).$$

Die Reihe konvergiert, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ in $\mathbb{C}$ existiert³. ■

Wir wollen nun einige Hilfsmittel und Methoden zur Behandlung unendlicher Reihen zur Verfügung stellen:

1. Falls

$$\sum_{k=m}^{\infty} z_k = s \in \widehat{\mathbb{C}} \quad \wedge \quad \sum_{k=m}^{\infty} w_k = r \in \mathbb{C}, \quad z \in \mathbb{C},$$

¹Definition des Konvergenzbegriffs in beliebigen metrischen Räumen: Analysis I, 4.1.

²Der Beweis für metrische Produkträume (a, b) : Analysis I, 4.5; für normierte Vektorräume: Analysis I, 5.3.

³die entsprechende Definition: Analysis I, 6.1.

so gilt⁴:

$$\sum_{k=m}^{\infty} (z_k \pm w_k) = s \pm r ,$$

$$\sum_{k=m}^{\infty} z \cdot z_k = z \cdot s .$$

2. **Cauchy-Kriterium**⁵: $\sum_{k=m}^{\infty} z_k$ konvergiert (in $\mathcal{C}$) genau dann, wenn für jedes reelle $\varepsilon > 0$ ein $k_\varepsilon \geq m$ existiert, so daß für alle k_1, k_2 mit $k_\varepsilon \leq k_1 < k_2$ gilt:

$$|z_{k_1} + z_{k_1+1} + \dots + z_{k_2}| < \varepsilon .$$

Das heißt: Die Aussage „Die Folge der Partialsummen ist eine Cauchy-Folge“ reicht für die Konvergenzaussage aus⁶.

3. *Notwendige Bedingung*⁷: Falls $\sum_{k=m}^{\infty} z_k$ in $\mathcal{C}$ (nicht $\widehat{\mathcal{C}}$) konvergiert, gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0 .$$

4. $\sum_{k=m}^{\infty} z_k$ heißt *absolut konvergent*⁸, wenn $\sum_{k=m}^{\infty} |z_k|$ in $\mathbb{R}$ konvergiert. (Eine konvergente Reihe, die nicht absolut konvergiert, heißt *bedingt konvergent*.) Absolut konvergente Reihen sind konvergent:

$$|z_{k_1} + \dots + z_{k_2}| \leq |z_{k_1}| + \dots + |z_{k_2}| < \varepsilon .$$

5. **Die geometrische Reihe**⁹:

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \quad \text{mit den Partialsummen} \quad s_n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \quad (\text{für } z \neq 1)$$

divergiert für $|z| \geq 1$ nach 3). Falls $|z| < 1$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{1 - z} .$$

Beispiel:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{i}{3}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{i}{3}} = \frac{3}{3 - i} = \frac{9 + 3i}{10} .$$

6. **Vergleichskriterium für Konvergenz**¹⁰: Wenn $\sum_{k=m}^{\infty} w_k$ absolut konvergiert und ein k_0 existiert, so daß für alle $k \geq k_0$: $|z_k| \leq |w_k|$, so konvergiert auch $\sum_{k=m}^{\infty} z_k$ absolut.

7. **Wurzel-Kriterium**: Sei

$$m \geq 1 , \quad r = \limsup_{k \geq m} |z_k|^{\frac{1}{k}} .$$

$\sum_{k=m}^{\infty} z_k$ konvergiert absolut, wenn $0 \leq r < 1$ und divergiert, falls $1 < r \leq \infty$.¹¹

⁴vgl. Analysis I, 6.6.

⁵vgl. Analysis I, 6.7.

⁶ $\mathcal{C}$ ist ja ein Banachraum.

⁷vgl. Analysis I, 6.2.

⁸vgl. Analysis I, 6.8.

⁹vgl. Analysis I, 6.3.

¹⁰vgl. Majorantenkriterium in Analysis I, 6.9, Bedingung 1.

¹¹Konvergenz: 6.9, Bedingung 3; Divergenz: Aufgabe 93).

8. **Quotientenkriterium:** Seien alle

$$z_k \neq 0, \quad \mu = \limsup \left| \frac{z_{k+1}}{z_k} \right|, \quad \nu = \liminf \left| \frac{z_{k+1}}{z_k} \right|.$$

Falls $0 \leq \mu < 1$, ist $\sum_{k=m}^{\infty} z_k$ absolut konvergent. Falls $\nu > 1$, ist $\sum_{k=m}^{\infty} z_k$ divergent.¹²

9. **Integralkriterium**¹³: Falls f im Reellen (also nur für absolute Konvergenz anwendbar) monoton fallend ist, so gilt:

$$\sum_{k=m}^{\infty} f(k) \text{ konvergiert} \iff \int_m^{\infty} f(x) dx \text{ existiert.}$$

Bemerkung:

$$\left\{ \sum_{k=m}^{\infty} z_k \mid z_k \in \mathbb{C} \right\}$$

ist ein $\mathbb{C}$ -VR. Die konvergenten Reihen bilden einen echten Teilraum, die absolut konvergenten Reihen bilden einen echten Teilraum davon.

10. **Dirichlet-Produkt** von Reihen:

$$\left(\sum_{k=m}^{\infty} z_k \right) * \left(\sum_{k=m}^{\infty} w_k \right) =: \sum_{k=m}^{\infty} z_k w_k.$$

Falls beide Reihen absolut konvergieren, konvergiert auch das Dirichlet-Produkt absolut.

Beweis: Eigentlich sollte sich den jeder selbst schnell überlegen können. Aber ich bin ja nicht so: Weil $\sum_{k=m}^{\infty} z_k$ absolut konvergiert, gilt nach dem notwendigen Kriterium (3), daß ein $n_0 \in \mathbb{Z}$ existiert, so daß $|z_n| < 1$ für alle $n > n_0$. Daher für $k > n_0$: $|w_k z_k| = |w_k| |z_k| < |w_k|$. Nach dem Majoranten-Kriterium (6) ist dann die Behauptung gezeigt.

11. **Cauchy-Produkt:**

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} z_k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} w_k \right) =: \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n z_k w_{n-k} \right).$$

Falls beide Reihen absolut konvergieren, konvergiert auch das Cauchy-Produkt absolut¹⁴. Wenn

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_k = z, \quad \sum_{k=0}^{\infty} w_k = w$$

und das Cauchy-Produkt konvergiert, so konvergiert es gegen $z \cdot w$.

12. **Weierstraß'scher M-Test:** Im Vorgriff auf die folgenden Definitionen geben wir schon jetzt einen Majorantentest für Funktionenreihenkonvergenz an.

$\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ konvergiert absolut und gleichmäßig auf einer Teilmenge E , falls es eine konvergente Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ mit $M_k \in \mathbb{R}_+$ gibt, so daß

$$\forall z \in E : |f_k(z)| \leq M_k. \quad ^{15}$$

■

¹²Konvergenz: 6.9, Bedingung 2; Divergenz: Aufgabe 93).

¹³vgl. Analysis II, 10.6; Aufgabe 151).

¹⁴vgl. Analysis II, Aufgabe 95); es reicht bereits, daß eine Reihe absolut konvergiert.

Sei

$$f_k : E \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

f beschränkt auf E soll heißen:

$$\exists M \in \mathbb{R}_+ : \forall z \in E : |f(z)| \leq M.$$

$\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ konvergiert punktweise auf E gegen f will heißen: $\forall z \in E$ konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ gegen $f(z)$. Bei gleichmäßiger Konvergenz hängt $N(\varepsilon)$ nicht von z ab. Weiterhin gilt für gleichmäßige Konvergenz: Falls alle f_k stetig sind, so ist auch f stetig¹⁶ (analog beschränkt). Sei nun $z = x + iy$,

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y) \quad \text{mit} \quad u, v : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Dann ist f genau dann stetig bei z_0 , wenn u und v stetig bei (x_0, y_0) sind.

2.1 Potenzreihen, Zweige

Definition: Potenzreihen sind Funktionenreihen mit

$$f_k(z) = a_k(z - a)^k, \quad a, a_k \in \mathbb{C} \quad \text{fest.}$$

Satz 1 (Cauchy–Hadamard): Sei

$$R = \frac{1}{\limsup |a_k|^{\frac{1}{k}}} \quad R \in \{0\} \cup \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}.$$

R wird *Konvergenzradius* genannt (die Gleichung ist auf $\hat{\mathbb{C}}$ gültig).

1. Falls $0 < R < \infty$, konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - a)^k$ absolut auf $U_R(a)$ und gleichmäßig auf $\overline{U_r(a)}$ für $r < R$. Die Reihe divergiert für alle z mit $|z - a| > R$. Für $|z - a| = R$ läßt sich keine allgemeine Aussage machen.
2. Falls $R = 0$, konvergiert die Reihe nur für $z = a$.
3. Falls $R = \infty$, konvergiert die Reihe auf ganz $\mathbb{C}$ absolut und gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{C}$.

$U_R(a)$ heißt *Konvergenzkreis*. Da Stetigkeit eine lokale Eigenschaft ist, ist (wegen der gleichmäßigen Konvergenz auf $\overline{U_r(a)}$) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - a)^k$ nach dem 1. Vererbungssatz auf $U_R(a)$ stetig¹⁷.

Satz 2 (Quotientenkriterium für Potenzreihen): Falls alle $a_k \neq 0$ und $\lim \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = r$ und wiederum $r \in \{0\} \cup \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, so ist $r = R$.¹⁸

¹⁵Den Beweis zum Teil mit der glm. Konv. will ich hier ergänzen, vgl. auch: Barner, Flohr, *Analysis I*, S. 314.

Die Funktionen f_k sind durch M_k beschränkt, also $\in B(E, \mathbb{C})$. Nach Analysis I, 5.5, ist gleichmäßige Konvergenz gleichbedeutend mit Konvergenz in $B(E, \mathbb{C})$ bzgl. $\|\cdot\|_{\infty}$. Da $B(E, \mathbb{C})$ ein Banachraum ist, reicht die Erfüllung des Cauchy-Kriteriums. Nach Voraussetzung konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$, erfüllt also das Cauchy-Kriterium in $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{C}$ bzgl. $|\cdot|$. Wähle zu vorgegebenem ε also das n_0 des Kriteriums geeignet. Wegen der Dreiecksungleichung und der Voraussetzung $\|f_k\|_{\infty} \leq M_k$ gilt also mit den geeigneten $n, p \geq n_0$ das gewünschte Cauchy-Kriterium:

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k \right\|_{\infty} \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|f_k\|_{\infty} \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} M_k < \varepsilon.$$

¹⁶vgl. Analysis I, 5.4; 1. Vererbungssatz.

¹⁷vgl. Analysis II, 8.2.

¹⁸vgl. Analysis II, 8.2; Aufgabe 114).

Beweis: Serie 2, Aufgabe 3 (vgl. Anhang A, Seite 80, Anhang B, Seite 93). ■

Wenn wir im folgenden unendliche Summen auseinanderziehen, etc. , so tun wir dies unter Beachtung, daß dies nur für absolut konvergente Reihen sicher funktioniert (Umordnungssatz).

Beispiel: 1. **Exponentialfunktion**¹⁹:

$$\exp z := e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

konvergiert auf ganz $\mathbb{C}$ absolut und stellt eine stetige Funktion dar. Wir betrachten einige Eigenschaften:

$$\begin{aligned} e^z \cdot e^w &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \cdot \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k! (n-k)!} z^k w^{n-k} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z+w)^n \\ &= e^{z+w} . \end{aligned}$$

Also $e^z e^{-z} = e^0 = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Daraus folgt: $e^z \neq 0$ auf ganz $\mathbb{C}$.

Nun betrachten wir für $y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} e^{iy} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^k}{k!} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l y^{2l}}{(2l)!} + i \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l y^{2l+1}}{(2l+1)!} \\ &= \cos(y) + i \sin(y) . \end{aligned}$$

Dabei benutzen wir die Kenntnis der reellen Potenzreihen für Sinus und Kosinus. Wir erkennen nun mit (1.1), daß sich jede komplexe Zahl auch in der Form

$z = x + iy = r e^{i\phi}$

(2.2)

mit $r = |z|$ und $\phi \in \mathbb{R}$ schreiben läßt (zweite Art der Polardarstellung) .

Sei nun wieder $z = x + iy$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} e^z &= e^x \cdot (\cos y + i \sin y) \\ e^{z+2\pi ki} &= e^x \cdot (\cos(y + 2k\pi) + i \sin(y + 2k\pi)) = e^z \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z} . \end{aligned}$$

¹⁹Alle diese Beispiele wurden in Analysis II, Kapitel 8, nur fürs Reelle definiert und betrachtet; z.B. die Exponentialfunktion mit Hilfe der Funktionalgleichung in 8.6.

Die Exponentialfunktion ist also $2\pi i$ -periodisch. Dies ist die einzige Periode, denn (mit $w = u + iv$) folgt:

$$\begin{aligned} e^z = e^w &\iff 1 = e^{z-w} = e^{x-u}(\cos(y-v) + i \sin(y-v)) \\ &\iff e^{x-u} = 1 \quad \wedge \quad \cos(y-v) = 1 \quad \wedge \quad \sin(y-v) = 0 \\ &\iff x = u \quad \wedge \quad y = v + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ &\iff z = w + 2k\pi i \quad \text{für} \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Insbesondere ist $e^{2k\pi i} = 1$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

2. Trigonometrische Funktionen: Die Reihen

$$\begin{aligned} \sin(z) &:= \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{z^{2l+1}}{(2l+1)!}, \\ \cos(z) &:= \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{z^{2l}}{(2l)!} \end{aligned}$$

konvergieren absolut auf ganz $\mathbb{C}$. Durch Nachrechnen mit der Exponentialreihe erhält man die Formeln:

$$\begin{aligned} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} &= \sin(z), \\ \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} &= \cos(z). \end{aligned}$$

An diesen Formeln erkennt man sofort, daß auch die komplexen Sinus- und Kosinus-Funktionen 2π -periodisch sind (aber auf ganz $\mathbb{C}$), denn setzt man $w = z + 2\pi$ in die Formeln ein, so sieht man, daß sich die Funktionswerte nicht ändern, da die Exponentialfunktion $2\pi i$ -periodisch ist.

Wir wollen nun überprüfen, ob dies die einzige Periode ist. Sei also p eine beliebige Periode. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{C} : \quad &\sin(z+p) = \sin(z) \\ \implies &\sin\left(\frac{\pi}{2} + p\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \\ \iff &e^{\frac{\pi}{2}i+pi} - e^{-\frac{\pi}{2}i-pi} = 2i \\ \iff &ie^{pi} + ie^{-pi} = 2i \\ \iff &e^{2pi} - 2e^{pi} + 1 = 0 \quad (\text{Erweitern mit } e^{pi}, \text{ Division durch } i) \\ \iff &(e^{pi} - 1)^2 = 0 \\ \iff &e^{pi} = 1. \end{aligned}$$

Dies gilt, wie wir unter 1) auf Seite 14 gesehen haben, genau dann, wenn $pi = 2k\pi i$ für $k \in \mathbb{Z}$, d.h. es gilt: „ p ist genau dann Periode von $\sin$ oder $\cos$, wenn $p = 2k\pi$ (mit $k \in \mathbb{Z}$)“.

Weiterhin gelten auch im Komplexen für alle $z \in \mathbb{C}$ die *Additionstheoreme* (2.4) und (2.5), sowie einige weitere aus dem Reellen bekannte Eigenschaften:

$$\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1 \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} \cos(z) &= -\cos(\pi - z) & ; & & \cos(z) &= \cos(-z) \\ \sin(z) &= \sin(\pi - z) & ; & & \sin(z) &= -\sin(-z) \end{aligned}$$

$$\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w) \tag{2.4}$$

$$\sin(z+w) = \cos(w)\sin(z) + \cos(z)\sin(w) \tag{2.5}$$

Für $y \in \mathbb{R}$ ergibt sich:

$$|\sin(iy)| = \frac{1}{2}|e^{-y} - e^y| \xrightarrow{y \rightarrow \infty} +\infty.$$

Analoges ergibt sich für den Kosinus. Also: Die komplexen Sinus- und Cosinusfunktionen sind im Gegensatz zu den reellen Funktionen **nicht beschränkt**.

3. Die Hyperbelfunktionen:

$$\begin{aligned} \sinh z &:= \frac{e^z - e^{-z}}{2} && \text{Sinus hyperbolicus;} \\ \cosh z &:= \frac{e^z + e^{-z}}{2} && \text{Cosinus hyperbolicus.} \end{aligned}$$

Aus dieser Definition erkennt man sofort, daß die *einzigste Periode* der Hyperbelfunktionen $2\pi i$ ist. Es gilt:

$$\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1. \quad (2.6)$$

Bemerkung von mir: Ebenso erkennt man an dieser Definition leicht, daß gilt:

$$\sin(iz) = i \sinh(z) \quad \text{und} \quad \cos(iz) = \cosh(z). \quad (2.7)$$

■

Für $w \neq 0$ schreibe

$$z = \log(w) \iff w = e^z.$$

Dabei sind diese Gleichungen *mehrdeutig*, da sie von verschiedenen z erfüllt werden. Für $z = x + iy$, $\alpha = \text{Arg}(w)$ gilt:

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y) = |w| (\cos \alpha + i \sin \alpha) = w.$$

Das ist äquivalent zu

$$e^x = |w| \quad \wedge \quad y = \alpha + 2k\pi,$$

d. h. y ist ein Argument von w . Das ist gleichbedeutend mit:

$$\underbrace{x = \ln |w|}_{\text{reell}} \quad \wedge \quad y = \arg(w).$$

Also stellen wir nun fest:

$$z = \log w = \ln |w| + i \arg(w)$$

Insbesondere ist

$$z = \text{Log } w := \ln |w| + i \text{Arg}(w)$$

eine auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ definierte eindeutige Funktion, die auf der positiven reellen Achse unstetig ist.

Definition: Wenn $f(z)$ eine mehrdeutige Funktion ist (wie z.B. $\arg, \log, \sqrt{\cdot}$), $E \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet (d. h. eine offene zusammenhängende Menge), auf dem f definiert ist, so nennt man jede eindeutige und stetige Funktion $F : E \longrightarrow \mathbb{C}$, so daß für alle $z \in E$ $F(z)$ ein zulässiger Wert für $f(z)$ ist, einen *f-Zweig*.

Beispiel: • Die Umkehrfunktionen von Sinus und Cosinus:

$$\begin{aligned}
 w = \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \Big| \cdot e^{iz}; \quad pq\text{-Formel} \\
 \iff e^{iz} &= iw + \sqrt{1-w^2} \\
 \iff iz &= \log(iw + \sqrt{1-w^2}) \\
 \iff z &= -i \log(iw + \sqrt{1-w^2}) =: \arcsin w.
 \end{aligned}$$

Einen eindeutigen Arcussinus erhält man mittels Log und Festlegung der Quadratwurzel auf das Argument α mit $0 \leq \alpha < \pi$.

$$\arccos w := -i \log(w + \sqrt{w^2 - 1}).$$

• Die Areafunktionen:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{arsinh}(w) &:= \log(w + \sqrt{w^2 + 1}), \\
 \operatorname{arcosh}(w) &:= \log(w + \sqrt{w^2 - 1}).
 \end{aligned}$$

Einen eindeutigen Arccos, Arsinh, Arcosh erhält man jeweils durch Einschränken des unendlich-deutigen log auf Log und der zweideutigen Quadratwurzel auf das Argument α mit $0 \leq \alpha < \pi$.

Satz 3: Eine Potenzreihe stellt auf ihrem Konvergenzkreis $U_R(a)$ eine stetige Funktion dar. Wenn die Reihe auf dem Rand dieses Kreises in einem Punkt absolut konvergiert, konvergiert sie auf dem ganzen Rand absolut und stellt auf ganz $\overline{U_R(a)}$ eine stetige Funktion dar.

Satz 4: (Abel'scher Grenzwertsatz) : Konvergiert

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k$$

in einem Randpunkt z_0 des Konvergenzkreises $U_R(a)$ bedingt, so gilt:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z_0 - a)^k,$$

wenn z auf dem Strahl $a + \lambda(z_0 - a)$ ($\lambda \in [0, 1]$) bleibt.²⁰

Satz 5: (Identitäts- und Eindeutigkeitssatz für Potenzreihen): Sei

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k$$

auf $U_{\varepsilon_1}(a)$ und

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-a)^k$$

auf $U_{\varepsilon_2}(a)$ absolut konvergent. $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei eine Folge in $U_{\varepsilon_1} \cap U_{\varepsilon_2} \setminus \{a\}$, die gegen a konvergiert. Falls für alle $n \in \mathbb{N}$: $f(z_n) = g(z_n)$, ist $a_k = b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Daher: $f \equiv g$ auf der Schnittmenge $U_{\varepsilon_1} \cap U_{\varepsilon_2}$.²¹

Korollar: Wenn eine Funktion f in einer Umgebung von a in eine Potenzreihe entwickelbar ist, dann nur auf eine Weise. (d. h. die Koeffizienten der Reihe sind eindeutig bestimmbar.)

²⁰In Analysis II, 8.4, haben wir eine deutlich weitergehende Aussage getroffen, ohne diese allerdings zu beweisen.

²¹vgl. Analysis II, 8.3.

3. Komplexe Differentiation

3.1 Definition und grundlegende Aussagen

Sei eine Funktion gegeben:

$$f : E \longrightarrow \mathbb{C} \quad (E \subseteq \mathbb{C} \text{ offen}, a \in E) .$$

Der *Differenzenquotient* von f bei a ist eine Funktion

$$\delta_a : E \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{C} : \delta_a(z) = \frac{f(z) - f(a)}{z - a} .$$

Falls $\lim_{z \rightarrow a} \delta_a(z)$ in $\mathbb{C}$ existiert, heißt er die *Ableitung* bzw. *Differentialquotient* von f bei a und wird mit $f'(a)$ oder $\frac{df}{dz}|_{z=a}$ bezeichnet; f heißt dann *komplex differenzierbar* (demnächst einfach *differenzierbar*) bei a .

Differenzierbarkeit bei a bedeutet die Existenz einer bei a stetigen Funktion $d : E \longrightarrow \mathbb{C}$ mit

$$f(z) - f(a) = d(z) \cdot (z - a) \quad (d(a) = f'(a)) .$$

Folglich ist eine bei a differenzierbare Funktion dort auch stetig.

- Beispiel:**
- Sei $c \in \mathbb{C}$, $f(z) = c$ auf E . Dann: $f'(a) = 0$ für alle $a \in E$.
 - Sei $n \in \mathbb{N}_+$, $f(z) = z^n$ auf E . Dann: $f'(a) = na^{n-1}$ für alle $a \in E$.

Anmerkung von mir : Ich möchte schon hier betonen, daß die komplexe Differentiation *nicht* mit der (totalen) Differentiation im $\mathbb{R}^2$ zu identifizieren ist.

Satz 1: Falls $f_1, f_2 : E \longrightarrow \mathbb{C}$ bei $a \in E$ differenzierbar sind, $c \in \mathbb{C}$, so sind auch die Funktionen $f_1 \pm f_2$, $f_1 \cdot f_2$, $c \cdot f_1$ bei a differenzierbar:

$$\begin{aligned} (f_1 \pm f_2)' &= f_1' \pm f_2' ; \\ (f_1 \cdot f_2)' &= f_1 \cdot f_2' + f_1' \cdot f_2 ; \\ (c \cdot f_1)' &= c \cdot f_1' . \end{aligned}$$

Falls $f_2(a) \neq 0$, ist $\frac{f_1}{f_2}$ in einer Umgebung von a definiert und in a mit

$$\left(\frac{f_1}{f_2} \right)' = \frac{f_2 \cdot f_1' - f_1 \cdot f_2'}{(f_2)^2}$$

differenzierbar.

Beispiel:

- Daher gilt für $f(z) = \frac{1}{z}$: $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$.
- Weiter gilt für $m \in \mathbb{Z}$, $f(z) = z^m$: $f'(z) = mz^{m-1}$.

Satz 2: $E, G \subseteq \mathbb{C}$ offene Mengen, $a \in E$. Sei

$$g : E \longrightarrow G, \quad g(a) = b \in G$$

und

$$f : G \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Falls f differenzierbar bei b und g differenzierbar bei a , ist $f \circ g$ differenzierbar bei a mit

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

Beweis: siehe im Reellen¹. ■

Beispiel: Für $h(z) = (g(z))^n$ ($n \in \mathbb{N}$) gilt: $h'(a) = n \cdot (g(a))^{n-1} \cdot g'(a)$.

Satz 3: Ist die Reihe

$$\sum_{k=m}^{\infty} f_k \quad (*)$$

konvergent auf der offenen Menge $E \subseteq \mathbb{C}$ und sind die f_k alle differenzierbar auf ganz E , so daß die Reihe

$$\sum_{k=m}^{\infty} f'_k$$

auf E gleichmäßig konvergiert, so ist $(*)$ auf E differenzierbar mit

$$\left(\sum_{k=m}^{\infty} f_k \right)' = \sum_{k=m}^{\infty} f'_k.$$
■

Beweis: Für diesen Beweis gibt es kein Analogon im Reellen. (zumindest kann ich mir nicht vorstellen, daß eine einfache Übertragung auf den Beweis von Analysis II, 9.8 möglich ist (dort steht eine entsprechende Aussage für Funktionen mit reellem, beschränktem Definitionsbereich).) Für den Beweis einer Aussage, die sogar nur schwächere Voraussetzungen braucht, mit Mitteln, die wir erst noch entwickeln: s. Anhang C.1, Seite 123. Um zu sehen, daß wir keinen Zirkelschluß begehen, beachte man den nächsten Fußnotenhinweis.

Für Potenzreihen ergibt sich²:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k \quad \rightsquigarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z-a)^{k-1}.$$

Da

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k} = 1,$$

stimmen die Konvergenzradien der Potenzreihe und ihrer Ableitung überein. Also:

¹die entsprechenden Aussagen für Funktionen mit reellem Definitionsbereich: Analysis I, 7.2, 7.5, 7.6.

²vgl. Analysis II, 8.5; man betrachte die folgende Theorie auf diesem Reckziegel-Beweis aufgebaut (das folgende Korollar ist dann natürlich ein eigener Satz wie bei Prof. Reckziegel).

Korollar: Die durch die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-a)^k$ dargestellte Funktion ist in jedem inneren Punkt z des Konvergenzkreises differenzierbar mit der Ableitung

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z-a)^{k-1} .$$

■

Für die n -te Ableitung folgt dann:

$$\begin{aligned} f^{(n)}(z) &= \sum_{k=n}^{\infty} (k-n+1) \cdot \dots \cdot k \cdot a_k (z-a)^{k-n} \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} a_k (z-a)^{k-n} . \end{aligned}$$

Daher

$$f^{(n)}(a) = n! \cdot a_n \iff a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} .$$

Anwendung:

$$\begin{aligned} \exp'(z) &= \exp(z) , \\ \sin'(z) &= \cos(z) , \\ \cos'(z) &= -\sin(z) , \\ \sinh'(z) &= \cosh(z) , \\ \cosh'(z) &= \sinh(z) . \end{aligned}$$

Satz 4: Sei $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Bijektion von E auf $f(E)$; die Umkehrung sei $f^{-1} : f(E) \longrightarrow E$. f und f^{-1} seien stetig. (Also: f ist Homöomorphismus). Falls f bei $a \in E$ differenzierbar ist mit $f'(a) \neq 0$, so ist f^{-1} differenzierbar bei $b := f(a)$ und es gilt:³

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} .$$

■

Korollar: 1. Für jeden Logarithmenzweig mit $w \neq 0$ ist

$$\log'(w) = \frac{1}{\exp'(\log(w))} = \frac{1}{w} .$$

2. Für jeden Zweig von $\arcsin$ gilt:

$$\begin{aligned} \arcsin'(w) &= \frac{1}{\sin'(\arcsin(w))} \\ &= \frac{1}{\cos(\arcsin(w))} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-w^2}} , \end{aligned}$$

wobei $\sqrt{1-w^2}$ so zu wählen ist, daß $\sqrt{1-w^2} = \cos(\arcsin w)$ für den gegebenen Zweig des $\arcsin$.

■

³vgl. Analysis II, 7.12 für Funktionen mit reellem Definitionsbereich; dies war die letzte auch fürs Komplexe geltende Aussage; alles weitere dieser Vorlesung sollte neu sein.

3.2 Die Cauchy–Riemann’schen Differentialgleichungen

Beispiel für eine Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, die als Funktion von $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ überall reell differenzierbar ist (sogar total differenzierbar), aber nirgends komplex differenzierbar:

$$f(z) = \bar{z}.$$

Denn: Sei $a \in \mathbb{C}$, $h \in \mathbb{C}$:

$$\delta_a = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\bar{a} + \bar{h} - \bar{a}}{h} = \frac{\bar{h}}{h}$$

$$h \in \mathbb{R} : \lim_{h \rightarrow 0} \delta_a = 1$$

$$\tilde{h} = ih \ (h \in \mathbb{R}) : \lim_{h \rightarrow 0} \delta_a = -1.$$

Wir sehen also: $\lim_{h \rightarrow 0} \delta_a$ existiert nicht für beliebiges h . ■

Beispiel für eine Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, die an genau einer Stelle differenzierbar ist:

$$f(z) = z\bar{z} \quad (= |z|^2).$$

Denn für $a = 0$:

$$\frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \frac{z\bar{z}}{z} = \bar{z}, \quad \lim_{z \rightarrow 0} \bar{z} = 0.$$

aber für $a \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{a\bar{a} + a\bar{h} + \bar{a}h + h\bar{h} - a\bar{a}}{h} \\ &= \bar{a} + \bar{h} + a\frac{\bar{h}}{h}. \end{aligned}$$

Man sieht, daß für $a \neq 0$ also kein Limes für $h \rightarrow 0$ existiert. ■

Satz 5: Sei $f : E \rightarrow \mathbb{C}$, E offene Menge in $\mathbb{C}$,

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$$

für $z = x + iy$ mit $x, y, u(x, y), v(x, y) \in \mathbb{R}$. Falls f bei $z_0 = x_0 + iy_0 \in E$ differenzierbar ist, so sind u und v bei (x_0, y_0) partiell differenzierbar nach x und y und es gelten die *Cauchy–Riemann’schen Differentialgleichungen*:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} &= \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} &= - \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} \end{aligned}$$

(3.1)

Beweis: Sei

$$f'(z_0) = A + iB.$$

Zu $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$, so daß für alle $z \in U_\delta(z_0)$:

$$|z - z_0| < \delta \implies \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon.$$

Insbesondere gilt speziell für $z = x + iy_0$ mit $|x - x_0| < \delta$:

$$\left| \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} - A \right| < \varepsilon \quad (\text{Realteil})$$

$$\text{und} \quad \left| \frac{i v(x, y_0) - i v(x_0, y_0)}{x - x_0} - i B \right| =$$

$$\left| \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} - B \right| < \varepsilon \quad (\text{Imaginärteil}) .$$

Daraus folgt: $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$ existieren bei (x_0, y_0) mit

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} .$$

Analog gilt speziell für $z = x_0 + iy$ mit $|y - y_0| < \delta$:

$$\left| \frac{i v(x_0, y) - i v(x_0, y_0)}{i (y - y_0)} - A \right| < \varepsilon \quad (\text{Realteil})$$

$$\text{und} \quad \left| \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{i (y - y_0)} - i B \right| =$$

$$|i| \left| \frac{-u(x_0, y) - (-u(x_0, y_0))}{y - y_0} - B \right| < \varepsilon \quad (\text{Imaginärteil}) .$$

Daraus folgt die Existenz und Gültigkeit der folgenden Gleichung:

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)}$$

$$= \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} .$$

Durch Vergleich folgen direkt die Cauchy–Riemann’schen Differentialgleichungen (3.1) (demnächst mit CR–Dgl.en abgekürzt). ■

Hingegen: Partielle Differenzierbarkeit im reellen Sinne und Gültigkeit der CR–Dgl.en in einem Punkt z_0 implizieren nicht allgemein die komplexe Differenzierbarkeit bei z_0 :

Beispiel:

$$u(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$v(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Bei $z_0 = 0$ gilt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1 .$$

aber:

$$\begin{aligned} \text{auf der Geraden } x = y & : \frac{(0 + ix) - 0}{x + ix} = \frac{i}{1 + i} = \frac{1 + i}{2} \\ \text{auf der Geraden } y = 0 & : \frac{x + ix}{x} = 1 + i, \end{aligned}$$

also keine komplexe Differenzierbarkeit. ■

Anmerkung von mir: In manchen Fällen kann es mühselig sein, die CR-Dgl'en zu überprüfen. Prof. Reckziegel hat mir in der Diffgeo II-Vorlesung einen bei manchen Funktionen leichteren Weg aufgezeigt, mit dem man die CR-Dgl'en testen kann. Ist nämlich eine Funktion f in Abhängigkeit von z und $\bar{z}$ gegeben (also darf f nicht von z. B. $|z|$ abhängig sein, sondern von $z\bar{z}$, usw.), so sind die CR-Dgl'en erfüllt, wenn

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = 0$$

gilt. Bestätigen wir dies durch folgende, nicht-formale Rechnung:

$$0 = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = \frac{\partial}{\partial (x - iy)} (u + iv) = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Koeffizientenvergleich des letzten Terms mit Null ergibt die CR-Dgl'en.

Aus den CR-Dgl'en folgen weitere sehr wichtige Beziehungen:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \stackrel{\text{symm.}}{=} \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Also gilt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

was auch

$$\Delta u = 0 \tag{3.2}$$

geschrieben wird. Dabei wird (3.2) *Laplace-Gleichung* genannt. Die Lösungen dieser Gleichung heißen *harmonische Funktionen*. Paare u, v harmonischer Funktionen, welche die CR-Dgl'en erfüllen, heißen *konjugierte Paare*.

Satz 6: Ist $E \subseteq \mathbb{C}$ offen und haben die Funktionen $u, v : E \rightarrow \mathbb{R}$ auf ganz E stetige partielle Ableitungen, so ist $f = u + iv$ überall dort komplex differenzierbar, wo die CR-Dgl'en gelten.

Beweis: $(u, v) \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist auf E (total) differenzierbar (Satz aus Analysis⁴). Die Aufgaben 5 und 6 der 5. Übungsserie machen folgende Aussage (vgl. Anhang A, Seite 82, Anhang B, Seite 101):

$$\begin{aligned} & f \text{ ist in } (x_0, y_0) \text{ komplex differenzierbar.} \\ \iff & f \text{ ist im reellen Sinne (total) differenzierbar und es gelten die CR-Dgl'en.} \end{aligned}$$

Damit folgt dann die Behauptung.

⁴vgl. Analysis III, 13.9.

3.3 Analytische (holomorphe) Funktionen

- Definition:** (i) Sei $E \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : E \rightarrow \mathbb{C}$. f heißt *analytisch (holomorph, regulär)* auf E , wenn f in jedem Punkt von E komplex differenzierbar ist.
- (ii) f heißt *analytisch bei* (x_0, y_0) , wenn es eine Umgebung E von (x_0, y_0) gibt, auf der f analytisch ist im Sinne von (i).
- (iii) Ein *Gebiet* ist eine offene zusammenhängende Menge. (Wdh.: topologische Definition des Zusammenhangs: S sei topologischer Raum, $E \subseteq S$. Dann: E zshgd. $\iff$ die einzigen Teilmengen von E , die offen und abgeschlossen in E sind, sind $\emptyset$ und E .⁵)

■

Satz 7: Sei $E \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch auf E . Falls $f'(z) = 0$ für alle $z \in E$, ist f auf E konstant.

Beweis: Sei $z_0 \in E$, $w_0 := f(z_0)$.

$$A := \{z \in E \mid f(z) = w_0\} \quad (\neq \emptyset).$$

Behauptung: $A = E$.

Dazu zeigt man, daß A abgeschlossen und offen in E ist.

1. abgeschlossen: Sei (z_n) Folge mit $z_n \rightarrow z$, wobei alle $z_n \in A$, $z \in E$. Dann:

$$\forall n \in \mathbb{N} : f(z_n) = w_0 \xrightarrow{\text{Stetigkeit}} f(z) = w_0 \implies z \in A.$$

2. offen: Sei $a \in A$, $U_\varepsilon(a) \subseteq E$ (existiert, da E offen).

Behauptung: $U_\varepsilon(a) \subseteq A$.

Beweis: Sei $z \in U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$.

$$g(t) := f(tz + (1-t)a) \quad \text{mit} \quad t \in [0, 1]; \quad (g(0) = f(a); g(1) = f(z)).$$

Sei nun $t, s \in [0, 1]; t \neq s$:

$$\begin{aligned} \frac{g(t) - g(s)}{t - s} &= \frac{g(t) - g(s)}{(t-s)z + (s-t)a} \cdot \frac{(t-s)z + (s-t)a}{t-s} \\ \lim_{t \rightarrow s} \frac{g(t) - g(s)}{t - s} &= \underbrace{f'(sz + (1-s)a)}_{=0} \cdot (z - a) = 0. \\ \implies \lim_{t \rightarrow s} \frac{\operatorname{Re}(g(t) - g(s))}{t - s} &= 0 \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow s} \frac{\operatorname{Im}(g(t) - g(s))}{t - s} = 0. \end{aligned}$$

$\implies \operatorname{Re}(g)$ ist auf $[0, 1]$ differenzierbar mit verschwindender Ableitung, ebenso $\operatorname{Im}(g)$.

$\implies$ ⁶ $\operatorname{Re}(g)$ und $\operatorname{Im}(g)$ sind konstant auf $[0, 1]$.

$\implies g$ ist konstant auf $[0, 1]$.

$\implies w_0 = f(a) = g(0) = g(1) = f(z)$.

$\implies z \in A$.

■

⁵vgl. Analysis III, 12.14.

⁶für diese Folgerung: vgl. Analysis I, 7.9.

Korollar: Sind f und g analytisch auf dem Gebiet E und dort $f' \equiv g'$, so unterscheiden sich f und g auf E nur um eine additive Konstante.

Satz 8: $E \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet, $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch, $f = u + iv$. Dann ist jede einzelne der folgenden Bedingungen hinreichend dafür, daß f auf E konstant ist.

1. u ist konstant auf E .
2. v ist konstant auf E .
3. $|f|$ ist konstant auf E .

Beweis: 1. u konstant. Daraus folgt

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0 .$$

Mittels der CR-Dgl.en folgt:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 .$$

Also :

$$\forall z \in E : f'(z) = 0 .$$

$\xRightarrow{\text{Satz 7}}$ f ist konstant.

2. analog.

3. Falls $|f(z_0)| = 0$, dann $f(z) = 0$ für alle $z \in E$. Sei nun $|f(z)| = c \neq 0$ für alle $z \in E$. Dann folgt mit $u^2 + v^2 = c^2$:

$$\begin{aligned} 2u \frac{\partial u}{\partial x} + 2v \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 , \\ 2v \frac{\partial v}{\partial y} + 2u \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 . \end{aligned}$$

Mit den CR-Dgl.en folgen dann mittels

$$\det \begin{pmatrix} 2u & 2v \\ 2v & -2u \end{pmatrix} = -4(u^2 + v^2) = -4c^2 \neq 0 .$$

die Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \dots = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

auf E . Daher nach Satz 7: f konstant auf E .

■

4. Komplexe Integration

Eine *Kurve* ist eine stetige Abbildung

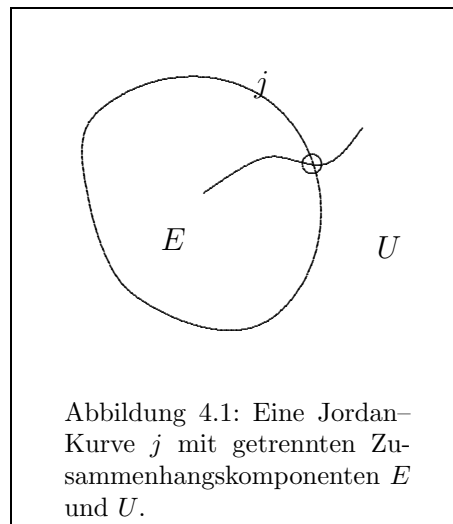
$$\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C} \quad (\text{wobei } [a, b] \subseteq \mathbb{R}).$$

- Definition:**
- γ heißt *geschlossen*, wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$.
 - γ heißt *einfach*, wenn γ injektiv ist.
 - γ heißt *einfach geschlossen*, wenn γ bis auf die Ausnahme $\gamma(a) = \gamma(b)$ injektiv ist.
 - γ heißt *Jordan-Kurve*, wenn $a \neq b$ und γ einfach geschlossen ist.

Für Jordan-Kurven gilt der intuitive *Jordan'sche Kurvensatz*: $\mathbb{C} \setminus \underbrace{\gamma([a, b])}_{=: j}$ zerfällt in zwei Zusammenhangs-

komponenten E und U („Inneres und Äußeres von j “ (abgekürzt mit $\text{int}(\gamma)$ bzw. $\text{ext}(\gamma)$) und jede Kurve von E nach U schneidet j . (Der Beweis dieses Satzes ist aber formal hochkompliziert (= 4 Vorlesungen Elementare Differentialgeometrie)).

Definition: Eine zusammenhängende Menge $S \subseteq \mathbb{C}$ heißt *einfach zusammenhängend*, wenn mit jeder ganz in S verlaufenden Jordan-Kurve γ auch das Innere von γ zu S gehört. (Beachte: Dies ist eine Definition, die nur für $\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{R}^2$ funktioniert¹.)



Sei nun

$$\gamma = (\phi, \psi) \quad \text{oder} \quad \gamma = \phi + i\psi,$$

wobei

$$\phi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \psi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Dann gilt:

$$\gamma' = (\phi', \psi') \quad \text{bzw.} \quad \gamma' = \phi' + i\psi'.$$

¹vgl. die allgemeinere Definition in Analysis III, Kap 14.8.

Definition: • γ heißt *rektifizierbar*, wenn γ von beschränkter Variation ist. Falls γ' stetig ist, gilt für die Länge:

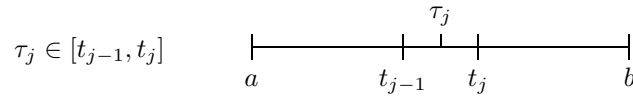
$$l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

(dies gilt analog auch für stückweise glatte Kurven.).

- γ heißt *glatt*, wenn γ (d. h. ϕ und ψ) stetig differenzierbar ist.
- γ heißt *stückweise glatt*, wenn γ in endlich viele glatte Stücke zerlegbar ist.²

Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine Kurve, f eine auf γ (d. h. $\gamma([a, b])$) definierte komplexwertige Funktion.

$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ „Unterteilung von $[a, b]$ “



Die *Riemannsumme* lautet³

$$\sum_{j=1}^n f(\gamma(\tau_j))(\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})) .$$

Wenn es ein $S \in \mathbb{C}$ gibt, so daß bei hinreichend feiner Unterteilung (d. h. bei hinreichend kleinem $\max(t_j - t_{j-1})$) die Riemannsumme beliebig nahe bei S liegt, heißt S das *Integral* von f längs γ .

$$S := \int_{\gamma} f(z) dz .$$

Beispiel 1: Sei $f(z) = c$ mit $c \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} & \sum c \cdot (\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})) \\ &= c \cdot (\gamma(t_n) - \gamma(t_0)) \\ &= c \cdot (\gamma(b) - \gamma(a)) . \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\int_{\gamma} c dz = c \cdot (\gamma(b) - \gamma(a)) .$$

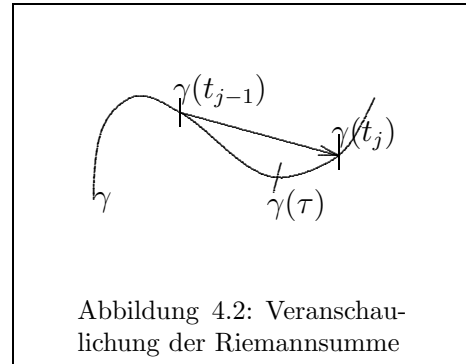
Satz 1: Sei γ rektifizierbar und $f = u + iv$ stetig auf γ . Dann ist f integrierbar längs γ und es gilt:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} (u dx - v dy) + i \int_{\gamma} (v dx + u dy) .$$

Dabei sind die Integrale auf der rechten Seite reelle Kurvenintegrale. ■

²diese Definitionen findet man auch in Analysis II, 9.11.

³vgl. die Aussage in Analysis I, 5.10.



Beweis: Mit $f = u + i v$ und $\gamma = \phi + i \psi$ gilt:

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^n f(\gamma(t_j))(\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})) &= \sum_{j=1}^n (u_j + i v_j)((\phi(t_j) - \phi(t_{j-1})) + i(\psi(t_j) - \psi(t_{j-1}))) \\
 &= \sum_{j=1}^n (u_j \cdot (\phi(t_j) - \phi(t_{j-1})) - v_j \cdot (\psi(t_j) - \psi(t_{j-1}))) \\
 &\quad + i \sum_{j=1}^n (v_j \cdot (\phi(t_j) - \phi(t_{j-1})) + u_j \cdot (\psi(t_j) - \psi(t_{j-1}))) \\
 &= \sum_{j=1}^n \left\langle \begin{pmatrix} u_j \\ -v_j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \phi(t_j) \\ \psi(t_j) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \phi(t_{j-1}) \\ \psi(t_{j-1}) \end{pmatrix} \right\rangle \\
 &\quad + i \sum_{j=1}^n \left\langle \begin{pmatrix} v_j \\ u_j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \phi(t_j) \\ \psi(t_j) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \phi(t_{j-1}) \\ \psi(t_{j-1}) \end{pmatrix} \right\rangle
 \end{aligned}$$

Unter den gegebenen Voraussetzungen über f und γ konvergieren diese reellen Riemannsummen gegen

$$\int_{\gamma} u \, dx - v \, dy \quad \text{bzw.} \quad \int_{\gamma} v \, dx + u \, dy .$$

■

Satz 2: Ist γ stückweise glatt und f stetig auf γ , so gilt:

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz = \int_a^b \underbrace{f(\gamma(t)) \gamma'(t)}_{\in \mathbb{C}} \, dt .$$

■

Beweis:

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} f(z) \, dz &\stackrel{\text{Satz 1}}{=} \int_{\gamma} u \, dx - v \, dy + i \int_{\gamma} v \, dx + u \, dy \\
 &= \int_a^b (u\phi' - v\psi') \, dt + i \int_a^b (v\phi' + u\psi') \, dt \\
 &= \int_a^b (u(\phi(t), \psi(t))\phi'(t) - v(\phi(t), \psi(t))\psi'(t)) \, dt \\
 &\quad + i \int_a^b (v(\phi(t), \psi(t))\phi'(t) + u(\phi(t), \psi(t))\psi'(t)) \, dt \\
 &= \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) \, dt .
 \end{aligned}$$

■

Beispiel 2:

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} z \, dz &\stackrel{\text{Satz 1}}{=} \int_{\gamma} (x \, dx - y \, dy) + i \int_{\gamma} (y \, dx + x \, dy) \\
 &= \frac{1}{2} (x^2 - y^2) \Big|_{t=a}^b + i xy \Big|_{t=a}^b \\
 &= \left(\frac{1}{2} (x^2 - y^2) + i xy \right) \Big|_{t=a}^b \\
 &= \frac{1}{2} (\gamma(b)^2 - \gamma(a)^2) ,
 \end{aligned}$$

wobei der letzte Term (suggestiv) auch $\frac{1}{2} z^2 \Big|_{\gamma(a)}^{\gamma(b)}$ geschrieben werden kann.

Beispiel 3: Sei γ der Einheitskreis $\gamma(t) = \cos(t) + i \sin(t)$ mit $t \in [0, 2\pi]$. Dann:

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} \frac{1}{z} \, dz &\stackrel{\text{Satz 2}}{=} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos(t) + i \sin(t)} (-\sin(t) + i \cos(t)) \, dt \\
 &= i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i .
 \end{aligned}$$

Beispiel 4: Sei $\gamma(t) = t^2 + i t$ mit $t \in [0, 2]$, also $\gamma(0) = 0$ und $\gamma(2) = 4 + 2i$. Dann:

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} \bar{z} \, dz &\stackrel{\text{Satz 1}}{=} \int_{\gamma} (x \, dx + y \, dy) + i \int_{\gamma} (-y \, dx + x \, dy) \\
 &= \frac{1}{2} (x^2 + y^2) \Big|_{t=0}^2 + i \int_0^2 (-t \cdot 2t + t^2 \cdot 1) \, dt \\
 &= \frac{1}{2} (16 + 4) + i \left(-\frac{8}{3} \right) \\
 &= 10 - \frac{8i}{3} .
 \end{aligned}$$

Betrachten wir nun einen zweiten Weg γ_2 mit dem gleichen Anfangs- und Endpunkt, der zunächst parallel zur reellen und dann parallel zur imaginären Achse verläuft. Dann ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma_2} \bar{z} \, dz &= \int_{\gamma_2} u \, dx - v \, dy + i \int_{\gamma_2} \left(0 \frac{dt}{dt} + t \frac{d0}{dt} \right) dt + i \int_{\gamma_2} \left(-t \frac{d4}{dt} + 4 \frac{dt}{dt} \right) dt \\
 &= \int_{\gamma_2} (x \, dx + y \, dy) + i \cdot 4 \cdot 2 \\
 &= 10 + 8i .
 \end{aligned}$$

Dieses Integral ist also wegababhängig.

Satz 3: Unter den einschlägigen Existenzbedingungen gelten folgende Regeln:

1. Es gilt:

$$\int_{\gamma} c \cdot f(z) dz = c \cdot \int_{\gamma} f(z) dz \quad \text{für } c \in \mathbb{C}.$$

2. Es gilt:

$$\int_{\gamma} f_1(z) dz + \int_{\gamma} f_2(z) dz = \int_{\gamma} (f_1(z) + f_2(z)) dz. \quad ^4$$

3. Für die Wege

$$\begin{aligned} \gamma_1 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma_2 : [b, c] \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \\ \gamma_1 + \gamma_2|_{[a, b]} = \gamma_1, \quad \gamma_1 + \gamma_2|_{[b, c]} = \gamma_2, \quad \gamma_1(b) = \gamma_2(b) \end{aligned}$$

gilt⁵:

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

4.

$$\int_{\sim \gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz,$$

wobei $\sim \gamma(t) := \gamma(a + b - t)$ für eine Kurve γ .⁶

5.

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M \cdot L,$$

wenn $|f(z)| \leq M$ auf γ und $L = \text{Länge von } \gamma$.

Diese letzte Behauptung gilt wegen folgender Beziehung:

$$\begin{aligned} \left| \sum f(\gamma(\tau_j))(\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)) \right| &\leq \sum |f| |\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)| \\ &\leq M \cdot \sum |\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)| \\ &\leq M \cdot L. \end{aligned}$$

■

Satz 4 (Parameterwechsel): $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ sei eine Kurve, $g : [c, d] \longrightarrow [a, b]$ sei stetig, streng monoton, surjektiv (also $g(c) = a$, $g(d) = b$).⁷ Dann ist:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma \circ g} f(z) dz$$

⁴Diese beiden Gleichungen beschreiben die Linearität des Integrals. Vgl. für das Dieudonné-Integral: Analysis I, 5.9; für das Lebesgue-Integral: Analysis III, 16.4.

⁵vgl. das Entsprechende für Dieudonné: Analysis I, 5.13.

⁶vgl. Analysis III, 14.4.

⁷vgl. auch entsprechend Analysis II, 9.12; Analysis III, 14.4.

Falls insbesondere g und γ stückweise stetig differenzierbar sind:

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &= \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma \circ g} f(z) dz \\ &= \int_c^d f(\gamma \circ g(s)) \gamma'(g(s)) g'(s) ds . \end{aligned}$$

■

4.1 Stammfunktionen

Satz 5: Sei $E \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Die Funktion f hat eine *Stammfunktion* F auf E (d. h. $F' = f$ auf E) genau dann, wenn für je zwei Punkte $z_1, z_2 \in E$ alle Integrale $\int_{\gamma} f(z) dz$ über rektifizierbare Kurven γ mit Aufpunkt z_1 und Endpunkt z_2 , die ganz in E verlaufen, gleich sind. (Wegunabhängigkeit der Integration über f in E : $\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz$ ist wohldefiniert.) In diesem Fall ist

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = F(z_2) - F(z_1) .$$

■

Beweis:

„ $\Rightarrow$ “: Sei F Stammfunktion zu f auf E . γ sei stückweise glatt.
(Zum allgemeinen Fall: siehe z. B. :

Conway, Function of one complex variable, p. 65.)

Sei

$$\gamma : [a, b] \rightarrow E, \quad \gamma(a) = z_1, \quad \gamma(b) = z_2 .$$

Dann:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b F'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b (F \circ \gamma)'(t) dt \\ &= F \circ \gamma(t) \Big|_{t=a}^b = F(z_2) - F(z_1) . \end{aligned}$$

„ $\Leftarrow$ “: Sei das Integral über f wegunabhängig. Wähle $a \in E$ und setze

$$F(w) = \int_{\gamma} f(z) dz ,$$

wobei γ irgendeine in E verlaufende, rektifizierbare Kurve von a nach w ist. Dann

$$\delta_w(w+h) = \frac{F(w+h) - F(w)}{h} = \frac{1}{h} \int_w^{w+h} f(z) dz .$$

$|h|$ sei so klein, daß $\gamma_1(t) = w + th$ ($0 \leq t \leq 1$) ganz in E verläuft. Dann:

$$\begin{aligned} \delta_w(w+h) &= \frac{1}{h} \int_0^1 f(w+th) \cdot h dt \\ &= \int_0^1 f(w+th) dt \\ \lim_{h \rightarrow 0} \delta_w(w+h) &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^1 f(w+th) dt \\ &\stackrel{\text{glm. stetig}}{=} \int_0^1 \left(\lim_{h \rightarrow 0} f(w+th) \right) dt \\ &= \int_0^1 f(w) dt \\ &= f(w) \int_0^1 dt = f(w) . \\ \implies \quad \forall w \in E : \quad F'(w) &= f(w) . \end{aligned}$$

■

Beispiel: $z \cos(z)$ hat als Stammfunktion auf $\mathbb{C}$: $F(z) = z \sin(z) + \cos(z)$. Also:

$$\int_{z_1}^{z_2} z \cos(z) dz = z_2 \sin(z_2) + \cos(z_2) - z_1 \sin(z_1) - \cos(z_1) .$$

Bemerkung: Wegunabhängigkeit des Integrals über f in E ist gleichbedeutend damit, daß das Integral über f längs ganz in E verlaufender geschlossener Wege Null ist⁸.

Wir wissen, daß $\frac{1}{z^2}$ auf $E = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine Stammfunktion, nämlich $-\frac{1}{z}$, besitzt. Daher:

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^2} dz = 0$$

⁸vgl. hierzu den Beweis in Analysis III, 14.5.

für jede geschlossene Kurve γ in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dies können wir auch nochmal an einem Beispiel durchrechnen:

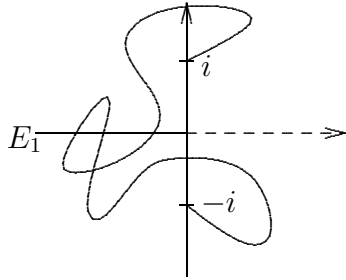
$$\begin{aligned} \int_{\text{Einheitskreis}} \frac{1}{z^2} dz &= i \int_0^{2\pi} e^{-2it} e^{it} dt \\ &= i \int_0^{2\pi} e^{-it} dt \\ &= -e^{-it} \Big|_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Hingegen:

$$\int_{\text{Einheitskreis}} \frac{1}{z} dz = 2\pi i.$$

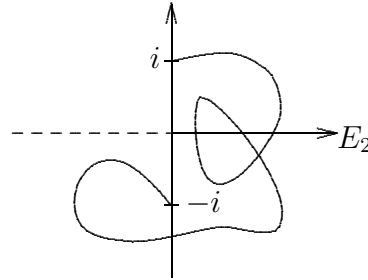
Also kann $\frac{1}{z}$ keine Stammfunktion auf ganz $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ haben!

$\text{Log}(z) = \ln|z| + i \text{Arg}(z)$ ist Stammfunktion zu $\frac{1}{z}$ nur auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^+ =: E_1$.



$$E_1 \int_{-i}^i \frac{1}{z} dz = -\pi i$$

Sei nun $\text{Arg}^*(z) \in]-\pi, \pi[$. Dann ist $\text{Log}^*(z) = \ln|z| + i \text{Arg}^*(z)$ Logarithmenzweig auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^- =: E_2$, also Stammfunktion zu $\frac{1}{z}$ auf E_2 .



$$E_2 \int_{-i}^i \frac{1}{z} dz = +\pi i$$

Im Reellen gilt (um dies auch komplex betrachten zu können, fehlen uns noch die Voraussetzungen: zweimal stetige Differenzierbarkeit.): Hat ein Vektorfeld $\text{VF} = u dx + v dy \cong (u, v)$ ein *Potential* f (also $df = \text{VF}$ (Cartan'sche Ableitung)), so ist (weil $d\text{VF} = 0$ (denn $dd = 0$)):

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Dies ist also notwendige Bedingung. Falls das Gebiet einfach zusammenhängend ist, ist die Bedingung auch hinreichend.⁹

$\text{VF} = x dx - y dy \cong (x, -y)$ hat das Potential $\frac{1}{2}(x^2 - y^2)$. Das komplexe Integral über $\bar{z} \cong (x, -y)$ ist aber nicht wegunabhängig (vgl. Beispiel auf Seite 28), also kann $\bar{z}$ keine komplexe Stammfunktion besitzen.

⁹vgl. Analysis III, 14.7, 14.8 und 14.9 (Poincaré).

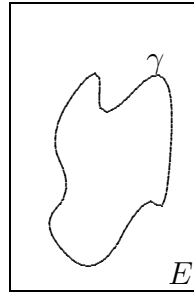
(Also: reelle Potential-Integration hat nichts mit komplexer Integration zu tun! Denn: Wir benutzen verschiedene Multiplikationen (im Reellen: z. B. Skalarprodukt¹⁰, hier: komplexe Multiplikation) beim Ausführen der Kurvenintegration.)

Satz 6 (Cauchy–Integralsatz): Sei γ eine rektifizierbare Jordankurve (d. h. einfach, geschlossen und nicht einpunktig), f sei eine auf dem Innengebiet von γ analytische und auf γ noch stetige komplexwertige Funktion. Dann ist

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0 .$$

Beweis: Wir beweisen den Fall nur unter den einschränkenden, aber nicht notwendigen Voraussetzungen, daß γ samt Innengebiet in einem Gebiet E enthalten ist, auf dem f analytisch ist mit stetigem f' (der allgemeine Beweis steht z. B. in:

Behnke–Sommer, Funktionen einer komplexen Veränderlichen, S. 115-119).



$G :=$ Innengebiet von γ
zusammen mit γ

Sei $f = u + iv$:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\gamma} (u dx - v dy) + i \int_{\gamma} (v dx + u dy) \\ &\stackrel{\text{Stokes (Green)}}{=} \int_G \underbrace{\left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)}_{=0 \text{ nach CR-Dgl.}} d(x, y) + i \int_G \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right)}_{=0 \text{ nach CR-Dgl.}} d(x, y) \\ &= 0 . \end{aligned}$$

■

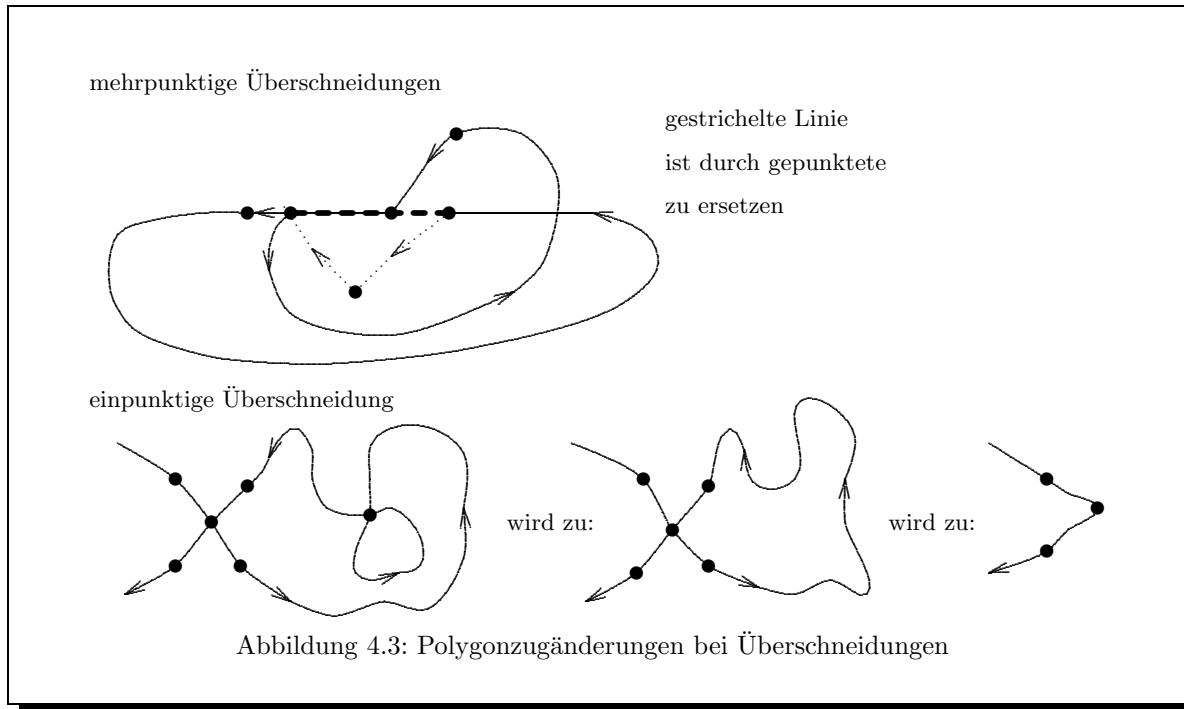
(**Anmerkung:** Green besagt: Für ein Vektorfeld $\xi dx + \eta dy$ mit einschlägigen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen gilt:

$$\int_{\gamma} (\xi dx + \eta dy) = \int_G \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) d(x, y) .$$

(In Analysis (bei Prof. Reckziegel) gilt dies direkt durch den allgemeinen Stokes'schen Satz¹¹.)

¹⁰vgl. Analysis III, 14.4, Beispiel c), das wesentliche ist aber, daß die $\omega \in \Omega(\mathbb{R}^2)$ (das sind die Differentialformen vom Grad 1) punktal (d. h. die ω_p) reellwertig sind.

¹¹vgl. Analysis III, 17.10 mit $d(x, y) = dx \wedge dy$.



Satz 7: Ist $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet E analytisch, so ist das Integral über f in E wegunabhängig (d. h. das Integral über f längs geschlossener Kurven, die ganz in E verlaufen, ist Null.)

Beweis: Sei γ rektifizierbare geschlossene Kurve in E . γ kann beliebig genau durch Polygonzüge approximiert werden; die entsprechenden Integrale über f unterscheiden sich wegen der Stetigkeit von f beliebig wenig. Es genügt also zu zeigen, daß die Integrale $\int f(z) dz$ längs geschlossener Polygonzüge Null sind. Sei oBdA. γ ein solcher Polygonzug. Falls γ einfach geschlossen ist, folgt die Behauptung aus Satz 6.

Bei mehrpunktigen Überschneidungen ändere die Polygonzüge wie in Abbildung 4.3. Das Integral über f ändert sich dadurch nicht, weil nach Satz 6 das Integral über f längs dem Rand des so entstandenen Dreiecks Null ist.

Einpunktige Überschneidungen: $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ für $t_1 \neq t_2$. Falls überhaupt solche existieren, gibt es auch t_1, t_2 , so daß $\gamma|_{[t_1, t_2]}$ eine Jordankurve ist. Die Elimination dieses Kurvenstücks hat nach Satz 6 keinen Einfluß auf das Integral.

Korollar: Ist f auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet E analytisch, so hat f auf E eine Stammfunktion. (Dies gilt auch umgekehrt, kommt später (siehe Kap. 5, Seite 41).)

Satz 8: Sind γ_1, γ_2 rektifizierbare Jordankurven, so daß γ_2 ganz im Innengebiet von γ_1 verläuft, und ist f auf dem „Ringgebiet“ zwischen γ_1 und γ_2 analytisch und auf γ_1 und γ_2 noch stetig, so gilt:

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \begin{cases} \int_{\gamma_2} f(z) dz & \text{falls } \gamma_1, \gamma_2 \text{ gleichorientiert} \\ - \int_{\gamma_2} f(z) dz & \text{sonst} \end{cases}$$

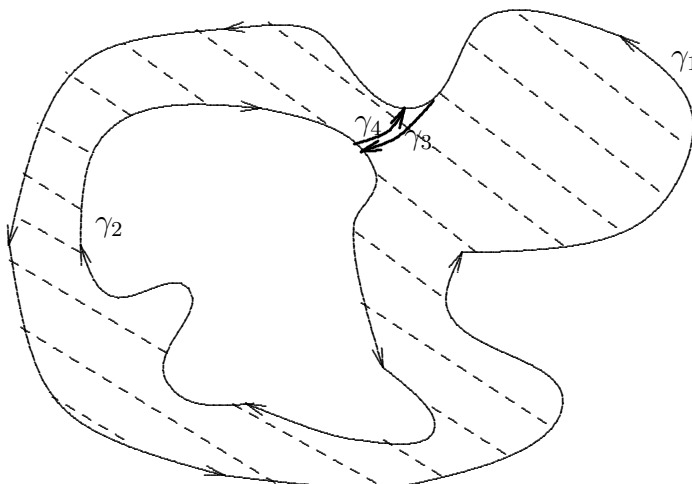


Abbildung 4.4: Integration über „Ringgebiete“

Beweis: Man wähle Verbindungskurven γ_3 und γ_4 wie in der Abbildung 4.4. Bei hinreichender Nähe von γ_3 und γ_4 kommt das Integral nahe an

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_3 + \gamma_2 + \underbrace{(-\gamma_3) + \gamma_4}_{=0}} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz .$$

Die linke Seite ist nach Satz 6 gleich Null. ■

4.2 Umlaufzahl und Orientierung

Wir betrachten nochmal folgende Integrale:

$$\int_{K_1(0)} \frac{1}{z} dz = 2\pi i, \quad \text{bzw.}$$

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 2\pi i,$$

falls γ positiv orientierte Jordankurve mit 0 im Inneren.

$$\int_{K_R(z_0)} \frac{1}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{Re^{it}}{Re^{it}} dt = 2\pi i$$

und entsprechend für jede positiv orientierte Jordankurve γ mit z_0 im Inneren (nach Satz 8):

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i .$$

Definition: Sei γ geschlossene (rektifizierbare) Kurve in $\mathbb{C}$, z_0 ein Punkt, der nicht auf γ liegt.

$$W(\gamma, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz . \quad (4.1)$$

Man nennt $W(\gamma, z_0)$ *Umlaufzahl* (bzw. *Index* (z. B. im **Remmert**)).

Satz 9: $W(\gamma, z_0)$ ist stets ganzzahlig (wenn γ eine geschlossene Kurve ist, auf der z_0 nicht liegt).

Beweis: OBdA. sei γ stückweise glatt ($\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$).

$$\begin{aligned} F(x) &:= \int_a^x \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0} dt, \quad x \in [a, b] . \\ F'(x) &= \frac{\gamma'(x)}{\gamma(x) - z_0} \quad \text{für alle } x, \text{ in denen } \gamma' \text{ stetig ist.} \\ G(t) &:= e^{-F(t)}(\gamma(t) - z_0) \quad \text{für } t \in [a, b] . \\ G'(t) &= e^{-F(t)}\gamma'(t) - F'(t)e^{-F(t)}(\gamma(t) - z_0) \\ &= e^{-F(t)} \underbrace{(\gamma'(t) - F'(t)(\gamma(t) - z_0))}_{=0, \text{ bis auf endlich viele } t \in [a, b]} = 0 . \end{aligned}$$

Da G stetig ist, ist G konstant auf $[a, b]$. Daher $G(a) = G(b)$, d. h.

$$e^{-F(b)}(\gamma(b) - z_0) = e^{-F(a)}(\gamma(a) - z_0) = \gamma(a) - z_0 .$$

Da $\gamma(b) = \gamma(a) \neq z_0$, folgt: $e^{-F(b)} = 1$. Also $F(b) = 2\pi mi$ für ein $m \in \mathbb{Z}$. Dann gilt also:

$$\begin{aligned} W(\gamma, z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} F(b) \\ &= m \quad (m \in \mathbb{Z}) . \end{aligned}$$

■

Wenn γ geschlossene Kurve, A ihr Außengebiet, dann ist $\mathbb{C} \setminus A$ einfach zusammenhängend.

Satz 10: Liegt z_0 im Außengebiet der geschlossenen Kurve γ , so ist $W(\gamma, z_0) = 0$.

Beweis: $\frac{1}{z - z_0}$ ist analytisch auf $\mathbb{C} \setminus A$. Also folgt die Behauptung aus dem Cauchy-Integralsatz. (Außerdem ist die Aussage anschaulich eh klar; gälte sie nicht, so wäre ja wohl der Name Umlaufzahl verfehlt.)

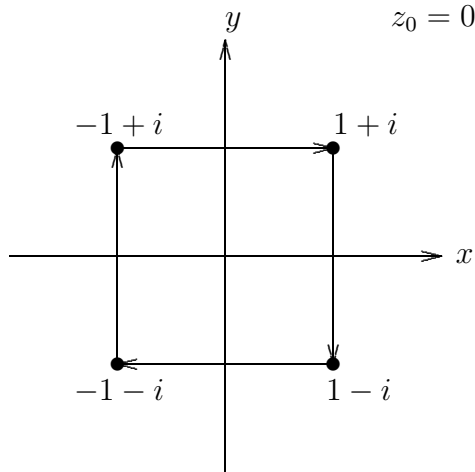
Satz 11: γ sei Jordankurve. Entweder ist für alle Punkte z_0 , die im Inneren von γ liegen, die Umlaufzahl $W(\gamma, z_0) = 1$ oder für alle z_0 im Inneren von γ ist die Umlaufzahl $W(\gamma, z_0) = -1$.

Beweis: $W(\gamma, z_0)$ hängt stetig von $z_0 \in \text{int}(\gamma)$ ab und ist ganzzahlig, also ist $W(\gamma, z_0)$ im Inneren von γ konstant.

Der Rest ist dann nach Satz 8 klar: Wir wechseln von γ auf einen Kreis $K_r(z_0)$ und diese Integrale haben wir ja schon am Anfang dieses Abschnitts berechnet.

Definition: Die Jordankurve γ heißt *positiv orientiert*, wenn $W(\gamma, z_0) = 1$ für alle $z_0 \in \text{int}(\gamma)$, andernfalls *negativ orientiert*.

Beispiel:



$$\begin{aligned}
 W(\gamma, 0) &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{-1}^1 (1-it)^{-1}(-i) dt + \int_{-1}^1 (-t-i)^{-1}(-1) dt \right. \\
 &\quad \left. + \int_{-1}^1 (-1+it)^{-1}i dt + \int_{-1}^1 (t+i)^{-1} \cdot 1 dt \right) \\
 &= \frac{4}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{t-i}{t^2+1} = \frac{4}{2\pi i} \left(\frac{1}{2} \ln(t^2+1) - i \arctan(t) \right) \Big|_{-1}^1 \\
 &= \frac{2}{\pi i} \left(-i\frac{\pi}{4} + i \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) = -1.
 \end{aligned}$$

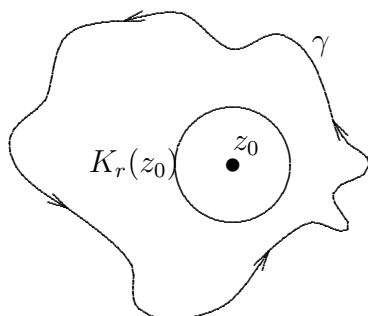
■

5. Die Cauchy–Integralformel

Satz 1 (1. Cauchy–Formel): Sei γ positiv orientierte Jordankurve, f eine im Inneren von γ analytische und auf γ noch stetige komplexe Funktion. Dann ist für jedes $z_0 \in \text{int}(\gamma)$:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad (5.1)$$

Beweis:



Für hinreichend kleine r liegt $K_r(z_0)$ ganz im Inneren von γ .

Also folgt mit Satz 8, Kapitel 4:

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{K_r(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz .$$

Setze für $z \in \text{int}(\gamma)$:

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) & \text{falls } z \neq z_0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

g ist stetig in $\text{int}(\gamma)$ und es gilt:

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + (z - z_0)g(z) . \quad (*)$$

Da $g(z_0) = 0$, existiert $\delta > 0$, so daß $|g(z)| < 1$ auf $U_{\delta}(z_0)$.

Betrachte nur noch solche $K_r(z_0)$ mit $r < \delta$. Dann:

$$\int_{K_r(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \stackrel{(*)}{=} f(z_0) \underbrace{\int_{K_r(z_0)} \frac{1}{z - z_0} dz}_{=2\pi i} + f'(z_0) \underbrace{\int_{K_r(z_0)} dz}_{=0} + \int_{K_r(z_0)} g(z) dz$$

$$\Rightarrow \left| \int_{K_r(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i f(z_0) \right| = \left| \int_{K_r(z_0)} g(z) dz \right| \leq 1 \cdot 2\pi r .$$

Dabei gilt die letzte Ungleichung wegen Regel 5 von Seite 29 mit $L = 2\pi r$, dem Umfang des Kreises $K_r(z_0)$.

Wegen Satz 8 kann man nun r gegen Null gehen lassen. Also gilt:

$$\left| \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i f(z_0) \right| = 0 .$$

■

Bemerkung: Allgemeiner gilt: Falls E einfach zshgd., f analytisch auf E , γ geschlossene Kurve in E , $z_0 \in E$ nicht auf γ , so gilt

$$W(\gamma, z_0) \cdot f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz .$$

Beweis: $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ ist analytisch in $E \setminus \{z_0\}$ und ist bei z_0 beschränkt. Analog zum Beweis zu Satz 7, Kapitel 4 (Polygonannäherung, vgl. Abbildung 4.3), zusammen mit der Aussage aus Aufgabe 3a, 6. Serie, Anhang A, Seite 83 (vgl. Anhang B, Seite 106) ergibt sich:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0) \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz \\ &\Rightarrow \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0) \cdot 2\pi i \cdot W(\gamma, z_0) . \end{aligned}$$

■

Die Cauchy-Formel (5.1) hat natürlich enorme praktische Relevanz, z.B. beim Ausrechnen von Integralen.

Beispiel: Gegeben sei folgendes Integral:

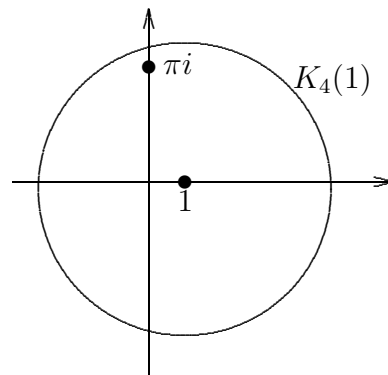
$$\int_{K_4(1)} \frac{e^{3z}}{z - \pi i} dz$$

$$z_0 = \pi i$$

$$f(z) = e^{3z}$$

$$\text{Also: } \int_{K_4(1)} \frac{e^{3z}}{z - \pi i} dz = 2\pi i f(\pi i)$$

$$= 2\pi i e^{3\pi i} = -2\pi i .$$



Satz 2: Unter den Voraussetzungen von Satz 1 gilt:

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz . \quad (5.2)$$

Dies ist die *zweite Cauchy-Formel*.

Beweis:

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} &\stackrel{\text{Satz 1}}{=} \frac{1}{h} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(\frac{f(z)}{(z - z_0 - h)} - \frac{f(z)}{z - z_0} \right) dz \\ &= \frac{1}{h} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{h \cdot f(z)}{(z - z_0 - h)(z - z_0)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)(z - z_0) - hf(z) + hf(z)}{(z - z_0 - h)(z - z_0)^2} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz + \frac{h}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0 - h)(z - z_0)^2} dz . \end{aligned}$$

Es genügt zu zeigen: $\frac{f(z)}{(z - z_0 - h)(z - z_0)^2}$ bleibt beschränkt auf γ für $h \rightarrow 0$.

Sei $\delta := \inf\{|z - z_0| \mid z \text{ auf } \gamma\} > 0$; $|f(z)| \leq M$ auf γ . Wegen

$$|z - z_0 - h| + |h| \geq |z - z_0| \geq \delta ,$$

gilt für hinreichend kleine h :

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(z)}{(z - z_0 - h)(z - z_0)^2} \right| &\stackrel{|h| < \delta}{\leq} \frac{M}{(\delta - |h|)\delta^2} \\ &\stackrel{|h| < \frac{\delta}{2}}{\leq} \frac{2M}{\delta \cdot \delta^2} . \end{aligned}$$

■

Satz 3: Unter den Voraussetzungen von Satz 1 ist f im Inneren von γ beliebig oft differenzierbar (und natürlich stetig) und es gilt für $z_0 \in \text{int}(\gamma)$:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz . \quad (5.3)$$

(Dies sind die $(n + 1)$ -ten Cauchy-Formeln).

Beweis: (durch Induktion nach $n \geq 2$).

Induktionsvoraussetzung für $n - 1$ ergibt:

$$\begin{aligned} &\frac{f^{(n-1)}(z_0 + h) - f^{(n-1)}(z_0)}{h} \\ &= \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{h} \left(\frac{1}{(z - z_0 - h)^n} - \frac{1}{(z - z_0)^n} \right) dz . \end{aligned}$$

Für eine Zwischenrechnung setzen wir $w := z - z_0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{(w-h)^n} - \frac{1}{w^n} \right) &= \frac{1}{h} \frac{w^{n+1} - w(w-h)^n}{(w-h)^n w^{n+1}} \\ &= \frac{nw^n + hP(w, h) + n(w-h)^n - n(w-h)^n}{(w-h)^n w^{n+1}} \\ &= n \frac{1}{w^{n+1}} + h \frac{Q(w, h)}{(w-h)^n w^{n+1}}, \end{aligned}$$

wobei P und Q Polynome in w und h mit ganzzahligen Koeffizienten sind.

Es gilt also:

$$\begin{aligned} &\frac{f^{(n-1)}(z_0 + h) - f^{(n-1)}(z_0)}{h} \\ &= \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz + \frac{(n-1)!}{2\pi i} h \int_{\gamma} \underbrace{\frac{f(z) \cdot Q(z - z_0, h)}{(z - z_0 - h)^n (z - z_0)^{n+1}}}_{(**)} dz. \end{aligned}$$

Analog zu Satz 2 ist nur noch zu zeigen, daß $(**)$ beschränkt ist auf γ für $h \rightarrow 0$. Es gilt:

$$|f(z) \cdot Q(z - z_0, h)| \stackrel{\substack{\gamma \text{ kompakt} \\ Q \text{ Polynom}}}{\leq} M$$

und sei

$$\delta := \inf\{|z - z_0| \mid z \text{ auf } \gamma\};$$

dann gilt analog zu Satz 2:

$$\left| \frac{f(z) \cdot Q(z - z_0, h)}{(z - z_0 - h)^n (z - z_0)^{n+1}} \right| \stackrel{\text{für } |h| < \frac{\delta}{2}}{\leq} \frac{2^n M}{\delta^{2n+1}}.$$

■

Korollar 1: Ist f in z_0 analytisch, so ist f in z_0 unendlich oft differenzierbar.

Korollar 2: Hat f auf dem Gebiet E eine Stammfunktion, so ist f auf E analytisch. (Umkehrung: Abschnitt 4.1 auf Seite 34)

Korollar 3 (Satz von Morera): Ist das Integral über f im Gebiet E lokal wegunabhängig (d. h. zu jedem Punkt existieren Umgebungen, so daß ...), so ist f analytisch auf E .

5.1 Taylor-Entwicklung analytischer Funktionen

Satz 4 (Taylor-Entwicklung analytischer Funktionen): Sei f analytisch auf dem Gebiet $E \subseteq \mathbb{C}$. Ist $U_\delta(z_0) \subseteq E$, so gilt für alle $z \in U_\delta(z_0)$:¹

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \quad (5.4)$$

¹vgl. Analysis II, 9.7.

Beweis: Sei $z_1 \in U_\delta(z_0)$, $K_r(z_0) \subseteq U_\delta(z_0)$ positiv orientiert, so daß $z_1 \in \text{int} K_r(z_0)$. Dann gilt für alle $z \in K_r(z_0)$:

$$\begin{aligned} |z_1 - z_0| &< |z - z_0| \\ \implies \left| \frac{z_1 - z_0}{z - z_0} \right| &< 1. \end{aligned}$$

Daher gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z - z_1} &= \frac{1}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z_1 - z_0}{z - z_0}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1 - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} \end{aligned}$$

konvergiert gleichmäßig auf $K_r(z_0)$. Da $f(z)$ auf $K_r(z_0)$ beschränkt ist, konvergiert auch

$$\frac{f(z)}{z - z_1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} (z_1 - z_0)^n$$

gleichmäßig auf $K_r(z_0)$. Also können wir gliedweise integrieren:

$$\begin{aligned} f(z_1) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_1} dz \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r(z_0)} \left(\frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \right) (z_1 - z_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z_1 - z_0)^n. \end{aligned}$$

Da $z_1 \in U_\delta(z_0)$ beliebig, folgt die Behauptung. ■

Bemerkung: Falls f auf ganz $\mathbb{C}$ analytisch: $\delta = \infty$.

Falls $z_1 \in \mathbb{C}$ existiert, wo f nicht analytisch, ist das maximale δ der Abstand von z_0 zur Menge der Punkte, in denen f nicht analytisch ist. („Abstand von z_0 zur nächsten Singularität von f “).

Satz 5: Sei f analytisch auf dem Gebiet $E \subseteq \mathbb{C}$. Wenn $f(z_0) = 0$ und keine Umgebung von z_0 existiert, auf der f identisch 0 ist, existiert eine Umgebung von z_0 in E , auf der f außer z_0 keine weitere Nullstelle hat. (Statt 0 kann jedes w_0 stehen.)

Beweis: In einer Umgebung von z_0 ist

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \left(\text{mit } a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right);$$

$$f(z_0) = 0 \implies a_0 = 0.$$

Wenn keine Umgebung von z_0 existiert, auf der $f \equiv 0$ ist, können nicht alle $a_n = 0$ sein; sei a_k derjenige Koeffizient $\neq 0$ mit kleinstem (positiven) Index.

Definition: Für diese Wahl von k sagen wir auch: z_0 heißt *Nullstelle der Ordnung k von f* (k -fache Nullstelle).

Es gilt dann:

$$\begin{aligned} f(z) &= a_k(z-z_0)^k + a_{k+1}(z-z_0)^{k+1} + \dots \\ &= (z-z_0)^k \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} b_m(z-z_0)^m}_{=:g(z)} \end{aligned}$$

mit $b_m := a_{k+m}$ und $b_0 = g(z_0) \neq 0$. Aus der Stetigkeit von g folgt dann: $\exists U_\varepsilon(z_0) \subseteq E$, so daß $g(z)$ auf $U_\varepsilon(z_0)$ überall $\neq 0$ ist.

Also: $f(z) = (z-z_0)^k g(z)$ hat in $U_\varepsilon(z_0)$ außer in z_0 keine weitere Nullstelle. ■

Satz 6: Sei f analytisch auf dem Gebiet $E \subseteq \mathbb{C}$. Falls f auf einer nichtleeren, offenen Teilmenge von E konstant ist, ist f auf ganz E konstant.

Beweis: OBdA. $f(U_\delta(z_0)) = 0$. Sei

$$A := \{z \in E \mid \exists U_\varepsilon(z) \text{ mit } f(U_\varepsilon(z)) = 0\}.$$

Diese Menge ist nichtleer, da $z_0 \in A$.

Zeige: A ist offen und abgeschlossen in E ($\xRightarrow{\text{zshgd.}} A = E$).

- Offenheit ist klar: Sei $z_1 \in A$: Dann sind alle $z \in U_\varepsilon(z_1)$ auch in A .
- Abgeschlossenheit: zu zeigen: $E \setminus A$ ist offen in E :
Sei $z \in E \setminus A$; falls $f(z) \neq 0$, existiert Umgebung von z in E ohne Nullstelle von f , diese Umgebung ist Teilmenge von $E \setminus A$.
Falls $f(z) = 0$, existiert $U_\varepsilon(z) \subseteq E$, so daß z in $U_\varepsilon(z)$ die einzige Nullstelle von f ist (nach Satz 5), also $U_\varepsilon(z) \subseteq E \setminus A$.

■

Satz 7 (Identitätssatz für analytische Funktionen): Seien f und g analytisch auf dem Gebiet $E \subseteq \mathbb{C}$. Falls die Menge der Punkte $z \in E$ mit $f(z) = g(z)$ einen Häufungspunkt in E hat, stimmen f und g auf ganz E überein.²

Beweis: Aufgabe 3b, 7. Serie, siehe Anhang A, Seite 85, Anhang B, Seite 109.

5.2 Laurent-Entwicklung und Singularitäten

Satz 8 (Laurent-Entwicklung): Sei f analytisch im Kreisring

$$K_{r_1, r_2}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z - z_0| < r_2\}$$

(wobei $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$).

²vgl. Analysis III, 12.14 und Übung 183).

Dann ist für jedes $z \in K_{r_1, r_2}(z_0)$

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z), \text{ wobei}$$

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (\text{analytischer Teil von } f), \quad (5.5)$$

$$f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n} \quad (\text{Hauptteil von } f) \quad (5.6)$$

mit

$$a_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{m+1}} dz \quad (m \in \mathbb{Z}),$$

wobei γ eine positiv orientierte Jordankurve in $K_{r_1, r_2}(z_0)$ um z_0 ist (also: $W(\gamma, z_0) = 1$).

f_1 ist analytisch auf $U_{r_2}(z_0)$, f_2 ist analytisch auf $\mathbb{C} \setminus \overline{U_{r_1}(z_0)}$.

Die Darstellung von f als

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m (z - z_0)^m$$

ist eindeutig bestimmt. (Gemeint ist, daß die Koeffizienten eindeutig sind.)

Beweis: 1. Eindeutigkeit : Die Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}$$

konvergieren gleichmäßig auf γ (s. Existenz), also auch

$$\frac{f(z)}{(z - z_0)^{m+1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-m-1}.$$

Daraus folgt:

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{m+1}} dz = a_m \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i a_m \quad (m \in \mathbb{Z}),$$

da die Terme für $n > m$ nach dem Cauchy-Integralsatz gleich Null sind, die Terme für $n < m$ Null sind, weil eine Stammfunktion zu $\frac{1}{w^k}$, $k \geq 1$ existiert. Also ist a_m eindeutig festgelegt.

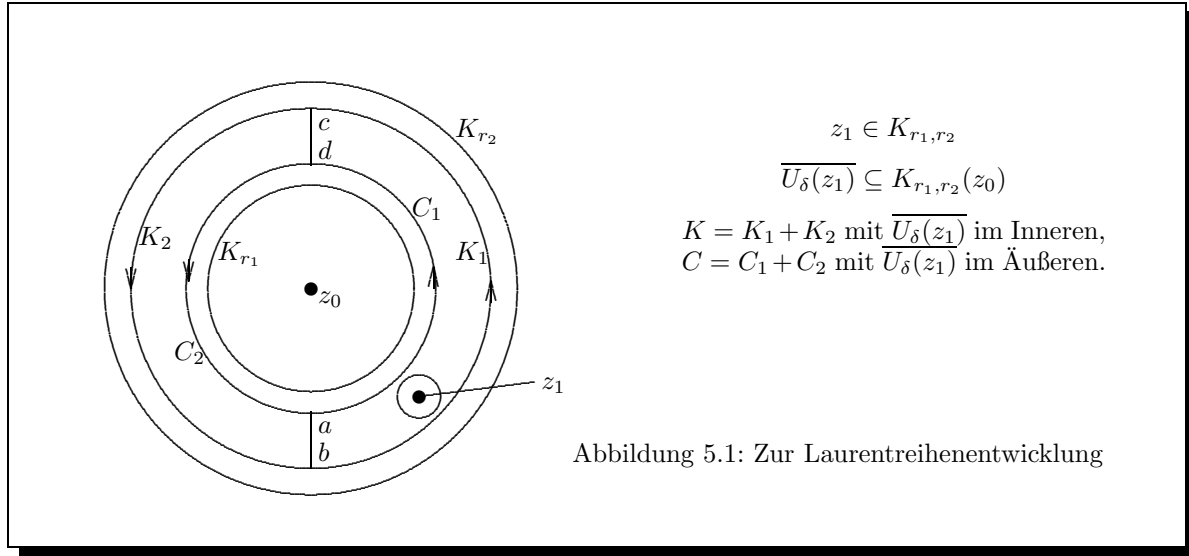
2. Existenz: (vgl. Abbildung 5.1)

Nach der Cauchy-Integralformel gilt:

$$f(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_1 + \vec{ab} - C_1 + \vec{cd}} \frac{f(z)}{z - z_1} dz$$

und nach dem Cauchy-Integralsatz:

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_2 + \vec{dc} - C_2 + \vec{ba}} \frac{f(z)}{z - z_1} dz.$$



Addition dieser beiden Gleichungen ergibt:

$$f(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_K \frac{f(z)}{z - z_1} dz - \int_C \frac{f(z)}{z - z_1} dz \right).$$

Damit definieren wir:

$$f_1(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(z)}{z - z_1} dz. \quad (5.7)$$

$$f_2(z) := -\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_1} dz. \quad (5.8)$$

- Auf K ($z \in K$) gilt:

$$\frac{|z_1 - z_0|}{|z - z_0|} < 1.$$

Wie im Beweis zu Satz 4 folgt:

$$\frac{1}{z - z_1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1 - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}}$$

mit gleichmäßiger Konvergenz auf K . Also:

$$\frac{f(z)}{z - z_1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} (z_1 - z_0)^n$$

konvergiert gleichmäßig auf K . Damit folgt:

$$f_1(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(z)}{z - z_1} dz$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz}_{=a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz} (z_1 - z_0)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_1 - z_0)^n .
\end{aligned}$$

Der Konvergenzradius dieser Reihe ist mindestens r_2 , denn K kann bis zum Radius r_2 ausgedehnt werden (analog wie beim Beweis zur Taylorentwicklung).

- Auf C ($z \in C$) gilt:

$$\frac{|z - z_0|}{|z_1 - z_0|} < 1 .$$

Also folgt (analog Satz 4):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z - z_1} &= - \frac{1}{z_1 - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}} \\
&= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z - z_0)^{n-1}}{(z_1 - z_0)^n}
\end{aligned}$$

mit gleichmäßiger Konvergenz auf C . Also folgt:

$$\begin{aligned}
f_2(z_1) &= - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_1} dz \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{1-n}} dz (z_1 - z_0)^{-n} \\
&= \sum_{m=-\infty}^{-1} \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{m+1}} dz}_{=a_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{m+1}} dz} (z_1 - z_0)^m
\end{aligned}$$

konvergiert auf $\mathbb{C} \setminus \overline{U_{r_1}(z_0)}$, da z_1 laut Konstruktion außerhalb von C liegen muß. Daß der Konvergenzbereich gerade so aussieht, kann man sich auch nochmal durch folgende Überlegung klar machen: Sei

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R um 0. Substituiert man nun $w := \frac{1}{z}$, so lautet obige Reihe

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{w}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n w^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{-1} a_{-m} w^m .$$

Also: Der rechte Ausdruck, der ja strukturell so aussieht wie der Hauptteil von f_2 , konvergiert für $|\frac{1}{w}| = |z| < R$, d. h. für $|w| > R$, also auf $\mathbb{C} \setminus \overline{U_R(0)}$. ■

Beispiel 1:

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} \quad (m \in \mathbb{Z}) .$$

Dies ist schon die Laurent-Reihe von f in jedem Kreisring $K_{r_1 r_2}(z_0)$ mit $0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$.

Beispiel 2:

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}, \quad z_0 = 0.$$

Es gilt:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \underbrace{1}_{\text{analytischer Teil}} + \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{-1} \frac{z^m}{(-m)!}}_{\text{Hauptteil}}.$$

Daraus können wir die Koeffizienten der Laurentreihe bei 0 in irgendeinem Kreisring mit $0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$ ablesen. Außerdem gilt:

$$a_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r(0)} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^{m+1}} dz.$$

Vergleich mit obiger Entwicklung ergibt für die Integrale:

$$2\pi i \cdot a_m = \begin{cases} 0 & \text{falls } m > 0, \\ \frac{2\pi i}{(-m)!} & \text{falls } m \leq 0. \end{cases}$$

Beispiel 3:

$$f(z) = \frac{-z}{(z-1)(z-2)}, \quad z_0 = 1.$$

Kreisring K_{r_1, r_2} mit $0 \leq r_1 < r_2 \leq 1$.

Partialbruchzerlegung ergibt:

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{2}{2-z}.$$

Im gegebenen Kreisring ist $|z-1| < 1$. Also:

$$\frac{2}{2-z} = 2 \frac{1}{1-(z-1)} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n.$$

Daher:

$$f(z) = \underbrace{\frac{1}{z-1}}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{2 + 2(z-1) + 2(z-1)^2 + \dots}_{\text{analytischer Teil}}.$$

Betrachten wir nun einen neuen Kreisring mit $1 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$. Dann: $|z-1| > 1$. Daher: $|\frac{1}{z-1}| < 1$ und:

$$\frac{2}{2-z} = -\frac{2}{z-1} \frac{1}{1-\frac{1}{z-1}} = -2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-1)^{n+1}}.$$

Daher lautet die Laurententwicklung nun:

$$f(z) = \frac{1}{z-1} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-1)^{n+1}} = \underbrace{-\frac{1}{z-1} - \frac{2}{(z-1)^2} - \frac{2}{(z-1)^3} - \dots}_{\text{Hauptteil}}.$$

Definition: z_0 heißt *isolierte Singularität* von f , wenn f auf einer Umgebung $U_\delta(z_0)$ analytisch ist mit der einzig möglichen Ausnahme z_0 . (vgl. Beispiele 1 – 3). (d.h. f analytisch auf $U_\delta(z_0) \setminus \{z_0\} = K_{0,\delta}(z_0)$.)

Beispiele für *nicht-isolierte* Singularitäten:

- Aufgrund der Periodizität des Sinus liegen unendlich viele Singularitäten in der Nähe von ∞ :

$$\frac{1}{\sin(\frac{1}{z})}, \quad z_0 = 0.$$

- Weil einige Funktionen mehrdeutig sind, kann man nur Zweige von ihnen als stetige bzw. analytische Funktionen betrachten. Diese Zweige sind nicht auf ganz $\mathbb{C}$ definiert, z. B. können Wurzelzweige auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^+$ oder $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ definiert sein. Alle Wurzelzweige sind also auf einer geschlitzten Ebene definiert, deren Schlitz von 0 ausgeht (dort ist die Wurzel ja nicht analytisch, weil nicht differenzierbar). Daher ist 0 nicht-isolierte Singularität, weil *jeder* Wurzelzweig weitere Singularitäten in $U_r(0)$ mitbringt (durch den Schlitz). Die Wurzel ist dennoch in diesen „Schlitzsingularitäten“ analytisch, man muß nur einen anderen geeigneten Wurzelzweig betrachten; diese Singularitäten sind also willkürliche Singularitäten.

Beispiele für nicht-isolierte Singularitäten der Wurzel:

$$\sqrt{z}, \quad z_0 = 0$$

oder

$$\sqrt{\frac{1}{z^2} + 1}, \quad z_0 = i.$$

Klassifikation isolierter Singularitäten

Sei z_0 isolierte Singularität von f . Unter der Laurentreihe von f bei z_0 versteht man die Laurentreihe um z_0 in einem Kreisring $K_{0,r_2}(z_0)$ mit $0 < r_2 (\leq \delta)$.

z_0 heißt *hebbare Singularität*, wenn der Hauptteil dieser Laurentreihe verschwindet:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad f(z_0) = a_0.$$

z_0 heißt *Pol der Ordnung k (≥ 1)*, wenn in der Laurentreihe $a_{-k} \neq 0$, aber: $\forall n > k : a_{-n} = 0$.

z_0 heißt *wesentliche Singularität*, wenn z_0 weder hebbar noch Pol ist, d. h. wenn der Hauptteil unendlich viele Terme enthält.

Satz 9: Sei z_0 isolierte Singularität von f .

- (i) z_0 ist hebbar genau dann, wenn f auf $U_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$ beschränkt ist. (**Riemann'scher Hebbbarkeitssatz**).
- (ii) z_0 ist Pol genau dann, wenn

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$$

(Zur Charakterisierung von Polen k -ter Ordnung: siehe Serie 8, Aufgabe 1 (vgl. Anhang A, Seite 85, Anhang B, Seite 111)).

(iii) z_0 ist wesentlich genau dann, wenn für vorgegebenes $\delta > 0$

$$\forall 0 < \varepsilon < \delta : \overline{f(U_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\})} = \mathbb{C} \quad \text{gilt.}$$

(Casorati-Weierstraß).

Beweis: (i) Sei $|f(z)| \leq M$ auf $U_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$; $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ die Laurent-Reihe bei z_0 . Zeige, daß für jedes $m \in \mathbb{N}$ $a_{-m} = 0$ ist:

$$a_{-m} = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{-m+1}} dz, \quad 0 < r < \delta.$$

Daher:

$$\begin{aligned} |a_{-m}| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{K_r} f(z)(z-z_0)^{m-1} dz \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi \cdot r \cdot M \cdot r^{m-1} \\ &= M \cdot r^m \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

(ii) Falls z_0 Pol k -ter Ordnung, ist $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^k}$ mit analytischem g und $g(z_0) \neq 0$ (vgl. Aufgabe 1, 8. Serie: s. Seiten 85 und 111.) Daher $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$.

Umgekehrt: Falls $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$, trifft weder (i) noch (iii) zu. Also handelt es sich um einen Pol.

(iii) Falls die Casorati-Weierstraß-Bedingung erfüllt ist, kann weder (i) noch (ii) vorliegen. Daher ist die Singularität wesentlich.

Umgekehrt: Sei z_0 wesentliche Singularität. Angenommen, die Casorati-Weierstraß-Bedingung wäre nicht erfüllt:

$$\exists c \in \mathbb{C} \exists \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 \forall z \in U_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\} : |f(z) - c| \geq \eta.$$

Dann ist $g(z) := \frac{1}{f(z)-c}$ beschränkt auf $U_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$, nämlich $|g(z)| \leq \frac{1}{\eta}$, und analytisch auf $U_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$. Daher gilt:

$$g(z) = b_k(z-z_0)^k + b_{k+1}(z-z_0)^{k+1} + \dots$$

mit einem $k \geq 0$ und $b_k \neq 0$.

Falls $k = 0$, ist $g(z_0) \neq 0$, also $\frac{1}{g(z)} = f(z) - c$ analytisch bei z_0 , d. h. z_0 wäre eine hebbare Singularität von f , mit Widerspruch.

Falls $k \geq 1$, wäre z_0 eine Nullstelle k -ter Ordnung von g , nach Aufgabe 1, 8. Serie (vgl. Seiten 85, 111), also ein Pol k -ter Ordnung von $f(z) - c$, also auch von f , ebenfalls mit Widerspruch.

■

Es gilt sogar mehr:

Der große Satz von Picard: Ist z_0 wesentliche Singularität von f , so nimmt f auf jeder Umgebung von z_0 jede komplexe Zahl bis auf höchstens eine Ausnahme unendlich oft an. (vgl. **Remmert 1**, Seite 243, Beweis: **Remmert 2**, Seite 209).

Beispiel: (i)

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{\sin(z)}{z}, \quad z_0 = 0 \\
 &= \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k+1)!}
 \end{aligned}$$

konvergiert auf $\mathbb{C}$.

(ii)

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(2-z)}$$

hat Pole 1. Ordnung bei 1 und 2.

(iii)

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n.$$

Hier ist 0 wesentliche Singularität.

Häufig hilfreich ist folgende nützliche Version der *Regel von de l'Hospital*:

Satz: Seien f und g analytisch bei z_0 und sei z_0 eine Nullstelle m -ter Ordnung von f und eine Nullstelle n -ter Ordnung von g . ($m, n \in \mathbb{N}_+$). Dann existiert in $\mathbb{C}$:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
 f(z) &= (z - z_0)^m F(z), \quad F(z_0) \neq 0; \\
 g(z) &= (z - z_0)^n G(z), \quad G(z_0) \neq 0.
 \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\frac{f(z)}{g(z)} = (z - z_0)^{m-n} \frac{F(z)}{G(z)}$$

und weiter mittels Produktregel, auf f und g angewandt:

$$\frac{f'(z)}{g'(z)} = (z - z_0)^{m-n} \frac{mF(z) + (z - z_0)F'(z)}{nG(z) + (z - z_0)G'(z)}.$$

Falls $m > n$, sind beide Limes 0;Falls $m = n$, sind beide Limes $\frac{F(z_0)}{G(z_0)} \in \mathbb{C}$;Falls $m < n$, sind beide Limes ∞ . ■

6. Der Residuensatz

Motivation: Beim Integrieren einer Laurentreihe besitzen alle Terme bis auf eine Ausnahme eine Stammfunktion. Diese Ausnahmestellung rechtfertigt die folgende Definition.

Definition: Sei z_0 isolierte Singularität von f . Das *Residuum* von f bei z_0 , $\text{Res}(f, z_0)$ ist der Koeffizient a_{-1} in der Laurentreihe von f um z_0 . Mit geeigneter Jordankurve γ gilt natürlich:

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz \quad (6.1)$$

Satz 1: Sei z_0 Pol k -ter Ordnung von f . Dann ist

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} ((z - z_0)^k f(z)) .$$

Insbesondere für $k = 1$:

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) .$$

Beweis: Da z_0 Pol k -ter Ordnung von f , gilt:

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots$$

mit $a_{-k} \neq 0$. Daher:

$$(z - z_0)^k f(z) = a_{-k} + a_{-k+1}(z - z_0) + \dots + a_{-1}(z - z_0)^{k-1} + \dots ;$$

$$\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} ((z - z_0)^k f(z)) = (k-1)! a_{-1} + \frac{k!}{1!} a_0(z - z_0) + \frac{(k+1)!}{2!} a_1(z - z_0)^2 + \dots .$$

Daraus folgt:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} ((z - z_0)^k f(z)) = (k-1)! a_{-1}$$

und hiermit die Behauptung. ■

Wenn also f in $U_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$ analytisch ist, so gilt also z. B. mit $r < \delta$:

$$\text{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r(z_0)} f(z) dz .$$

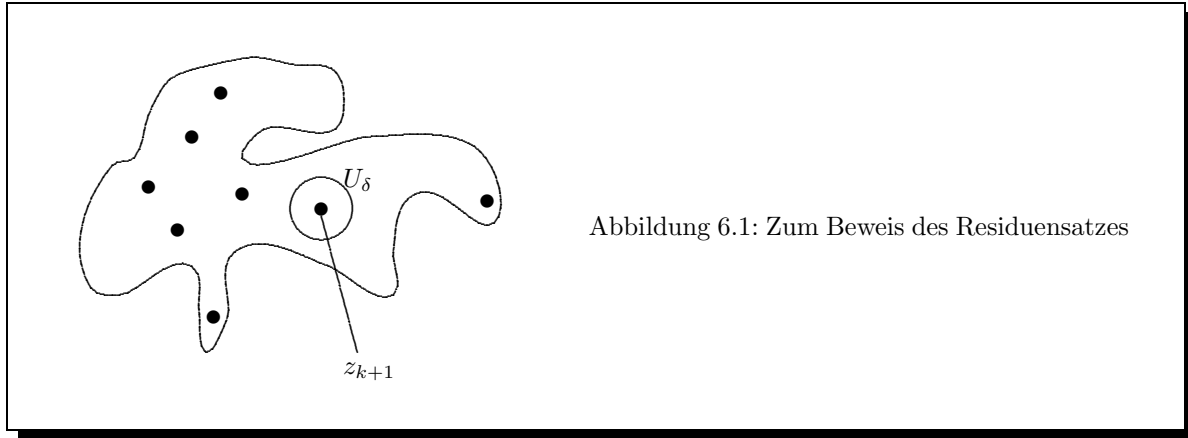


Abbildung 6.1: Zum Beweis des Residuensatzes

Ist f auch bei z_0 analytisch, so folgt (unter Erweiterung der eigentlichen Definition)

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = 0 .$$

Die Umkehrung gilt *nicht* (z. B. $\frac{1}{z^2}$ bei 0):

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = 0 \quad \not\Rightarrow \quad f \text{ auch bei } z_0 \text{ analytisch.}$$

Beispiel:

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+1)^2} .$$

1 ist Pol 1-ter Ordnung.

$$\operatorname{Res}(f, 1) = \frac{1}{1} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{z}{(z-1)(z+1)^2} = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4} .$$

-1 ist Pol 2-ter Ordnung.

$$\operatorname{Res}(f, -1) = \frac{1}{1} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} \frac{z}{z-1} = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{-1}{(z-1)^2} = -\frac{1}{4} .$$

Satz 2 (Residuensatz): Sei γ positiv orientierte Jordankurve, f eine auf γ stetige und im Innengebiet E bis auf endlich viele isolierte Singularitäten $z_1, \dots, z_k$ analytische Funktion. Dann ist

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k \operatorname{Res}(f, z_j) .$$

Beweis: per Induktion über k :

$k = 0$: Cauchy-Integralsatz.

$k = 1$: Definition des Residuums.

$k \longrightarrow k+1$: f analytisch auf $U_{\delta}(z_{k+1}) \setminus \{z_{k+1}\} \subseteq E$. Sei nun $f = f_1 + f_2$ Laurententwicklung auf $U_{\delta}(z_{k+1}) \setminus \{z_{k+1}\}$, wobei f_1 der analytische Teil (d. h. f_1 ist analytisch auf $U_{\delta}(z_{k+1})$), und

f_2 der Hauptteil (d. h. f_2 ist analytisch auf $\mathbb{C} \setminus \{z_{k+1}\}$). Sei nun für $z \in E \setminus \{z_1, \dots, z_k\} \cup \gamma$ die Funktion g definiert:

$$g(z) := \begin{cases} f(z) - f_2(z) & \text{falls } z \neq z_{k+1} \\ f_1(z) & \text{falls } z = z_{k+1} \end{cases}$$

g ist stetig auf γ und analytisch überall dort, wo f analytisch ist und bei z_{k+1} . Wegen der Induktionsvoraussetzung gilt daher:

$$\int_{\gamma} g(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}(g, z_j) .$$

Für alle $j = 1, \dots, k$ gilt:

$$\text{Res}(g, z_j) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_{r_j}(z_j)} (f(z) - \underbrace{f_2(z)}_{\text{analytisch}}) dz \stackrel{\text{Cauchyintegralsatz}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{K_{r_j}(z_j)} f(z) dz .$$

Daher:

$$\forall j = 1, \dots, k : \quad \text{Res}(g, z_j) = \text{Res}(f, z_j) ,$$

somit:

$$\int_{\gamma} g(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}(f, z_j) . \quad (6.2)$$

Andererseits gilt, da z_{k+1} nicht auf γ liegt:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} g(z) dz &= \int_{\gamma} (f(z) - f_2(z)) dz \\ \Rightarrow \int_{\gamma} g(z) dz &= \int_{\gamma} f(z) dz - \underbrace{\int_{\gamma} f_2(z) dz}_{=2\pi i \text{Res}(f_2, z_{k+1})} . \end{aligned} \quad (6.3)$$

Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, z_{k+1}) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r(z_{k+1})} (\underbrace{f_1(z)}_{\text{analytisch}} + f_2(z)) dz \\ &\stackrel{\text{Cauchyintegralsatz}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r(z_{k+1})} f_2(z) dz . \\ \Rightarrow \text{Res}(f, z_{k+1}) &= \text{Res}(f_2, z_{k+1}) . \end{aligned} \quad (6.4)$$

Aus den Gleichungen (6.2), (6.3), (6.4) ergibt sich nun die Behauptung. ■

Beispiel:

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+1)^2} .$$

Falls Jordankurve γ sowohl 1 als auch -1 im Innengebiet hat, ist

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) = 0 .$$

Beispiel:

$$\int_{\gamma} \frac{2 + 3 \sin(\pi z)}{z(z-1)^2} dz$$

mit γ wie in folgender Abbildung 6.2:

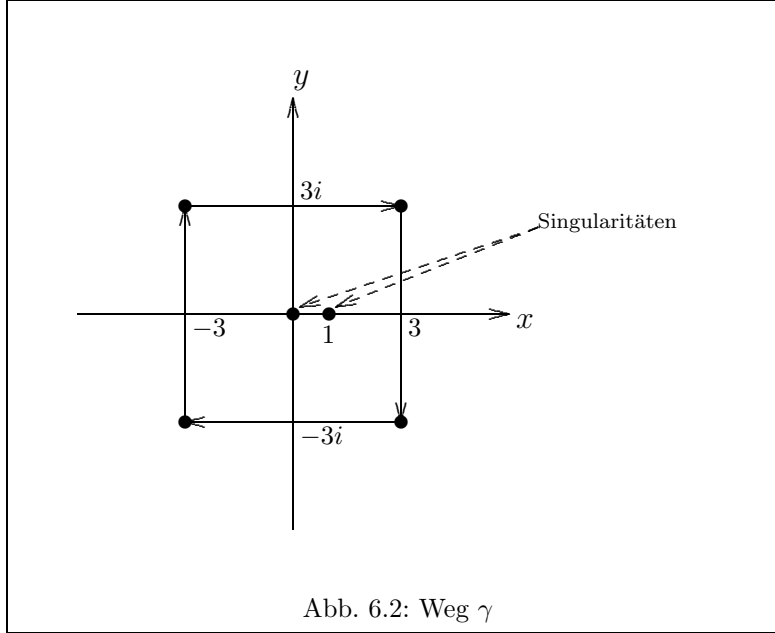


Abb. 6.2: Weg γ

Die Singularität in 0 ist ein Pol 1-ter Ordnung:

$$\text{Res}(f, 0) = \frac{2 + 3 \sin(\pi \cdot 0)}{1} = 2 .$$

Die Singularität in 1 ist ein Pol 2-ter Ordnung:

$$\text{Res}(f, 1) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \frac{2 + 3 \sin(\pi z)}{z} = -3\pi - 2 .$$

Also gilt:

$$\int_{\gamma} \frac{2 + 3 \sin(\pi z)}{z(z-1)^2} dz = 2\pi i (2 - 3\pi - 2) = -6\pi^2 i .$$

Beispiel:

$$\int_{K_5(0)} \frac{e^z}{\cosh(z)} dz .$$

Die Singularitäten des Integranden sind genau die Nullstellen des $\cosh$, d. h.

$$\begin{aligned} e^z + e^{-z} &= 0 \\ \iff e^{2z} &= -1 = e^{\pi i} \\ \iff 2z &= \pi i + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \iff z &= \left(\frac{1}{2} + k\right) \pi i, \quad k \in \mathbb{Z} . \end{aligned}$$

Also liegen folgende Singularitäten innerhalb $K_5(0)$:

$$\left| \left(\frac{1}{2} + k \right) \pi i \right| \leq 5 \iff k \in \{0, \pm 1, -2\} .$$

Betrachte den folgenden Grenzwert, der ja gleich a_{-1} , also dem Residuum, ist:

$$\begin{aligned} & \lim_{z \rightarrow (\frac{1}{2} + k) \pi i} \left(z - \left(\frac{1}{2} + k \right) \pi i \right) \frac{e^z}{\cosh(z)} \\ \stackrel{\text{l'Hospital}}{=} & \lim_{z \rightarrow (\frac{1}{2} + k) \pi i} \frac{\left(z - \left(\frac{1}{2} + k \right) \pi i + 1 \right) \cdot e^z}{\sinh(z)} \\ \stackrel{\text{Def. von sinh}}{=} & \lim_{z \rightarrow (\frac{1}{2} + k) \pi i} \frac{\left(z - \left(\frac{1}{2} + k \right) \pi i + 1 \right) \cdot 2}{1 - \frac{1}{e^{2z}}} = 1 . \end{aligned}$$

Also:

$$\int_{K_5(0)} \frac{e^z}{\cosh(z)} dz = 2\pi i \cdot (1 + 1 + 1 + 1) = 8\pi i .$$

6.1 Anwendungen des Residuensatzes

Satz 3 (Argumentprinzip): γ sei positiv orientierte Jordankurve. f sei eine auf γ analytische und nullstellenfreie, im Inneren von γ bis auf endlich viele Pole $p_1, \dots, p_r$ der Ordnungen $m_1, \dots, m_r$ analytische Funktion.

Dann hat f im Inneren von γ höchstens endlich viele Nullstellen $z_1, \dots, z_q$ der Ordnungen $n_1, \dots, n_q$ und es gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^q n_j - \sum_{j=1}^r m_j .$$

„Substitutionsregel“: Der Name *Argumentprinzip* kommt von folgender Tatsache:

Sei γ stückweise glatt, f wie in Satz 3. Dann gilt:

$$\int_{f \circ \gamma} \frac{1}{z} dz = \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz .$$

Daher:

$$\begin{aligned} W(f \circ \gamma, 0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{f \circ \gamma} \frac{1}{z} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \\ &\stackrel{\text{Satz 3}}{=} \sum_{j=1}^q n_j - \sum_{j=1}^r m_j . \end{aligned}$$

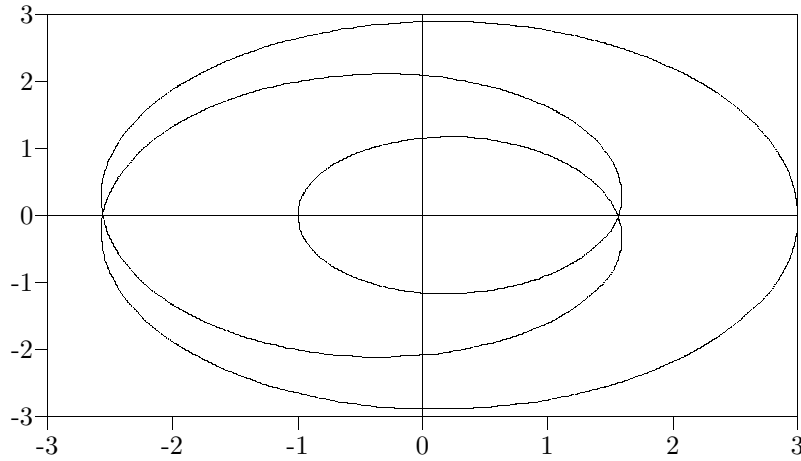
Die Umlaufzahl einer periodischen Kurve beschreibt aber gerade den Faktor von 2π , um den sich das *Argument* vom Anfangs- zum Endpunkt der Kurve geändert hat.

Beispiel: Sei

$$\gamma(t) = e^{it} , \quad t \in [0, 2\pi]$$

und

$$f(z) = \frac{z-2}{z^3} .$$

Abbildung 6.3: Der Graph von $f \circ \gamma = e^{-3it} (e^{it} - 2)$ 

Dann ergibt sich mittels Satz 3:

$$W(f \circ \gamma, 0) = 0 - 3 = -3.$$

Dies erkennt man ebenso am Graphen von $f \circ \gamma$, wobei der Graph im Uhrzeigersinn durchlaufen wird: siehe Abbildung 6.3. Für $\gamma(t) = 3e^{it}$ ergibt sich mittels Satz 3:

$$W(f \circ \gamma, 0) = 1 - 3 = -2.$$

Beweis von Satz 3: Es existieren nur endlich viele Nullstellen im Inneren von γ , sonst wäre $f \equiv 0$. Falls $f(z) = (z - z_0)^l g(z)$ in $U_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$, wobei g in $U_\delta(z_0)$ analytisch, $g(z_0) \neq 0$, $l \in \mathbb{Z}$ (also z_0 Nullstelle oder Pol), so ist

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{l}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)} \quad (6.5)$$

für alle $z \in U_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$, wobei $\varepsilon \leq \delta$ so gewählt, daß $g(z) \neq 0$ auf $U_\varepsilon(z_0)$.

$\frac{g'}{g}$ ist analytisch auf $U_\varepsilon(z_0)$.

Es gilt:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{\substack{z_0 \text{ Pol oder } z_0 \text{ Nullstelle} \\ \text{von } f \text{ im Inneren von } \gamma}} \text{Res} \left(\frac{f'}{f}, z_0 \right). \quad (*)$$

Mittels Glg. (6.5) erhält man für die Residuen:

Wenn z_0 Pol von f der Ordnung k ($k := -l > 0$), ist z_0 Pol 1. Ordnung von $\frac{f'}{f}$ mit Residuum $-k$.

Wenn z_0 Nullstelle von f der Ordnung k ($k := l > 0$), ist z_0 Pol 1. Ordnung von $\frac{f'}{f}$ mit Residuum k .

Unter Aufspaltung der Summe in (*) ergibt sich also:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^q n_j + \sum_{j=1}^r -m_j .$$

■

Satz 4 (Rouché): Seien f, g auf der Jordankurve γ und im Inneren von γ analytisch (und nicht identisch Null), auf γ gelte:

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)| . \quad (6.6)$$

Dann haben f und g im Inneren von γ die gleiche Anzahl von Nullstellen (den Vielfachheiten gemäß gezählt).

Beweis: Da (wegen der Voraussetzung (6.6)) g auf γ nullstellenfrei, ist $\frac{g'}{g}$ auf einem Gebiet E analytisch, das γ enthält, und auf dem noch $\left| \frac{f(z)}{g(z)} - 1 \right| < 1$.

$$h := \frac{f}{g} : E \longrightarrow U_1(1) .$$

Auf $U_1(1)$ existiert ein Logarithmus-Zweig $\log$, also ist $\log \circ h$ eine auf E analytische Funktion mit der Ableitung $\frac{h'}{h}$. Also folgt, mit der Definition von h , für diese Ableitung:

$$\frac{h'}{h} = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g} .$$

Also gilt, da ja für $\frac{h'}{h}$ eine Stammfunktion existiert,

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{h'(z)}{h(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g'(z)}{g(z)} dz .$$

Dies ist nach Satz 3 gleich der Summe der Ordnungen der Nullstellen von f im Inneren von γ minus der Summe der Ordnungen der Nullstellen von g im Inneren von γ . Hieraus folgt direkt die Behauptung. ■

1. Anwendung: Jedes Polynom $f = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ mit $n \geq 1$ und $a_n \neq 0$ hat in $\mathbb{C}$ genau n Nullstellen (gemäß Vielfachheiten gezählt).

$$f(z) = z^n \cdot \left(\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{z} + a_n \right) .$$

Da $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$: wähle $R \in \mathbb{R}_+$ so groß, daß außerhalb und auf $K_R(0)$ keine Nullstelle von f mehr liegt. Wähle $g(z) = a_n z^n$. Dann ist $|f(z) - g(z)| = |a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1}|$. Auf $K_R(0)$ ist

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(z) - g(z)}{g(z)} \right| &= \left| \frac{a_0 + \dots + a_{n-1} z^{n-1}}{a_n z^n} \right| \\ &\leq \frac{|a_0| + |a_1|R + \dots + |a_{n-1}|R^{n-1}}{|a_n|R^n} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 . \end{aligned}$$

Nach Rouché hat für hinreichend großes R das Polynom f im Inneren von $K_R(0)$ ebenso viele Nullstellen wie g , nämlich n .

2. Anwendung: $f(z) = z^7 - 5z^3 + 12$ hat sämtliche Nullstellen in $K_{1,2}(0)$.

1. f hat im Inneren von $K_1(0)$ und auf $K_1(0)$ keine Nullstelle. Denn : $g(z) \equiv 12$.

$$\begin{aligned} |f(z) - g(z)| &= |z^7 - 5z^3| \\ &\leq |z^7| + 5|z^3| \\ &\stackrel{\text{auf } K_1(0)}{=} 6 < 12 = |g(z)| . \end{aligned}$$

2. Sämtliche Nullstellen von f liegen innerhalb von $K_2(0)$. Wähle $g(z) = z^7$.

$$\begin{aligned} |f(z) - g(z)| &= |12 - 5z^3| \\ &\leq 12 + 5|z^3| \\ &\stackrel{\text{auf } K_2(0)}{=} 52 < 2^7 = |g(z)| . \end{aligned}$$

Also hat f innerhalb von $K_2(0)$ genau 7 Nullstellen, das müssen nach der 1. Anwendung alle sein.

6.1.1 Residuenkalkül

Im Residuenkalkül benutzt man funktionentheoretische Erkenntnisse, um *reelle* Integrale zu lösen, die andernfalls gar nicht oder nur schwer lösbar wären. Insbesondere für die Physik ist dieses Kalkül einer der Hauptgründe, sich mit der Funktionentheorie zu beschäftigen.

Ein *Polynom in zwei Variablen* hat folgende Gestalt:

$$P(z_1, z_2) = \sum_{\text{gewisse } (m,n) \in \mathbb{N}_0^2} a_{m,n} z_1^m z_2^n .$$

Eine *rationale Funktion* sieht so aus:

$$R(z_1, z_2) = \frac{P_1(z_1, z_2)}{P_2(z_1, z_2)}$$

mit P_1, P_2 Polynome.

Betrachte:

$$\begin{aligned} R(\sin(t), \cos(t)) &= R\left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}, \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right) \\ &\stackrel{z:=e^{it}}{=} R\left(\frac{z^2 - 1}{2iz}, \frac{z^2 + 1}{2z}\right) . \end{aligned}$$

Satz 5: Sei R rationale Funktion in 2 Variablen und

$$f(z) = R\left(\frac{z^2 - 1}{2iz}, \frac{z^2 + 1}{2z}\right)$$

für alle z , für die die rechte Seite in $\mathbb{C}$ definiert ist. Dann ist:

$$\int_0^{2\pi} R(\sin(t), \cos(t)) dt = \int_{K_1(0)} \frac{f(z)}{iz} dz ,$$

falls f keine Singularitäten (d. h. hier: Pole) auf $K_1(0)$ hat.

Beweis: $\gamma(t) = e^{it}$ parametrisiert $K_1(0)$; γ glatt. Daher:

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} \frac{f(z)}{iz} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it})}{ie^{it}} \gamma'(t) dt \\
 &= \int_0^{2\pi} f(e^{it}) dt \\
 &= \int_0^{2\pi} R\left(\frac{e^{2it}-1}{2ie^{it}}, \frac{e^{2it}+1}{2e^{it}}\right) dt \\
 &= \int_0^{2\pi} R(\sin(t), \cos(t)) dt .
 \end{aligned}$$

(Weiter gilt natürlich:

$$\int_{K_1(0)} \frac{f(z)}{iz} dz = 2\pi i \underbrace{\sum_{z_0 \in U_1(0)} \operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{iz}, z_0\right)}_{\text{endliche Summe, weil } R \text{ rational}} .$$

Beispiel:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \cos(t)} \quad a \in \mathbb{R}, \quad |a| > 1 .$$

Wähle

$$R(z_1, z_2) = \frac{1}{a + z_2} \quad \implies \quad f(z) = \frac{1}{a + \frac{z^2+1}{2z}} .$$

Also:

$$\int_{K_1(0)} \frac{f(z)}{iz} dz = -i \cdot 2 \cdot \int_{K_1(0)} \frac{1}{2az + z^2 + 1} dz .$$

Die Singularitäten des Integranden $-a + \sqrt{a^2 - 1}$, $-a - \sqrt{a^2 - 1}$ sind reell und $\neq 1$, $\neq -1$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2 + 1 + 2az}, -a + \sqrt{a^2 - 1}\right) &= \frac{1}{2\sqrt{a^2 - 1}} , \\
 \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2 + 1 + 2az}, -a - \sqrt{a^2 - 1}\right) &= \frac{1}{-2\sqrt{a^2 - 1}} .
 \end{aligned}$$

Für $a > 1$ gilt :

$$-a + \sqrt{a^2 - 1} \in U_1(0) , \quad -a - \sqrt{a^2 - 1} \notin U_1(0) ,$$

somit:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \cos(t)} &= -2i \cdot 2\pi i \cdot \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2 + 1 + 2az}, -a + \sqrt{a^2 - 1}\right) \\
 &= \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}} .
 \end{aligned}$$

Für $a < -1$ ergibt sich entsprechend umgekehrt:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \cos(t)} = -\frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

Satz 6: Sei $E \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, das die abgeschlossene obere Halbebene $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$ enthält. Die Funktion f sei auf E analytisch bis auf endlich viele Singularitäten, von denen keine reell ist. Es gelte $z \cdot f(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0$. Dann existiert der *Cauchy-Hauptwert* des Integrals:

$$\oint_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^c f(x) dx.$$

Es gilt:

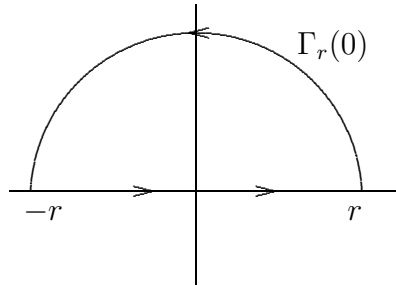
$$\oint_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{z_0 \in \mathbb{H}} \operatorname{Res}(f, z_0).$$

Weiterhin gilt: Falls $\int_0^{\infty} \dots$ und $\int_{-\infty}^0 \dots$ beide existieren, so existiert $\oint_{-\infty}^{\infty} \dots = \int_{-\infty}^0 \dots + \int_0^{\infty} \dots$ (dies folgt natürlich direkt aus Glg. 2.1).

(Hinreichend für die Existenz von $\int_a^{\infty} f(x) dx$ ist z. B. die Beschränktheit von $x^s \cdot f(x)$ mit einem $s > 1$ (weil aus $f(x) \cdot x^s < M$ folgt: $f(x) < M \cdot x^{-s}$; dies ist eine Majorante, da $\int_b^{\infty} x^{-s}$ existiert für $s > 1, b > 0$.)

Mehr über Hauptwerte steht im Anhang D.

Beweis: Wähle r so groß, daß alle Singularitäten von f im Inneren von $K_r(0)$ liegen, dann ist ein Halbkreis beschrieben durch $\Gamma_r(0) := K_r(0) \cap \mathbb{H}$:



Es gilt:

$$\left| \int_{\Gamma_r(0)} f(z) dz \right| \leq \pi \cdot r \cdot \max_{z \in \Gamma_r(0)} |f(z)|.$$

Also:

$$\begin{aligned} & \lim_{r \rightarrow \infty} \pi \cdot r \cdot \max_{z \in \Gamma_r(0)} |f(z)| \\ &= \pi \lim_{r \rightarrow \infty} \max_{z \in \Gamma_r(0)} \underbrace{|z| \cdot |f(z)|}_{\rightarrow 0 \text{ nach Vor.}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Nach dem Residuensatz gilt:

$$2\pi i \sum_{z_0 \in \mathcal{H}} \operatorname{Res}(f, z_0) = \int_{\Gamma_r(0)} f(z) dz + \int_{-r}^r f(x) dx .$$

Also für $r \rightarrow \infty$:

$$2\pi i \sum_{z_0 \in \mathcal{H}} \operatorname{Res}(f, z_0) \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx .$$

■

Korollar: Ist

$$f(z) = \frac{\sum_{i=0}^m a_i z^i}{\sum_{j=0}^n b_j z^j}$$

mit $b_n \neq 0$ und $n \geq m + 2$ (Zählergrad $+2 \leq$ Nennergrad) und hat der Nenner keine reelle Nullstelle, so existiert das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{z_0 \in \mathcal{H}} \operatorname{Res}(f, z_0) .$$

Beweis:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^{n-m} f(z) = \frac{a_m}{b_n} .$$

Da $n - m \geq 2$, existiert $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ und weiterhin sind die Voraussetzungen von Satz 6 erfüllt.

■

Beispiel:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx \\ &= \frac{2\pi i}{2} \sum_{z_0 \in \mathcal{H}} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^4 + 1}, z_0\right) . \end{aligned}$$

Singularitäten von $\frac{1}{z^4 + 1}$ in $\mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} e^{\frac{\pi}{4}i} &= \frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i) =: z_1 , \\ e^{\frac{3\pi}{4}i} &= \frac{1}{2}\sqrt{2}(-1+i) =: z_2 . \end{aligned}$$

z_1, z_2 sind Pole 1. Ordnung. Also:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^4 + 1}, z_j\right) &= \lim_{z \rightarrow z_j} \frac{z - z_j}{z^4 + 1} \\ &\stackrel{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{z \rightarrow z_j} \frac{1}{4z^3} \\ &= \frac{1}{4z_j^3} . \end{aligned}$$

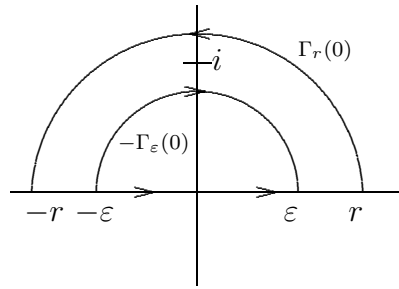
Also:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx = \pi i \left(\frac{1}{4e^{\frac{3\pi i}{4}}} + \frac{1}{4e^{\frac{9\pi i}{4}}} \right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

Beispiel: Behauptung:

$$\int_0^{\infty} \frac{(\ln(x))^2}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi^3}{8}.$$

Beweis: Wähle folgenden Weg γ :



Nach dem Residuensatz gilt (i Pol 1. Ordnung):

$$\int_{\gamma} \frac{(\text{Log}(z))^2}{z^2 + 1} dz = 2\pi i \underbrace{\text{Res} \left(\frac{(\text{Log}(z))^2}{z^2 + 1}, i \right)}_{= -\frac{\pi^2}{8i}} = -\frac{\pi^3}{4}.$$

Daher gilt:

$$\begin{aligned} -\frac{\pi^3}{4} &= \int_{-r}^{-\varepsilon} \frac{(\text{Log}(x))^2}{x^2 + 1} dx + \int_{-\Gamma_{\varepsilon}(0)} \frac{(\text{Log}(z))^2}{z^2 + 1} dz \\ &\quad + \int_{\varepsilon}^r \frac{(\ln(x))^2}{x^2 + 1} dx + \int_{\Gamma_r(0)} \frac{(\text{Log}(z))^2}{z^2 + 1} dz. \end{aligned}$$

Im ersten Term substituiere $u := -x \implies dx = -du$ und daraus folgt dann $\text{Log}(x) = \text{Log}(-1) + \text{Log}(u) = \pi i + \text{Log}(u)$. Es ergibt sich für den ersten Term:

$$\int_{-r}^{-\varepsilon} \frac{(\text{Log}(x))^2}{x^2 + 1} dx = \int_{\varepsilon}^r \frac{(\text{Log}(u) + \pi i)^2}{u^2 + 1} du = \int_{\varepsilon}^r \frac{(\ln(u))^2 + 2\pi i \ln(u) - \pi^2}{u^2 + 1} du.$$

Also damit:

$$\begin{aligned} -\frac{\pi^3}{4} &= 2 \cdot \int_{\varepsilon}^r \frac{(\ln(x))^2}{x^2 + 1} dx + 2\pi i \int_{\varepsilon}^r \frac{\ln(x)}{x^2 + 1} dx \\ &\quad - \pi^2 \int_{\varepsilon}^r \frac{1}{u^2 + 1} du + \int_{-\Gamma_{\varepsilon}(0)} \frac{(\text{Log}(z))^2}{z^2 + 1} dz + \int_{\Gamma_r(0)} \frac{(\text{Log}(z))^2}{z^2 + 1} dz. \end{aligned}$$

Wir betrachten die Terme in der zweiten Zeile:

- Der erste (mit dem Vorfaktor π^2) hat als Stammfunktion den $\arctan$. Für $\varepsilon \rightarrow 0$ und $r \rightarrow \infty$ ergibt sich für dieses Integral (ohne Vorfaktor) $\frac{\pi}{2}$.
- Sei nun z auf der Kurve $-\Gamma_\varepsilon(0)$: $z = e^{-it} \cdot \varepsilon$. Dann gilt für den Logarithmus: $(\text{Log}(z))^2 = (\ln(\varepsilon) - it)^2$. Also:

$$\begin{aligned} \left| \frac{(\text{Log}(z))^2}{z^2 + 1} \right| &= \frac{|\ln(\varepsilon) - it|^2}{|z^2 + 1|} \\ &\leq \frac{(|\ln(\varepsilon)| + |it|)^2}{|z^2 + 1|} = \frac{|\ln(\varepsilon)|^2 + 2|t||\ln(\varepsilon)| + t^2}{|z^2 + 1|} \\ &\stackrel{-\pi \leq t \leq 0}{\leq} \frac{|\ln(\varepsilon)|^2 + \pi^2 + 2\pi|\ln(\varepsilon)|}{1 - \varepsilon^2}. \end{aligned}$$

Daher:

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\Gamma_\varepsilon(0)} \frac{(\text{Log}(z))^2}{z^2 + 1} dz \right| &\leq \pi \cdot \varepsilon \cdot \max_{z \in -\Gamma_\varepsilon(0)} \left| \frac{(\text{Log}(z))^2}{z^2 + 1} \right| \\ &\leq \pi \cdot \varepsilon \cdot \frac{|\ln(\varepsilon)|^2 + \pi^2 + 2\pi|\ln(\varepsilon)|}{1 - \varepsilon^2}. \end{aligned}$$

Für den Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ müssen wir das Verhalten von $\varepsilon \cdot (\ln(\varepsilon))^2$ und $\varepsilon \cdot \ln(\varepsilon)$ untersuchen: Nach l'Hospital gilt für den ersten Ausdruck:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(\ln(\varepsilon))^2}{\frac{1}{\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2\ln(\varepsilon)\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} = -2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(\varepsilon)}{\frac{1}{\varepsilon}}.$$

Es ergibt sich also (bis auf einen Faktor) der zweite Ausdruck und hierfür gilt (wiederum nach l'Hospital):

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(\varepsilon)}{\frac{1}{\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-\varepsilon) = 0.$$

Damit also:

$$\left| \int_{-\Gamma_\varepsilon(0)} \frac{(\text{Log}(z))^2}{z^2 + 1} dz \right| = 0 \quad \text{für} \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

- Wenn z auf der Kurve $\Gamma_r(0)$ liegt, also $z = r \cdot e^{it}$, so ergibt sich analog zu $-\Gamma_\varepsilon(0)$:

$$\left| \int_{\Gamma_r(0)} \frac{(\text{Log}(z))^2}{z^2 + 1} dz \right| \leq \pi \cdot \frac{|\ln(r)|^2 + \pi^2 + 2\pi|\ln(r)|}{r - \frac{1}{r}}.$$

Mittels l'Hospital ergibt sich für den Grenzübergang $r \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{(\ln(r))^2}{r - \frac{1}{r}} &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{2\ln(r)\frac{1}{r}}{1 + \frac{1}{r^2}} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{2\ln(r)}{r + \frac{1}{r}}, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln(r)}{r \pm \frac{1}{r}} &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{r}}{1 \mp \frac{1}{r^2}} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r}{r^2 \mp 1} = 0. \end{aligned}$$

Also:

$$\left| \int_{\Gamma_r(0)} \frac{(\text{Log}(z))^2}{z^2 + 1} dz \right| = 0 \quad \text{für} \quad r \rightarrow \infty.$$

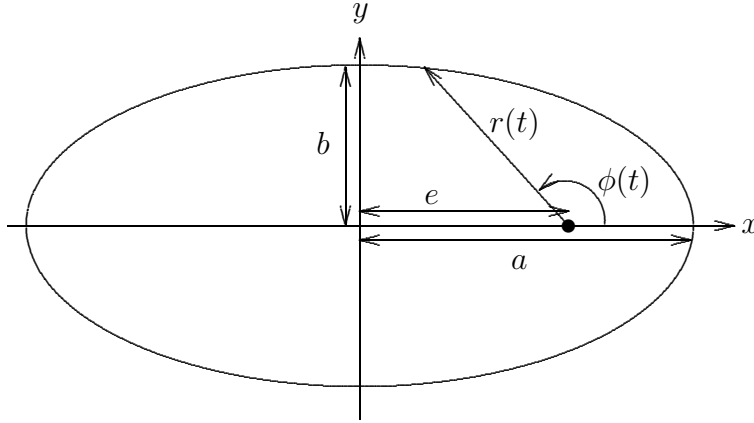


Abbildung 6.4: Ellipse

Nachdem also alle Terme der zweiten Zeile analysiert sind, ergibt sich:

$$\underbrace{\int_0^{\infty} \frac{(\ln(x))^2}{x^2+1} dx}_{\in \mathbb{R}} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\pi^3}{4} - 2\pi i \int_0^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^2+1} dx + \frac{\pi^3}{2} \right).$$

Da die linke Seite der Gleichung reell ist, muß das rechte Integral Null sein. Also:

$$\int_0^{\infty} \frac{(\ln(x))^2}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \left(-\frac{\pi^3}{4} + \frac{\pi^3}{2} \right) = \frac{\pi^3}{8}.$$

■

Bemerkung: Eine Ellipse wird durch die Mittelpunktsleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

beschrieben. Für die lineare Exzentrizität gilt:

$$e := \sqrt{a^2 - b^2} < a. \quad (6.7)$$

Wir wollen eine Brennpunktgleichung $r(\phi)$ bestimmen, wobei r und ϕ wie in Abbildung 6.4 eingezeichnet liegen. Es gilt dann:

$$x = e + r(\phi) \cos(\phi), \quad y = r(\phi) \sin(\phi).$$

Eingesetzt in die Mittelpunktsleichung ergibt sich unter Benutzung von (6.7) und $\cos^2 + \sin^2 = 1$ nach längerer Rechnung ($r = r(\phi)$) und den folgenden Definitionen:

$$p := \frac{b^2}{a}, \quad \varepsilon := \frac{e}{a} < 1 \quad \text{numerische Exzentrizität}$$

folgende Gleichung:

$$r^2 + 2 \frac{\varepsilon p \cos(\phi)}{-\varepsilon^2 \cos^2(\phi) + 1} \cdot r - \frac{p^2}{-\varepsilon^2 \cos^2(\phi) + 1} = 0.$$

Mittels pq -Formel erhält man dann nach etwas Rechnung:

$$r(\phi) = p \cdot \frac{-\varepsilon \cos(\phi) \pm 1}{1 - \varepsilon^2 \cos^2(\phi)} = \pm \frac{p}{1 \pm \varepsilon \cos(\phi)}.$$

Also erhält man als Brennpunktgleichung einer Ellipse (auch Polargleichung oder Parametergleichung genannt):

$$r(\phi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\phi)} \quad \text{mit } \varepsilon < 1 \quad (0 \leq \phi \leq 2\pi). \quad (6.8)$$

Mit $\alpha := \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} > 1$ gilt:

$$r(\phi) = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \frac{1}{\alpha + \cos(\phi)}.$$

Da für den Flächeninhalt bekannterweise¹

$$F = \frac{1}{2} \int_{\phi_0}^{\phi_1} r^2(\phi) d\phi$$

gilt, müssen wir im wesentlichen

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\alpha + \cos(\phi)} \right)^2 d\phi$$

berechnen. Dies geht analog dem Beispiel zu Satz 5: Das Integral ist gleich

$$8\pi \operatorname{Res} \left(\frac{z}{(z^2 + 1 + 2\alpha z)^2}, -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1} \right).$$

Fürs Residuum erhält man nach endlich langer Zeit

$$\frac{\alpha}{4\sqrt{\alpha^2 - 1}^3}.$$

Damit erhält man nun insgesamt:

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} \cdot \frac{b^4}{a^2 - b^2} \cdot 8\pi \cdot \frac{\alpha}{4\sqrt{\alpha^2 - 1}^3} \\ &= \pi \cdot \frac{b^4}{a^2 - b^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{a^2 - b^2} - 1}^3} \\ &= \pi \cdot \frac{b^4}{a^2 - b^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - b^2}^3}{b^3} \\ &= \pi ab. \end{aligned}$$

Also: Der Flächeninhalt einer Ellipse beträgt πab . ■

¹falls es nicht mehr bekannt ist: s. Analysis III, 16.12.

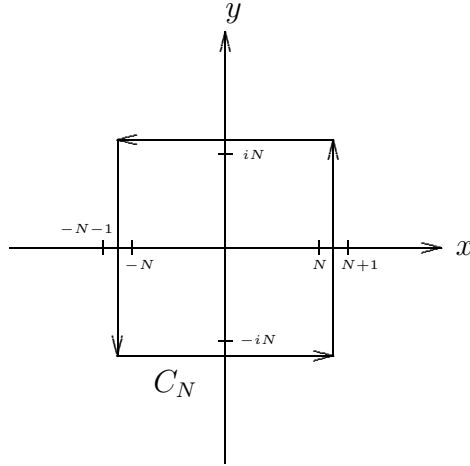
Satz 7: Die Funktion f sei bis auf endlich viele Singularitäten, die nicht in $\mathbb{Z}$ liegen, auf $\mathbb{C}$ analytisch. Es gelte:

$$\exists s > 1, R, M > 0 : |f(z)| \leq \frac{M}{|z|^s},$$

falls $|z| > R$. Dann konvergiert

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N f(n) =: \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = - \sum_{\substack{z_0 \text{ Singula-} \\ \text{rität von } f}} \text{Res}(\pi \cdot \cot(\pi z) \cdot f(z), z_0).$$

Beweis: Die Reihe konvergiert absolut nach dem Integralkriterium.



C_N : Quadrat mit Ecken $(N + \frac{1}{2})(\pm 1 \pm i)$;
Auf C_N ist $\cot(\pi z)$ beschränkt durch eine von N unabhängige Schranke:
 $P = \coth\left(\frac{\pi}{2}\right)$ (siehe hierzu **Spiegel**, S. 188 (Outline Series, Schamm's Aufgaben und Überblicke, Complex Variables)).

$$\cot(\pi z) = i \frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}.$$

Die Singularitäten sind genau die ganzen Zahlen. Also für $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \text{Res}(\pi \cot(\pi z) f(z), k) &= \lim_{z \rightarrow k} \frac{(z - k) \pi \cos(\pi z) f(z)}{\sin(\pi z)} \\ &= \lim_{z \rightarrow k} \frac{\pi(z - k)}{\sin(\pi z)} \cdot \cos(\pi z) f(z) \\ &\stackrel{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{z \rightarrow k} \frac{\pi}{\pi \cos(\pi z)} \cos(\pi z) f(z) \\ &= f(k). \end{aligned}$$

Also:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_N} \pi \cdot \cot(\pi z) \cdot f(z) dz = \sum_{n=-N}^N f(n) + \sum_{\substack{z_0 \text{ Singula-} \\ \text{rität von } f}} \text{Res}(\pi \cdot \cot(\pi z) \cdot f(z), z_0).$$

Für hinreichend großes N (so daß $|z| > R$) ist das Integral Null:

$$\left| \int_{C_N} \pi \cdot \cot(\pi z) \cdot f(z) dz \right| \leq 8 \cdot \left(N + \frac{1}{2}\right) \pi P \frac{M}{(N + \frac{1}{2})^s} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Dies war zu zeigen. ■

Beispiel:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Also: $f(z) = \frac{1}{z^2 + a^2}$. Die Singularitäten sind ai und $-ai$, Pole 1. Ordnung. Für die Residuen gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left(\frac{\pi \cdot \cot(\pi z)}{z^2 + a^2}, ai\right) &= \frac{\pi \cdot \cot(\pi ai)}{2ai} = -\frac{\pi}{2a} \coth(\pi a) \\ &= \operatorname{Res}\left(\frac{\pi \cdot \cot(\pi z)}{z^2 + a^2}, -ai\right). \end{aligned}$$

Die Konvergenzvoraussetzungen über f sind mit $R = |a|\sqrt{2}$, $M = 2$, $s = 2$ erfüllt:

$$\frac{1}{|a^2 + z^2|} \leq \frac{1}{||z|^2 - |a|^2|} \stackrel{\text{falls } |a| \leq \frac{|z|}{\sqrt{2}}}{\leq} \frac{2}{|z|^2}.$$

Also nach Satz 7:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{a} \coth(\pi a).$$

Mittels der Aufspaltung

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} + \frac{1}{a^2} + \sum_{-\infty}^{-1} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{1}{a^2} + 2 \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}$$

erhält man also:

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = -\frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{2a} \coth(\pi a).$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \lim_{a \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{2a} \coth(\pi a) \right) \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\pi a \coth(\pi a) - 1}{2a^2} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\pi a \cosh(\pi a) - \sinh(\pi a)}{2a^2 \sinh(\pi a)} \\ &\stackrel{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\pi^2 a \sinh(\pi a)}{4a \sinh(\pi a) + 2a^2 \pi \cosh(\pi a)} \\ &\stackrel{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\pi^3 \cosh(\pi a)}{6\pi \cosh(\pi a) + 2\pi^2 a \sinh(\pi a)} \\ &= \frac{\pi^3}{6\pi}. \end{aligned}$$

Also erhält man das Ergebnis²:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Weitere Methoden des Residuenkalküls findet man z. B. im **Jänich**, Analysis. (Genauere Empfehlung dieses Buches im Anhang D.)

²vgl. Analysis I, 6.4.

6.2 Meromorphie

Definition: Eine *meromorphe Funktion* auf dem Gebiet $E \subseteq \mathbb{C}$ ist eine evtl. bis auf Pole auf E analytische Funktion (die Menge der Polstellen ist natürlich diskret (falls nicht sowieso leer), da ja Pole isolierte Singularitäten).

Bemerkung: Aus Zeitgründen können wir kaum nähere Aussagen zu meromorphen Funktionen machen. Zum Beispiel muß so der Satz von Mittag-Leffler wegfallen. Wir geben nun ein paar Beispiele zu meromorphen Funktionen an, treffen ein paar interessante Aussagen (um sie wenigstens zu kennen) und beweisen noch einen Satz.

Beweise zu den folgenden Aussagen findet man im **Remmert 1**, Seite 248; **Remmert 2**, Seite 67. Ich werde im Anhang C auch einige Beweise darstellen.

Beispiele:

- $\frac{1}{\sin(\frac{1}{z})}$ ist auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ meromorph mit unendlich vielen Polen (da bei 0 nicht-isolierte Singularität). Es kann somit unendlich viele Pole geben, die sich gegen Randpunkte von E häufen können. Es kann aber höchstens abzählbar viele Pole geben.
- $\cot(z)$ auf $\mathbb{C}$.
- $\frac{p(z)}{q(z)}$ auf $\mathbb{C}$ mit p, q Polynome in z , $q \not\equiv 0$ hat nur endlich viele Pole.

Sei f, g analytisch auf E (dann natürlich f, g meromorph auf E), $g \not\equiv 0$. Dann ist $\frac{f}{g}$ meromorph auf E .

Die meromorphen Funktionen auf E bilden einen Körper: $\mathcal{M}(E)$.

Die auf E analytischen Funktionen bilden einen nullteilerfreien Unterring von $\mathcal{M}(E)$.

Jede meromorphe Funktion ist Quotient von zwei analytischen Funktionen.

Falls $\tilde{f} : E \setminus \{\text{Pole}\} \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch, so kann man für die Pole p die Werte $\tilde{f}(p) := \infty$ definieren und erhält damit eine Funktion $f : E \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ als stetige Fortsetzung von $\tilde{f}$.

Satz 8: Die auf $\hat{\mathbb{C}}$ meromorphen Funktionen sind genau die rationalen $\frac{p(z)}{q(z)}$ mit Polynomen $p, q \not\equiv 0$.

Beweis: Sei eine rationale Funktion gegeben. Sie ist bis auf maximal nennergrad-viele Pole in $\mathbb{C}$ analytisch. Bei der Betrachtung von ‚Zählergrad - Nennergrad‘ erkennt man, daß bei ∞ eine Nullstelle oder eine hebbare Singularität mit Wert $\neq 0$ oder ein Pol vorliegt. Also ist diese Funktion auf $\hat{\mathbb{C}}$ meromorph.

Sei umgekehrt f auf $\hat{\mathbb{C}}$ meromorph. Dann hat f auf $\hat{\mathbb{C}}$ nur endlich viele Pole, denn $\hat{\mathbb{C}}$ ist kompakt.³ $z_1, \dots, z_n$ seien die Pole von f in $\mathbb{C}$ mit Ordnungen $k_1, \dots, k_n$.

$$h(z) := (z - z_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (z - z_n)^{k_n} \cdot f(z)$$

ist daher analytisch auf $\mathbb{C}$ und hat bei ∞ eine hebbare Singularität oder einen Pol. Daher ist $h(z)$ konstant oder ein Polynom $p(z)$ (siehe Anhänge A und B, Seiten 86, 115). Also:

$$p(z) := h(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j \quad \text{auf } \mathbb{C}$$

und daher

$$f(z) = \frac{p(z)}{(z - z_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (z - z_n)^{k_n}}.$$

■

³Auf einer kompakten Menge können nur endlich viele isolierte Singularitäten existieren. Ann.: Es gäbe unendlich viele.

Dann lege um jede eine Umgebung, die nur diese Singularität enthält. Mit der offenen Menge $K \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} \left(\overline{U_{\frac{\delta_j}{2}}(z_j)} \right)$

zusammen sind die Umgebungen der Singularitäten eine offene Überdeckung von K . Da K kompakt, reichen also endlich viele Umgebungen aus, um K zu überdecken; daher verteilen sich unendlich viele Singularitäten auf endlich viele Umgebungen. Dies steht im Widerspruch dazu, daß die Singularitäten isoliert sind. Also können nur endlich viele Singularitäten in K existieren.

$\hat{\mathbb{C}}$ kompakt: vgl. Analysis III, 12.19; Aufgabe 187).

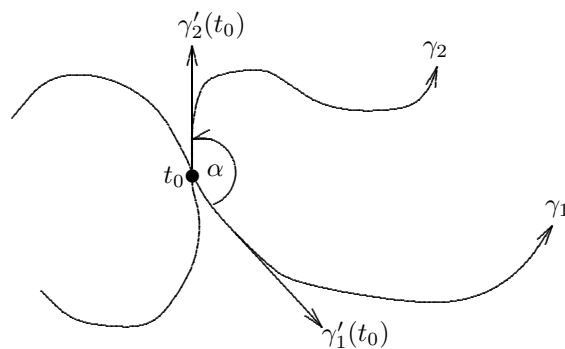
7. Konforme Abbildungen

Bemerkung: Die beiden folgenden Kapitel sind aus Zeitgründen sehr kurz; für die Beweise wird auf Literatur verwiesen. Insbesondere im Kapitel 8 konnte aus Zeitgründen der eigentliche theoretische Inhalt nur noch an Beispielen demonstriert werden.

$\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ sei differenzierbar bei t_0 mit $\gamma'(t_0) \neq 0$. Dann repräsentiert $\gamma'(t_0)$ den Tangentenvektor an γ im Punkt $\gamma(t_0)$ im Sinne der reellen Analysis.

Falls $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$ und $\gamma'_1(t_1) \neq 0 \neq \gamma'_2(t_2)$, dann ist der orientierte Winkel α zwischen γ_1 und γ_2 in diesem Schnittpunkt:

$$\alpha = \text{Arg}(\gamma'_2(t_2)) - \text{Arg}(\gamma'_1(t_1)) \quad (\text{evtl. } \pm 2\pi) .$$



Sei f analytisch auf einem Gebiet, das γ_1 und γ_2 enthält. Den Winkel zwischen $f \circ \gamma_1$ und $f \circ \gamma_2$ in $f(\underbrace{\gamma_1(t_1)}_{:=z_0}) = f(\underbrace{\gamma_2(t_2)}_{:=z_0})$ erhält man mittels folgender Überlegungen:

$$\begin{aligned} (f \circ \gamma_1)'(t_1) &= f'(z_0) \cdot \gamma'_1(t_1) , \\ (f \circ \gamma_2)'(t_2) &= f'(z_0) \cdot \gamma'_2(t_2) . \end{aligned}$$

Wenn $f'(z_0) \neq 0$, gilt für den Winkel:

$$\begin{aligned} & \text{Arg}(f'(z_0) \cdot \gamma'_2(t_2)) - \text{Arg}(f'(z_0) \cdot \gamma'_1(t_1)) \\ &= \text{Arg}(f'(z_0)) + \text{Arg}(\gamma'_2(t_2)) - (\text{Arg}(f'(z_0)) + \text{Arg}(\gamma'_1(t_1))) \\ &= \text{Arg}(\gamma'_2(t_2)) - \text{Arg}(\gamma'_1(t_1)) \\ &= \text{Winkel zwischen } \gamma_1 \text{ und } \gamma_2 \text{ in } z_0 . \end{aligned}$$

Definition: Eine *lokal konforme Abbildung* $E \longrightarrow \mathbb{C}$ ist charakterisiert durch stetige totale Differenzierbarkeit im reellen Sinne und Erhaltung orientierter Winkel im obigen Sinne.

Satz 1: Analytische Funktionen f sind in allen ihren Punkten lokal konform, in denen die Ableitung $\neq 0$ ist (s. o.: dann können Tangentenvektoren definiert werden; vgl. die folgende Bemerkung). Nach dem lokalen Umkehrsatz¹ bedeutet dies, daß diese Funktionen dort *lokal biholomorph* (bzw. *lokal bianalytisch*) sind. *Lokal biholomorph* bedeutet, daß eine Umgebung U existiert, so daß die Umkehrfunktion auf $f(U)$ existiert und dort auch analytisch ist.

Bemerkung: Solche Funktionen sehen in infinitesimal kleinen Bereichen aus wie eine Drehstreckung, da $f(z) \approx f'(a)(z - a)$ gilt mit $f'(a) \in \mathbb{C}^*$. Daher ist diese Aussage auch anschaulich klar, da die Drehstreckung die anhand der Tangentenvektoren meßbaren Winkel nicht ändert.

Definition: Eine bijektive und lokal konforme Abbildung f nennt man *konform*².

Orientierungserhaltende, konforme Funktionen sind *biholomorph* (bzw. *bianalytisch*). Das bedeutet, daß eine solche konforme Funktion auch analytisch ist und die Umkehrfunktion auf dem gesamten Wertebereich existiert und ebenfalls analytisch ist³.

Beispiel: $f(z) = z^2$ ist auf $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ konform (vgl. für das folgende: Abbildung 7.1). Es gilt $w = z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$. Daher:

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy.$$

Daran erkennt man:

- Die x -Achse geht in die positive u -Achse über.
- Die y -Achse geht in die negative u -Achse über.
- Urbild von $u = c = x^2 - y^2$: Hyperbeln mit rechtwinklig aufeinanderstehenden Asymptoten, den Winkelhalbierenden.
- Urbild von $v = c = 2xy$: Hyperbeln mit rechtwinklig aufeinanderstehenden Asymptoten, den Achsen.
- $y = a = \text{const.}$: $v^2 = 4(u + a^2)a^2$ (nach rechts geöffnete Parabel).
- $x = a = \text{const.}$: $v^2 = 4(-u + a^2)a^2$ (nach links geöffnete Parabel).

Insbesondere gilt (aus dem ersten und dem vorletzten Punkt folgend):

$\overset{\circ}{\mathbb{H}} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ wird durch f injektiv auf $\mathbb{C} \setminus \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$ abgebildet: $f|_{\overset{\circ}{\mathbb{H}}}^{\circ}$ ist injektiv, weil folgendes gilt: $z \in \overset{\circ}{\mathbb{H}} \Rightarrow -z \notin \overset{\circ}{\mathbb{H}}$.

Beispiel:

$$f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad \text{auf} \quad \mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathbb{C}^*.$$

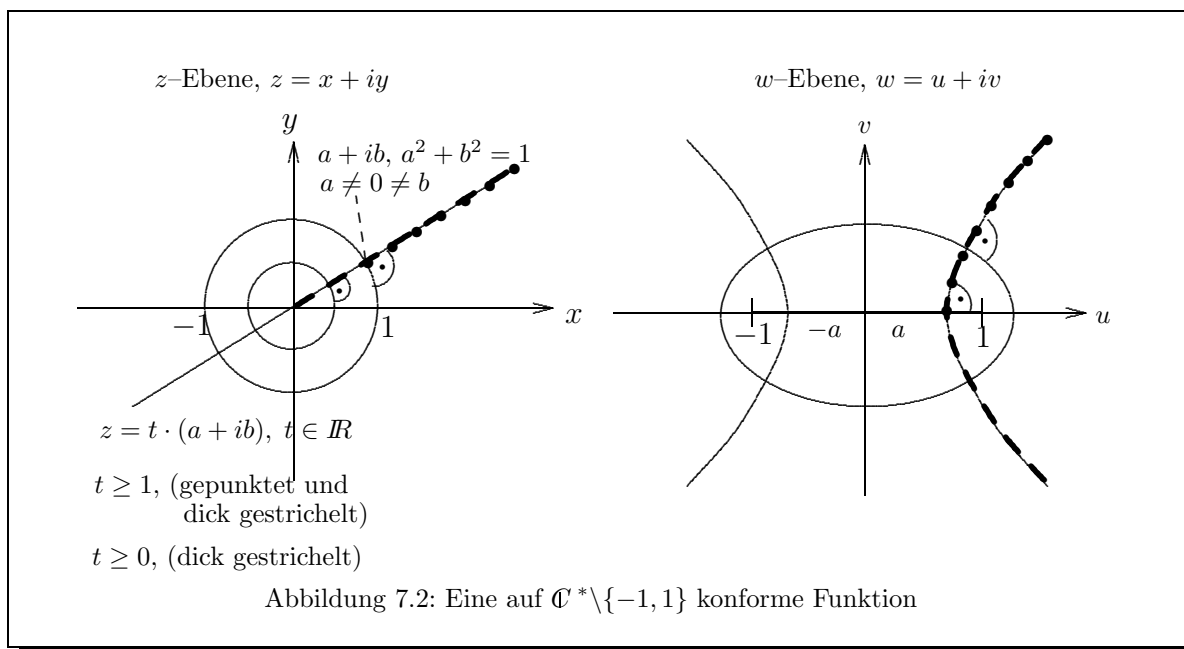
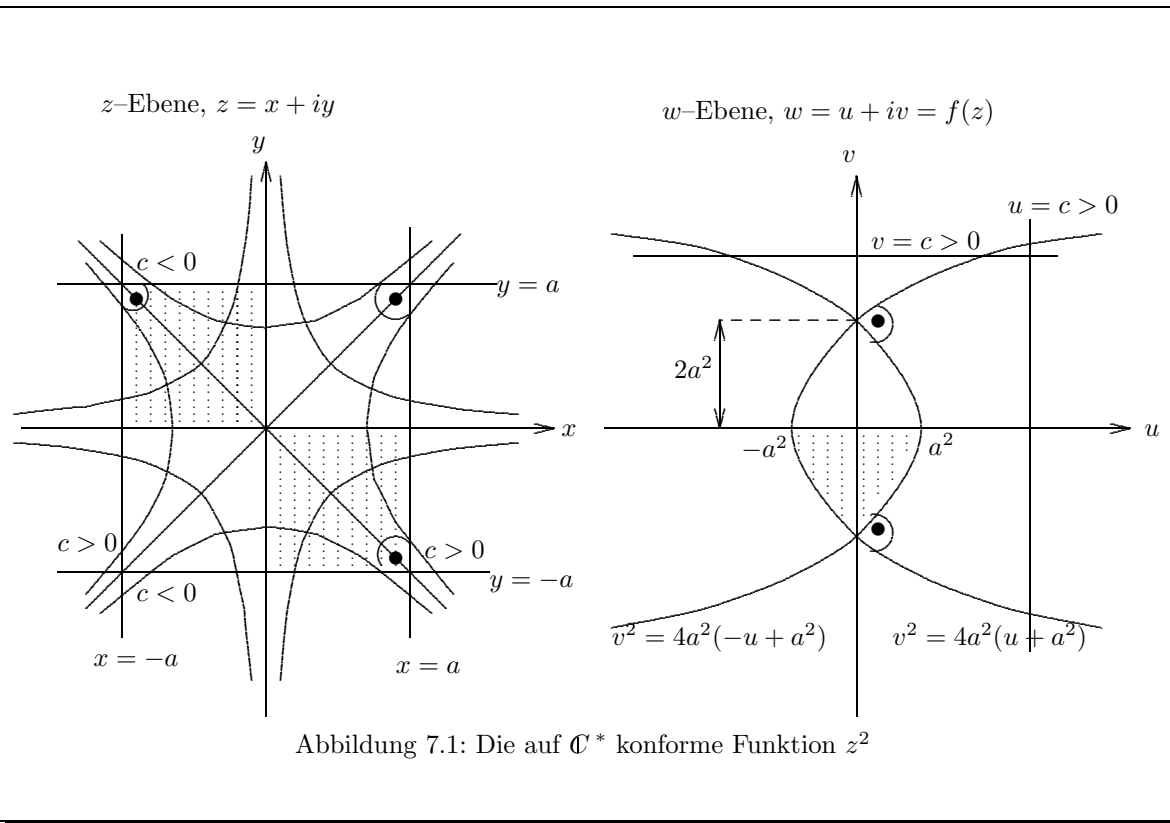
$$f'(z) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{z^2} \right) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z = 1, \quad z = -1.$$

Also ist f auf $\mathbb{C}^* \setminus \{-1, 1\}$ konform.

¹vgl. Analysis III, 15.4.

²Zu diesem Begriff findet man auch Aussagen in Elem. Diffgeo, 4.9, 4.11, Aufgabe 52 und Diffgeo II, 14.10. Beachte, daß der dortige Begriff der Konformität die Orientierungserhaltung nicht einschließt. Im folgenden betone ich dies auch in den Formulierungen von Prof. Armbrust.

³Diese Aussagen ergeben sich formal vollständig aus der Bijektivität konformer Funktionen und den zitierten Stellen aus der letzten Fußnote; anschaulich aus der obigen Bemerkung.



Zur näheren Betrachtung sei

$$z = x + iy, \quad r := |z|, \quad \xi := \frac{x}{r}, \quad \eta := \frac{y}{r}.$$

Dann gilt $\xi^2 + \eta^2 = 1$ und

$$\begin{aligned} u = \operatorname{Re}(f(z)) &= \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \xi, \\ v = \operatorname{Im}(f(z)) &= \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \eta. \end{aligned}$$

Für $r = 1$: $f(z) \in [-1, 1]$.

Für $r \neq 1$: Aus $\xi^2 + \eta^2 = 1$ folgt dann:

$$\frac{u^2}{\left(\frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right)\right)^2} + \frac{v^2}{\left(\frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right)\right)^2} = 1.$$

Für $r = \frac{1}{2}$ ergibt sich hieraus speziell eine Ellipse mit den Halbachsen $\frac{5}{4}$, $\frac{3}{4}$ und den Brennpunkten in $(1, 0)$ und $(-1, 0)$ (vgl. mit Abbildung 7.2).

Sei nun $a^2 + b^2 = 1$, $a \neq 0$, $b \neq 0$. Dann gilt für die Gerade durch $(0, 0)$ und (a, b) (vgl. erneut mit Abbildung 7.2):

$$r = |t|, \quad \xi = \frac{t \cdot a}{|t|}, \quad \eta = \frac{t \cdot b}{|t|}.$$

Da

$$\begin{aligned} \frac{u^2}{\xi^2} - \frac{v^2}{\eta^2} &= \frac{1}{4} \left(\left(r + \frac{1}{r} \right)^2 - \left(r - \frac{1}{r} \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(r^2 + 2 + \frac{1}{r^2} - r^2 + 2 - \frac{1}{r^2} \right) \\ &= 1, \end{aligned}$$

gilt:

$$\frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} = 1,$$

es ergeben sich also Hyperbeln.

Weiterhin ergibt sich bei Untersuchung der Funktion:

$$\begin{aligned} \text{positive } x\text{-Achse} &\xrightarrow{f} s \cdot (1, 0), \quad s \geq 1; \\ \text{negative } x\text{-Achse} &\xrightarrow{f} s \cdot (-1, 0), \quad s \geq 1. \end{aligned}$$

Riemann'scher Abbildungssatz: Jedes einfach zusammenhängende Gebiet in $\mathbb{C}$ außer $\mathbb{C}$ selbst kann biholomorph bzw. orientierungserhaltend konform (d. h. bijektiv und in beiden Richtungen analytisch) auf $U_1(0)$ abgebildet werden.

Beweis: siehe **Remmert 2**, S. 152.

Beispiel: Sei

$$f(z) = w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$$

eine Möbiustransformation. Sie bildet ab von $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$. Es gilt:

$$f'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \neq 0.$$

Betrachte speziell die *Cayley-Abbildung*:

$$f(z) = \frac{z - i}{z + i} \quad (a = c = 1, \quad b = -i, \quad d = i).$$

Es gilt:

$$f : \overbrace{\mathbb{C} \setminus \{-i\}}^{\circ \mathbb{H}} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{1\}$$

und

$$f^{-1}(w) = i \cdot \frac{1 + w}{1 - w}.$$

Um die Frage zu beantworten, ob f die obere Halbebene $\circ \mathbb{H}$ auf $U_1(0)$ abbildet, betrachten wir für $z \neq -i$:

$$\begin{aligned} 1 - |f(z)|^2 &= 1 - \frac{z - i}{z + i} \cdot \frac{\bar{z} + i}{\bar{z} - i} \\ &= 1 - \frac{|z|^2 - 2\operatorname{Im}(z) + 1}{|z|^2 + 2\operatorname{Im}(z) + 1} \\ &= \frac{4\operatorname{Im}(z)}{|z|^2 + 2\operatorname{Im}(z) + 1} > 0, \quad \text{falls } \operatorname{Im}(z) > 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt: $|f(z)| < 1$ für $z \in \circ \mathbb{H}$. Also bildet f in der Tat die obere Halbebene auf $U_1(0)$ ab.

Sei nun $w \neq 1$: Dann

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(f^{-1}(w)) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1 + w}{1 - w} + \frac{1 + \bar{w}}{1 - \bar{w}} \right) \\ &= \frac{1 - |w|^2}{|1 - w|^2} > 0, \quad \text{falls } |w| < 1. \end{aligned}$$

Daraus folgt: $f^{-1}(w) \in \circ \mathbb{H}$ für $w \in U_1(0)$. Also bildet umgekehrt f^{-1} die Umgebung $U_1(0)$ auf die obere Halbebene ab.

Mittels der Funktion $()^2 \circ f^{-1}$ kann man nun zum Beispiel $U_1(0)$ auf das geschlitzte Gebiet $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ abbilden (vgl. für die Funktion $()^2$ das Beispiel auf S. 70):

$$\begin{aligned} ()^2 \circ f^{-1} : \quad U_1(0) &\longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} \\ w &\longmapsto (f^{-1}(w))^2. \end{aligned}$$

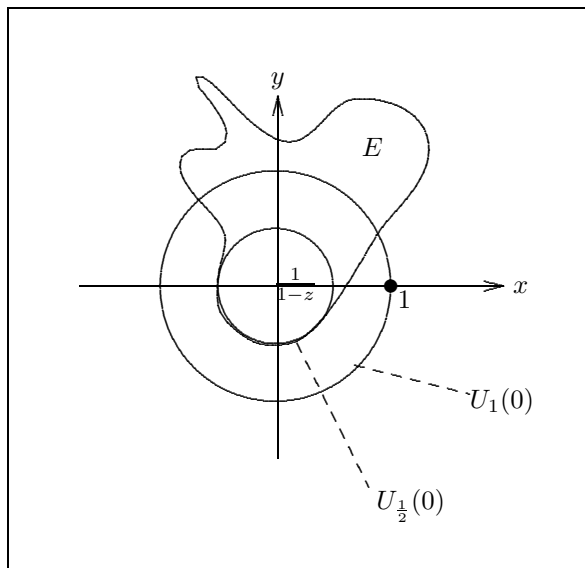
8. Analytische Fortsetzung

Eine Potenzreihe um z_0 stellt f in einer gewissen Umgebung von z_0 dar. Das größte R , so daß diese Reihe auf $U_R(z_0)$ konvergiert und die Funktion f darstellt, ist der Abstand von z_0 zum nächsten Punkt, in dem f nicht analytisch ist.

Beispiel 1: Die Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

auf $U_{\frac{1}{2}}(0)$. Der Konvergenzradius dieser Reihe ist 1. Die analytische Fortsetzung von f auf $U_1(0)$, ist $f_1(z) := \frac{1}{1-z}$. Diese Funktion ist analytisch auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Also kann f nicht auf ein Gebiet analytisch fortgesetzt werden, das $(1, 0)$ enthält (Eindeutigkeitssatz):



Falls

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(z + \frac{1}{2} \right)^n$$

Darstellung von $f_1(z) = \frac{1}{1-z}$ in einer Umgebung von $-\frac{1}{2}$, so muß diese Reihe den Konvergenzradius $\frac{3}{2} = 1 - (-\frac{1}{2})$ haben. Um f_2 explizit angeben zu können, müssen wir natürlich noch die b_n bestimmen. Diese werden wie üblich über

$$b_n = \frac{f^{(n)}\left(-\frac{1}{2}\right)}{n!} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

berechnet, wobei die n -ten Ableitungen aus den Ableitungen von $\frac{1}{1-z}$ ermittelt werden:

$$f^{(n)}(z) = n! \frac{1}{(1-z)^{n+1}} .$$

Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \left(z + \frac{1}{2}\right)^n$$

setzt also f über den Rand von $U_1(0)$ hinaus fort. Man nennt das eben durchgeführte Verfahren das *Kreiskettenverfahren*.

Mittels folgender Zeichnung soll nochmal die Funktionsweise dieses Verfahrens zur analytischen Fortsetzung längs eines Weges γ suggestiv illustriert werden:

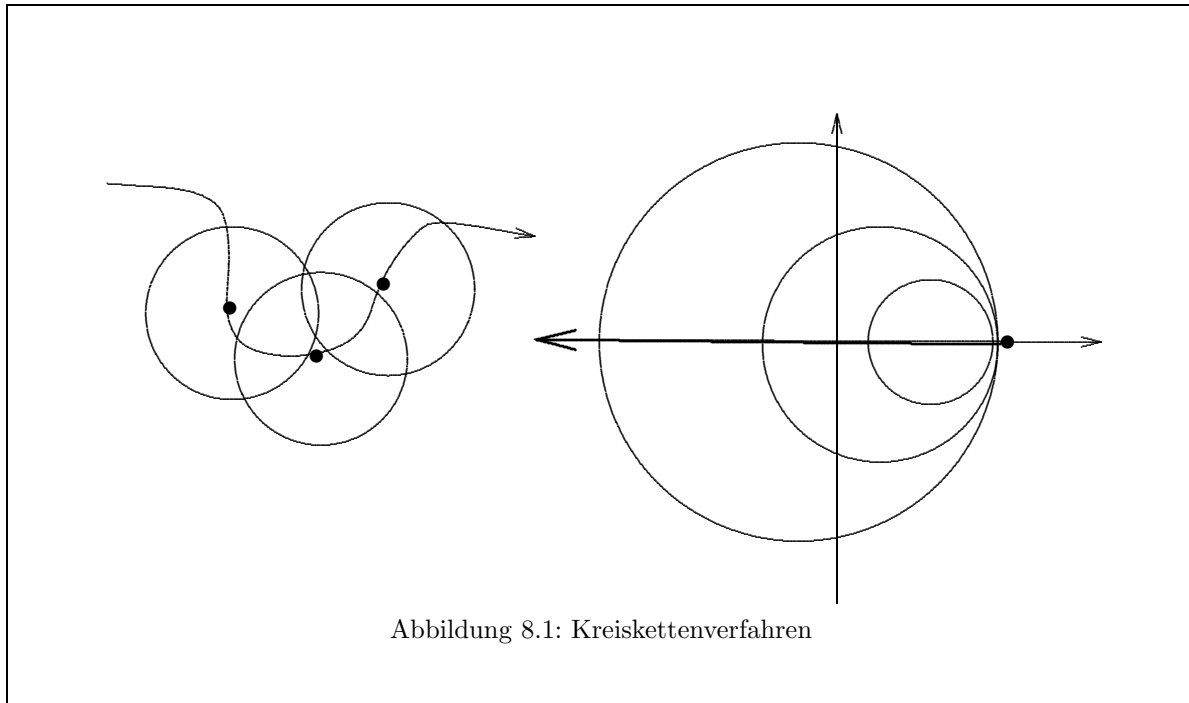


Abbildung 8.1: Kreiskettenverfahren

Beispiel 2:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \quad \text{in } U_1(0) .$$

Auf $K_1(0) \setminus \{1\}$ konvergiert die Reihe (siehe 3. Serie, Aufgabe 6: Anhang A, S. 81, Anhang B, S. 98: Reihe $b_1(z)$).

Aus der Analysis kennt man¹

$$\ln(1+x) = - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} x^n$$

¹siehe Analysis II, 8.7, Aufgabe 117).

für $|x| < 1$. Also gilt auch, wie man leicht sieht:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \ln \left(\frac{1}{1-x} \right)$$

für $x \in \mathbb{R}$, $|x| < 1$.

Daher gilt natürlich nach dem Identitätssatz (die reelle Achse ist mehr als ein Häufungspunkt) auch im Komplexen für $|z| < 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \log \left(\frac{1}{1-z} \right),$$

aber mit welchem Logarithmenzweig ?

Betrachten wir dazu: Aus $|z| < 1$ folgt

$$\underbrace{\operatorname{Re} \left(\frac{1}{1-z} \right)}_{:=w} > 0, \quad (8.1)$$

denn es gilt: $\operatorname{Re}(z) < 1$, somit:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1-z} \right) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{1-\bar{z}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\bar{z}+1-z}{|1-z|^2} \\ &= \frac{1-\operatorname{Re}(z)}{|1-z|^2} > 0. \end{aligned}$$

Aus Glg. 8.1 ersieht man also, daß der Logarithmus für alle w mit $\operatorname{Re}(w) > 0$ definiert sein muß. Man kann also alle Logarithmenzweige wählen, deren nicht definierter Schlitz im Gebiet $\{w \mid \operatorname{Re}(w) \leq 0\}$ liegt. In Abbildung 8.2 sind zwei Beispiele eingezeichnet (in der w -Ebene): die Logarithmenzweige auf $\mathbb{C} \setminus \{w = x + iy \mid x \leq 0, y = 0\}$ (gestrichelt) bzw. auf $\mathbb{C} \setminus \{w = x + iy \mid x = 0, y \geq 0\}$ (gepunktet). In der z -Ebene ist dann der nicht definierte Schlitz für $\log \left(\frac{1}{1-z} \right)$ eingezeichnet. Man erhält ihn, wenn man die Definition von w umkehrt ($z = 1 - \frac{1}{w}$) und untersucht.

Ergebnis: f ist *uneingeschränkt analytisch fortsetzbar* auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, aber nicht durch eine einzige auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ analytische Funktion.

Beispiel 3:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \quad \text{auf } U_1(0).$$

Diese Reihe konvergiert auf ganz $\overline{U_1(0)}$ (siehe 3. Serie, Aufgabe 6: Anhang A, S. 81, Anhang B, S. 98). Für die Ableitung gilt

$$f'(z) = \frac{1}{z} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

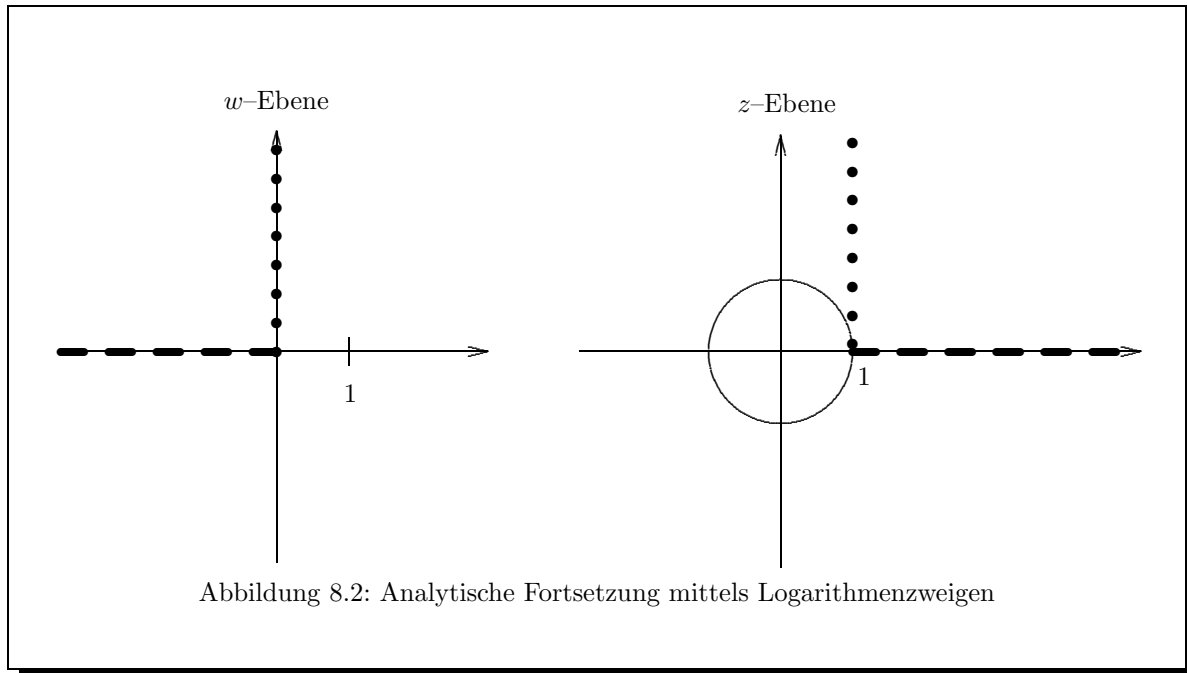


Abbildung 8.2: Analytische Fortsetzung mittels Logarithmenzweigen

und daher mit Beispiel 2:

$$f(z) = \int_0^z \frac{1}{z} \log \left(\frac{1}{1-z} \right) dz \quad \text{auf } U_1(0) .$$

Hieraus ersehen wir, daß f *uneingeschränkt analytisch fortsetzbar* ist auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, aber nicht durch eine einzige auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ analytische Funktion.

Also: Wenn f Stammfunktion einer analytisch fortsetzbaren Funktion g , so ist auch f analytisch fortsetzbar auf dem gleichen Bereich wie g .

Beispiel 4: Die Reihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{(2^n)}$$

konvergiert auf $U_1(0)$ (Konvergenzradius 1). Es gilt:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty ,$$

daher ist eine analytische Fortsetzung nach 1 unmöglich. Weiterhin gilt:

$$f(z) = z + f(z^2) ,$$

also ist auch eine analytische Fortsetzung in z mit $z^2 = 1$ unmöglich. Analog folgt, z. B. mit

$$f(z) = z + z^2 + f(z^4) ,$$

daß eine analytische Fortsetzung in die 2^n -ten Einheitswurzeln unmöglich ist ($n \in \mathbb{N}$); diese liegen auf $K_1(0)$ dicht. Daher divergiert f in allen Punkten von $K_1(0)$.

Definition: Seien

$$\gamma, \rho : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$$

rektifizierbare Kurven.

$$z_1 := \gamma(a) = \rho(a), \quad z_2 := \gamma(b) = \rho(b).$$

$E \subseteq \mathbb{C}$ sei ein Gebiet, das γ und ρ enthält. Man nennt γ und ρ E -homotop, wenn es eine stetige Abbildung

$$\Gamma : [0, 1] \times [a, b] \longrightarrow E$$

gibt, so daß

$$\Gamma(0, t) = \gamma(t), \quad \Gamma(1, t) = \rho(t)$$

für alle $t \in [a, b]$, und

$$\Gamma(s, a) = z_1, \quad \Gamma(s, b) = z_2$$

für alle $s \in [0, 1]$.²

Monodromiesatz: Sei f auf einem Gebiet G analytisch; $G \subseteq E$, E sei ein Gebiet unbeschränkter analytischer Fortsetzbarkeit von f . Sind γ und ρ Kurven in E mit gemeinsamem Anfangspunkt in G und gemeinsamem Endpunkt in E und E_γ ein Gebiet mit $\gamma \subseteq E_\gamma \subseteq E$, E_ρ ein Gebiet mit $\rho \subseteq E_\rho \subseteq E$ und sind f_γ, f_ρ analytische Fortsetzung von f auf E_γ bzw. E_ρ , so ist $f_\gamma(z_2) = f_\rho(z_2)$, falls γ und ρ E -homotop sind.

Beweis: siehe Remmert 2, S. 150.

————— ENDE DER VORLESUNG FUNKTIONENTHEORIE, SS 1992 —————

²vgl. Analysis III, 14.8, Definition von ‚einfach zusammenhängend‘.

A. Einige interessante ausgewählte Aufgaben

In diesem Anhang zitiere ich die interessantesten Aussagen aus den Übungen. Ohne Bearbeitung und Kenntnis dieser Aussagen gewinnt man (alleine durch die Nacharbeitung der Vorlesung) nur eine oberflächliche Kenntnis der Funktionentheorie.

Die hier vorgestellten Aufgaben werden in Anhang B gelöst (bzw. der Lösungsweg skizziert).

Zu Kapitel 1

- 1. Serie, Aufgabe 1)

- a) Zeige: Jeder stetige Körperautomorphismus ϕ von $\mathbb{C}$ fixiert $\mathbb{R}$ (d. h. $\phi|_{\mathbb{R}} = \text{id}_{\mathbb{R}}$).
- b) Bestimme alle stetigen Körperautomorphismen von $\mathbb{C}$.

- 1. Serie, Aufgabe 2)

Zeigen Sie: Der Körper $\mathbb{C}$ kann nicht angeordnet werden. Dabei heißt ein Körper K *angeordnet* durch die Teilmenge P_+ , falls gilt:

- (i) P_+ ist abgeschlossen unter Addition und Multiplikation.
- (ii) $K = P_+ \dot{\cup} \{0\} \dot{\cup} P_-$ mit $P_- = \{z \in K \mid -z \in P_+\}$.

- 2. Serie, Aufgabe 4)

Es seien (z_2, z_3, z_4) und (w_1, w_2, w_3) zwei Tripel paarweise verschiedener Punkte von $\widehat{\mathbb{C}}$. Zeigen Sie:

- a) Es gibt genau eine Möbiustransformation $S : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ mit $S(z_2) = 1, S(z_3) = 0, S(z_4) = \infty$.
- b) Es gibt genau eine Möbiustransformation $S : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ mit $S(z_i) = w_{i-1}$ für $i = 2, 3, 4$.

- 2. Serie, Aufgabe 5)

Für $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \widehat{\mathbb{C}}$ (z_2, z_3, z_4 paarweise verschieden) sei $DV(z_1, z_2, z_3, z_4)$ das Bild von z_1 der (nach Aufgabe 4a, 2. Serie) eindeutig bestimmten Möbiustransformation S mit $S(z_2) = 1, S(z_3) = 0$ und $S(z_4) = \infty$.

- a) Man beweise: Ist T irgendeine Möbiustransformation, so ist

$$DV(z_1, z_2, z_3, z_4) = DV(T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4))$$

für alle $z_1 \in \widehat{\mathbb{C}}$.

- b) Sei $z_1 \notin \{z_2, z_3, z_4\}$. Zeige: Genau dann liegen z_1, z_2, z_3, z_4 auf einem Kreis oder einer Geraden, wenn $DV(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}$.

Zu Kapitel 2

- **2. Serie, Aufgabe 1)**

Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n!} z^n .$$

b)

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n^2} z^{2^n} .$$

c)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sin n) z^n .$$

- **2. Serie, Aufgabe 2)**

Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ habe den Konvergenzradius R . Bestimmen Sie die Konvergenzradien von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 z^n$.

- **2. Serie, Aufgabe 3)**

Sei (a_n) eine Folge mit $a_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, daß für den Konvergenzradius r der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ gilt:

$$\liminf \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \leq r \leq \limsup \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| .$$

(Es gilt also: $r = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$, falls der Limes existiert.)

- **3. Serie, Aufgabe 1)**

Die Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ bzw. $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ mögen Konvergenzradien R_a bzw. R_b haben; R_{a+b} bzw. R_{ab} bzw. $R_{a/b}$ seien die Konvergenzradien von $\sum (a_n + b_n) z^n$ bzw. $\sum (a_n b_n) z^n$ bzw. $\sum \frac{a_n}{b_n} z^n$, wobei im letzten Fall $b_n \neq 0$ für alle n vorausgesetzt sei. Man zeige:

$$R_{a+b} \geq \min(R_a, R_b) ,$$

$$R_{ab} \geq R_a R_b , \quad \text{falls } (R_a, R_b) \neq (0, \infty), (\infty, 0) ,$$

$$R_{a/b} \leq \frac{R_a}{R_b} , \quad \text{falls } (R_a, R_b) \neq (0, 0), (\infty, \infty) .$$

- **3. Serie, Aufgabe 2)**

Für $s \in \mathbb{R}$ sei $M_s = \{ z \in \mathbb{C} \mid s \leq \operatorname{Im}(z) < s + 2\pi \}$; beweise, daß die folgende Funktion bijektiv ist: $\exp|_{M_s} : M_s \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$. In welchen Punkten ist die Umkehrabbildung unstetig? Wie muß man M_s einschränken, damit eine stetige Umkehrabbildung existiert?

- **3. Serie, Aufgabe 3)**

Beweise für $n \in \mathbb{N}$ die Identität:

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \left(\frac{\pi k}{n} \right) = \frac{n}{2^{n-1}} .$$

Tip: Zum Beweis dieser kniffligen Identität betrachte man u. a. das Produkt aller von Null verschiedenen Nullstellen des Polynoms $p(z) = (1 - z)^n - 1$.

• **3. Serie, Aufgabe 4)**

Ein unendliches Produkt $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ komplexer Zahlen $a_n \neq 0$ heißt *konvergent*, wenn die Folge der Teilprodukte der Faktoren einen von 0 verschiedenen Grenzwert hat.

Mit $\log(z)$ bezeichnen wir in dieser Aufgabe die Umkehrabbildung von $\exp | M_{-\pi}^0$ (wobei M die Menge aus Aufgabe 2, 3. Serie ist).

- Man zeige, daß die Faktoren eines konvergenten unendlichen Produktes gegen 1 konvergieren.
- Sei $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ ein unendliches Produkt mit $a_n \notin \mathbb{R}_-$ für alle n . Zeige: Das Produkt konvergiert genau dann, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \log(a_n)$ konvergiert.

• **3. Serie, Aufgabe 5)**

Für $z \in \mathbb{C}$ ist üblicherweise definiert: $n^z := \exp(z \ln n)$.

- Zeige: Für jedes $\delta > 0$ konvergiert die Reihe

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

absolut und gleichmäßig auf $H_\delta = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \geq 1 + \delta\}$.

- Bestimme die Koeffizienten c_n der Reihe $(\zeta(z))^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^z}$.
- Sei $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die streng monoton steigende Folge der Primzahlen. Zeige: Für $\operatorname{Re}(z) > 1$ konvergiert das Produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1 - p_n^{-z}} \right),$$

und es ist

$$\zeta(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1 - p_n^{-z}} \right).$$

• **3. Serie, Aufgabe 6)**

Wir betrachten das Konvergenzverhalten auf dem Rand der Konvergenzkreise.

- Zunächst: Seien für $k \in \mathbb{N}$ a_k, b_k komplexe Zahlen. Zeige:

$$\sum_{k=0}^n a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) s_k + a_n s_n \quad \text{mit} \quad s_k = \sum_{j=0}^k b_j.$$

- Bestimme die Konvergenzradien der Reihen:

$$a(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n, \quad b_m(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{mn}}{mn} \quad (m \in \mathbb{N}), \quad c(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}.$$

- Zeige: $a(z)$ konvergiert nirgendwo auf dem Rand des Konvergenzkreises, während $c(z)$ dort überall absolut und gleichmäßig konvergiert. Die Reihe $b_m(z)$ konvergiert genau in den Punkten w des Randes des Konvergenzkreises, für die $w^m \neq 1$ ist.

• **4. Serie, Aufgabe 3)**

- Seien $z_1, z_2, w \in \mathbb{C}$ und $z_1, z_2 \neq 0$. Zeige: $\sharp(z_1^w) = \sharp(z_2^w)$. („ $\sharp$ “ bezeichnet hier die Mächtigkeit einer Menge.)
- Sei $z \neq 0$. Für welche $w \in \mathbb{C}$ ist $\sharp(z^w) < \infty$? Welcher Zusammenhang besteht in diesem Fall zwischen w und $\sharp(z^w)$? Für welche w ist z^w eindeutig?
- Bestimmen Sie i^i .

Zu Kapitel 3

- **4. Serie, Aufgabe 1)**

Gibt es eine analytische Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, für die gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1 : f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} ?$$

- **4. Serie, Aufgabe 2)**

Bestimmen Sie alle Punkte $z_0 \in \mathbb{C}$, in denen die folgenden Funktionen komplex differenzierbar sind:

a) $f(z) = \operatorname{Re}(z)$.

b) $g(z) = z \cdot |z|^2$.

c) $h(z) = \sin |z|$.

- **4. Serie, Aufgabe 4)**

Bestimme für die angegebenen Funktionen u analytische Funktionen $f = u + iv$, falls solche existieren:

a) $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 - 2x$.

b) $u(x, y) = e^x - x$.

c) $u(x, y) = e^x \cos(y) + 1$.

- **4. Serie, Aufgabe 6)**

Die Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sei analytisch. Ferner seien $u := \operatorname{Re} f$, $v := \operatorname{Im} f$ und $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Zeigen Sie:

a) Ist $\alpha u + \beta v = \gamma$, so ist f konstant.

b) Ist $\alpha u^2 + \beta v^2 = \gamma$, so ist f konstant. (Dies können wir eigentlich erst nach dem 5. Kapitel vollständig lösen.)

- **5. Serie, Aufgabe 5)**

Ist $f(z)$ komplex differenzierbar in z_0 , so ist $F(x, y)$ total differenzierbar in $z_0 = (x_0, y_0)$.

- **5. Serie, Aufgabe 6)**

Ist $F(x, y)$ total differenzierbar in (x_0, y_0) und erfüllt die CR-Dgl'en. $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$, so ist $f(z)$ komplex differenzierbar in z_0 .

Bemerkung: Dabei ist u_x eine häufig benutzte Abkürzung für den Ausdruck $\frac{\partial u}{\partial x}$, entsprechend die anderen Abkürzungen.

Zu Kapitel 4

- **5. Serie, Aufgabe 2)**

Berechnen Sie für den Weg $\gamma : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = 2e^{it}$, das Integral

$$\int_{\gamma} \overline{\sin\left(\frac{1}{z}\right)} dz .$$

(Kann man die Konjugation in den Sinus hineinziehen?)

• 5. Serie, Aufgabe 3,4)

- a) Sei $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ eine stückweise glatte Kurve in $\mathbb{C}$, die Null nicht enthält und die $a \in \mathbb{C}$ mit $b \in \mathbb{C}$ verbindet. Setze $w(t) = \frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|}$. Berechne:

$$\int_w \frac{1}{z} dz .$$

- b) Sei im folgenden stets $E \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ein Gebiet und $a \in E$. Für $b \in E$ und irgendeine stückweise glatte Kurve γ , die a mit b verbindet, setze

$$\Omega(b) = \int_w \frac{1}{z} dz .$$

Hierbei sei w wie in a) definiert. Zeige: Ω ist genau dann auf E wohldefiniert, wenn es in E keine stückweise glatte Jordankurve gibt, deren Innengebiet Null enthält.

- c) Sei ϕ_a ein Argument von a . Beweise: Genau dann gibt es einen Zweig des Logarithmus $\log$ auf E mit $\log(a) = \ln|a| + i\phi_a$, wenn Ω auf E wohldefiniert ist.

• 6. Serie, Aufgabe 1)

- a) Sei $E \subset \mathbb{C}$ offen mit $[\alpha, \beta] \subset E$ und $f = u + iv : E \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Zeige für den Weg $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow E$ mit $\gamma(t) = t$:

$$\int_{\alpha}^{\beta} u(t) dt = \operatorname{Re} \int_{\gamma} f(z) dz , \quad \int_{\alpha}^{\beta} v(t) dt = \operatorname{Im} \int_{\gamma} f(z) dz .$$

- b) Berechne

$$\int_0^{\pi} e^{\cos(t)} \sin(t + \sin(t)) dt .$$

• 6. Serie, Aufgabe 2)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

- a)

$$\int_{K_6(0)} \frac{z+2}{z^2-6z+10} dz .$$

- b)

$$\int_{K_3(0)} \frac{2z^2-15z+30}{z^3-10z^2+32z-32} dz .$$

• 6. Serie, Aufgabe 3)

- a) Sei $f(z)$ analytisch auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet G , außer in $z_0 \in G$. Ferner gebe es ein $\delta > 0$, so daß $f(z)$ auf $U_{\delta}(z_0) \setminus \{z_0\}$ beschränkt ist. Zeige, daß für jede Jordankurve γ , deren Innengebiet z_0 enthält,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

ist.

b) Berechne

$$\int_{K_1(0)} \frac{\sin(z)}{z} dz .$$

• 6. Serie, Aufgabe 4)

a) Sei für $a, b \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} \gamma_0 : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto a \cdot (\cos(2\pi t) + i \sin(2\pi t)) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \gamma_1 : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto a \cdot \cos(2\pi t) + i \cdot b \cdot \sin(2\pi t) . \end{aligned}$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Cauchy'schen Integralsatzes:

$$\int_{\gamma_0} \frac{1}{z} dz = \int_{\gamma_1} \frac{1}{z} dz .$$

b) Beweisen Sie:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2(t) + b^2 \sin^2(t)} = \frac{2\pi}{a \cdot b} .$$

• 6. Serie, Aufgabe 5)

a) Seien $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ zwei Kurven in $\mathbb{C}$, die nicht durch Null laufen. Zeige, daß dann auch die Kurve $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$, definiert durch $\gamma(t) = \gamma_1(t) \cdot \gamma_2(t)$, nicht durch Null läuft, und daß

$$W(\gamma; 0) = W(\gamma_1; 0) + W(\gamma_2; 0) .$$

b) Sei $P(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$ ein Polynom vom Grade n über $\mathbb{C}$. Zeige: Für alle hinreichend großen $R > 0$ läuft die Kurve $P \circ K_R(0)$ nicht durch Null, und es ist

$$W(P \circ K_R(0); 0) = n .$$

(Tip: Betrachte die Kurven

$$\gamma_1 = z^n \circ K_R(0) , \quad \gamma_2 = \left(a_n + z^{-n} \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^j \right) \circ K_R(0)$$

und wende Teil a) an.)

c) Beweise mit obigen Ideen den Fundamentalsatz der Algebra.

Zu Kapitel 5

• 7. Serie, Aufgabe 1)

a) Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R , ferner sei f für $r < R$ auf $U_r(a)$ beschränkt durch M . Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$|a_n| \leq \frac{M}{r^n} .$$

- b) Folgern Sie den Satz von Liouville: Jede auf ganz $\mathbb{C}$ beschränkte analytische Funktion ist konstant.

• **7. Serie, Aufgabe 3)**

- a) Sei f auf dem Gebiet G analytisch. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:
- (i) $f(z) = 0$ für alle $z \in G$;
 - (ii) es existiert ein $a \in G$, so daß $f^{(n)}(a) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$;
 - (iii) die Menge $M = \{z \in G \mid f(z) = 0\}$ hat einen Häufungspunkt in G .
- b) Folgern Sie den Identitätssatz für analytische Funktionen: Seien f und g analytisch auf einem Gebiet G und hat die Menge $\{z \in G \mid f(z) = g(z)\}$ einen Häufungspunkt in G , so ist $f \equiv g$.
- c) Finden Sie eine nicht identisch verschwindende analytische Funktion f , so daß die Menge der Nullstellen von f einen Häufungspunkt hat.

• **7. Serie, Aufgabe 5)**

Sei G ein Gebiet und f auf G analytisch.

- a) Zeigen Sie die folgende „Mittelwerteigenschaft“: Für alle $a \in G$ und $r > 0$ mit $\overline{U_r(a)} \subset G$ ist

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) dt.$$

- b) Folgern Sie das „Maximumsprinzip“: Gibt es ein $a \in G$ mit $|f(a)| \geq |f(z)|$ für alle $z \in G$, so ist f konstant auf G .
- c) Folgern Sie ähnlich wie in b): Ist f eine in einer Umgebung von $\overline{U_r(a)}$ analytische Funktion, so folgt aus

$$|f(a)| < \min_{|z-a|=r} |f(z)|,$$

daß f in $U_r(a)$ eine Nullstelle hat. (Tip: Betrachten Sie $g(z) = \frac{1}{f(z)}$).

• **7. Serie, Aufgabe 6)** „Satz von der Gebietstreue“

Es sei G ein Gebiet und f auf G analytisch und nicht konstant. Zeigen Sie: Die Bildmenge $f(G)$ ist wieder ein Gebiet.

Tip: Ist $w_0 = f(z_0) \in f(G)$, wählen Sie zunächst $U_r(z_0)$ so, daß z_0 einzige w_0 -Stelle von f ist. Für geeignete w läßt sich mit Aufgabe 5c), 7. Serie zeigen, daß $h(z) = f(z) - w$ eine Nullstelle in $U_r(z_0)$ hat.

• **8. Serie, Aufgabe 1)**

Sei $f : U_r(z_0) \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch, $k \in \mathbb{N}$. Zeige die Äquivalenz folgender Aussagen:

- a) Für die Koeffizienten der Laurent-Entwicklung von f um z_0 in $U_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ ist $a_{-k} \neq 0$ und $a_n = 0$ für alle $n < -k$.
- b) Es existiert auf $U_r(z_0)$ eine analytische Funktion g mit $g(z_0) \neq 0$ und $f(z) = (z - z_0)^{-k} g(z)$ für $z \neq z_0$.
- c) Der Grenzwert $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z)$ existiert in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
- d) Es gibt eine Umgebung $U \subset U_r(z_0)$ von z_0 , so daß die Funktion $h : U \rightarrow \mathbb{C}$, definiert durch $h(z) = f(z)^{-1}$ für $z \neq z_0$ und $h(z_0) = 0$ sonst, analytisch ist und in z_0 eine isolierte Nullstelle der Ordnung k hat.

• **8. Serie, Aufgabe 2)**

Bestimmen Sie die Laurent-Entwicklungen um Null der Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z(z+1)(z-2)}$$

in

- a) $U_1(0) \setminus \{0\}$.
- b) $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$.
- c) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 2\}$.

• **8. Serie, Aufgabe 3)**

Klassifizieren Sie die isolierten Singularitäten der folgenden Funktionen:

- a) $f(z) = \exp(\frac{1}{z})$ für $z = 0$;
- b) $f(z) = \sin(\frac{1}{1-z})$ für $z = 1$;
- c) $f(z) = \frac{1}{1-e^z}$ für $z = 2\pi i$;
- d) $f(z) = \frac{1}{\sin(z) - \cos(z)}$ für $z = \frac{\pi}{4}$.

• **8. Serie, Aufgabe 4)**

In einem Punkt z_0 habe f einen Pol m -ter Ordnung, g einen Pol n -ter Ordnung und h eine Nullstelle p -ter Ordnung. Bestimmen Sie die Art der Singularität in z_0 für die Funktionen

$$f + g; \quad f + h; \quad f \cdot g; \quad f \cdot h; \quad f/g; \quad f/h; \quad h/f.$$

• **8. Serie, Aufgabe 5)**

Es sei z_0 eine wesentliche Singularität von f . Zeigen Sie

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^k M(r) = +\infty, \quad k \in \mathbb{Z}$$

mit $M(r) := \sup\{|f(z)| \mid |z - z_0| = r\}$.

• **8. Serie, Aufgabe 6)**

Es sei f auf $U \setminus \{z_0\}$ analytisch mit einer wesentlichen Singularität in z_0 . Folgern Sie aus dem Satz von Casorati-Weierstraß, daß es in jeder Umgebung eines beliebigen $c \in \mathbb{C}$ ein $a \in \mathbb{C}$ gibt, so daß a unendlich oft von f angenommen wird.

• **9. Serie, Aufgabe 1)**

Wir sagen, ∞ ist isolierte Singularität (hebbare Singularität, Polstelle k -ter Ordnung, wesentliche Singularität) einer analytischen Funktion $f(z)$, wenn 0 eine isolierte Singularität (hebbare Singularität, Polstelle k -ter Ordnung, wesentliche Singularität) der Funktion $f(\frac{1}{z})$ ist. Ferner heißt $f(z)$ analytisch in ∞ , wenn $f(\frac{1}{z})$ analytisch fortsetzbar in 0 ist.

- a) Zeige, daß ∞ genau dann eine isolierte Singularität von $f(z)$ ist, wenn ein $R > 0$ existiert, so daß $f(z)$ analytisch auf $\mathbb{C} \setminus \overline{U_R(0)}$ ist.
- b) Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch. Zeigen Sie: Genau dann ist ∞

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{hebbare Singularität} \\ \text{Polstelle } k\text{-ter Ordnung} \\ \text{wesentliche Singularität} \end{array} \right\}, \text{ wenn } f(z) \left\{ \begin{array}{l} \text{konstant} \\ \text{ein Polynom vom Grade } k \\ \text{kein Polynom} \end{array} \right\} \text{ ist.}$$

• **9. Serie, Aufgabe 2)**

Berechnen Sie die Laurent-Reihen der folgenden Funktionen in den angegebenen Gebieten:

- a) $\left(\frac{z-z_0}{z-a}\right)^2$ für $|z-z_0| > |a-z_0|$;
 b) $\left(\frac{z}{z-1}\right)^k$ mit $k \in \mathbb{N}$ für $|z| > 1$;
 c) $\frac{e^z}{z(z-1)}$ für $|z| > 1$.

• **9. Serie, Aufgabe 3)**

Es sei f eine in dem Gebiet E analytische Funktion. Es seien γ_1 und γ_2 zwei rektifizierbare Jordankurven in E . E_1 bezeichne das Innengebiet von γ_1 , E_2 bezeichne das Außengebiet von γ_2 vereinigt mit dem Punkt ∞ . Es gelte $\gamma_2 \subset E_1$, $E_1 \cap E_2 \subset E$. Zeigen Sie die Existenz von in E_i analytischen Funktionen f_i ($i = 1, 2$) mit

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) \quad \text{für alle } z \in E_1 \cap E_2.$$

f_1 und f_2 sind bis auf Konstanten eindeutig bestimmt.

Bemerkung: Dies läßt sich auf n rektifizierbare Jordankurven $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ in E verallgemeinern, wobei $\gamma_2, \dots, \gamma_n$ im Innengebiet von γ_1 liegen und sich weder schneiden noch enthalten.

• **9. Serie, Aufgabe 6)** „Schwarz’sches Lemma“

- a) Zeigen Sie: Für jede analytische Funktion $f : U_1(0) \rightarrow U_1(0)$ mit $f(0) = 0$ ist $|f(z)| \leq |z|$ für alle $z \in U_1(0)$, ferner ist $|f'(0)| \leq 1$.
 b) Gibt es ein $z_0 \in U_1(0) \setminus \{0\}$ mit $|f(z_0)| = |z_0|$, oder ist $|f'(0)| = 1$, so existiert ein $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| = 1$, so daß $f(z) = az$ für alle $z \in U_1(0)$ ist. (Tip: Maximumsprinzip)

Zu Kapitel 6

• **9. Serie, Aufgabe 5)**

Bestimmen Sie die Residuen der folgenden Funktionen in allen ihren Singularitäten:

- a) $\frac{1 - \cos(z)}{z^3}$.
 b) $\frac{z^2}{(1+z)^3}$.
 c) $\frac{e^z}{(z-1)^2}$.

• **10. Serie, Aufgabe 1)**

Bestimmen Sie die Residuen der folgenden Funktionen:

- a) $f(z) = \frac{1}{\sin(z)}$ in $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
 b) $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)^2}$ in $z = +1$ und $z = +2$.
 c) $f(z) = \exp\left(\frac{1}{z-1}\right)$ in $z = +1$.
 d) $f(z) = \frac{1}{1-e^z}$ in $z = 2k\pi i$.

• **10. Serie, Aufgabe 2)**

Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes die folgenden Integrale:

a)

$$\int_{K_1(0)} \frac{e^z}{z} dz .$$

b)

$$\int_{K_r(0)} \frac{f(z)}{(z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot \dots \cdot (z - z_k)} dz$$

mit $|z_i| < r$, ($i = 1, \dots, k$) $z_i \neq z_j$ für $i \neq j$, f analytisch auf $K_r(0)$.

• **10. Serie, Aufgabe 3)**

Für $r > 0$ seien $\gamma_r : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_r(t) := r \exp(it)$ ($0 \leq t \leq \pi$) und

$$I(r) := \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz .$$

Zeigen Sie:

a)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} I(r) = 0 .$$

b)

$$\lim_{r \rightarrow +0} I(r) = \pi i .$$

Verwenden Sie bei a) die Abschätzung $\frac{t}{2} \leq \sin(t)$ für $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Addieren Sie bei b) zu $I(r)$ πi in der Form $i \int_0^\pi 1 dt$ und verwenden Sie die Abschätzung $|e^w - 1| \leq |w|e^{|w|}$.

• **10. Serie, Aufgabe 4)**

Bestimmen Sie für $0 < \varepsilon < R$ das über den in Kapitel 6.1.1 auf Seite 62 skizzierten Weg γ erstreckte Integral $\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z}$. Folgern Sie mit Hilfe von Aufgabe 3 dieser Serie

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2} .$$

• **10. Serie, Aufgabe 5)**

Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Rouché die Anzahl der Nullstellen von:

a) $f(z) = z^6 - 4z^5 + z^2 - 1$ in $U_1(0)$.

b) $f(z) = z^4 - 5z + 1$ in $K_{1,2}(0)$.

Noch ein paar Aufgaben zu allen Themen

- **Aufgabe 1)**

Folgere den Fundamentalsatz der Algebra aus dem Satz von Liouville.

- **Aufgabe 2)**

Es sei f eine ganze Funktion. Zeige: $\sharp(\mathbb{C} \setminus f(\mathbb{C})) \leq 1$ oder f ist konstant. (Betrachte die Funktion: $g(z) = f(\frac{1}{z})$.)

- **Aufgabe 3)**

Sei $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$ ein normiertes Polynom vom Grade $n \geq 1$. Zeige: Für $R > 0$ gibt es ein $z \in K_R(0)$ mit $|p(z)| \geq R^n$.

- **Aufgabe 4)**

Sei $r > 0$ und g analytisch auf $U_r(0) \setminus \{0\}$. Dann gilt:

$$\operatorname{Res}(g', 0) = 0 .$$

Zeige hiermit weiter: Die Funktion $\exp(g(z))$ hat in 0 keinen Pol und keine durch den Funktionswert 0 hebbare Singularität.

B. Ein paar Lösungen zu den Aufgaben

In diesem Anhang skizziere ich die Lösung einiger der im Anhang A vorgestellten Aufgaben. Die Lösungen der anderen Aufgaben sollten eigentlich keine Probleme bereiten; die Ergebnisse sind angegeben.

Zu Kapitel 1

- 1. Serie, Aufgabe 1)

a)

$$\phi(0) = \phi(0 + 0) = \phi(0) + \phi(0) \implies \phi(0) = 0 .$$

$$\phi(1) = \phi(1 \cdot 1) = \phi(1) \cdot \phi(1) \xrightarrow{\phi(1) \neq 0 \text{ da } \phi \text{ bijektiv}} \phi(1) = 1 .$$

$$1 = \phi(1) = \phi((-1) \cdot (-1)) = \phi(-1) \cdot \phi(-1) \xrightarrow{\phi(-1) \neq 1 \text{ da } \phi \text{ bijektiv}} \phi(-1) = -1 .$$

Mit vollständiger Induktion von $\phi(1)$ und $\phi(-1)$ ausgehend und der Beziehung

$$\phi(n+1) = \phi(n) + \phi(1) = \phi(n) + 1$$

folgt:

$$\forall z \in \mathbb{Z} : \phi(z) = z .$$

Nun erhält man mittels

$$1 = \phi\left(\frac{1}{n} \cdot n\right) = \phi\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \phi(n)$$

die Aussage

$$\phi\left(\frac{1}{n}\right) = \phi(n)^{-1} \implies \forall q \in \mathbb{Q} : \phi(q) = q .$$

Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt und wegen der Stetigkeit folgt mit Heine-Kriterium die Behauptung.

b)

$$\phi(a + ib) = \phi(a) + \phi(i) \cdot \phi(b) = a + \phi(i) \cdot b .$$

Da ϕ bijektiv, gilt: $\phi(i) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Mit

$$\phi(i)^2 = \phi(i^2) = \phi(-1) = -1 ,$$

folgt

$$\phi(i) = \pm i .$$

Also sind die Konjugation und die Identität die einzigen stetigen Körperautomorphismen.

• **1. Serie, Aufgabe 2)**

Entweder $i \in P_+$ oder $-i \in P_+$. Wegen der Abgeschlossenheit, gilt daher: $(\pm i)^2 = -1 \in P_+$. Daraus folgt einerseits $-(-1) = 1 \in P_-$, andererseits $(-1)^2 = 1 \in P_+$, also $1 \in P_+ \cap P_-$. Dies ist ein Widerspruch zu $K = P_+ \dot{\cup} \{0\} \dot{\cup} P_-$.

• **2. Serie, Aufgabe 4)**

- a) – **Eindeutigkeit:** Eine lineare Transformation $f(z) = a+bz$ hat höchstens zwei Fixpunkte: $az + b = z$ hat nämlich die Fixpunkte $\frac{b}{1-a}$ und ∞ . Auch jede Möbiustransformation im allgemeinen ungleich der Identität hat maximal zwei Fixpunkte. Denn:

$$\begin{aligned} \frac{az+b}{cz+d} &= z \\ \implies az+b &= cz^2+dz \\ \implies cz^2+(d-a)z &= b. \end{aligned}$$

Seien nun S und T zwei verschiedene Möbiustransformationen, die die Forderungen erfüllen. Also: $S(z_i) = T(z_i)$ für $i = 1, 2, 3$. Dann:

$$\underbrace{S^{-1} \circ T}_{\text{wieder Möbiustransfo}}(z_i) = z_i.$$

Da also nun z_1, z_2, z_3 Fixpunkte sind, muß gelten:

$$S^{-1} \circ T = \text{id}_{\widehat{\mathbb{C}}}.$$

Also folgt: $S = T$.

- **Existenz:** Wie man leicht nachrechnet, tun die folgenden Trafo's das Gewünschte:

▷ Falls alle z_i aus $\mathbb{C}$ sind:

$$S(z) = \frac{z - z_3}{z - z_4} \cdot \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}.$$

▷ Falls $z_2 = \infty$:

$$S(z) = \frac{z - z_3}{z - z_4}.$$

▷ Falls $z_3 = \infty$:

$$S(z) = \frac{z_2 - z_4}{z - z_4}.$$

▷ Falls $z_4 = \infty$:

$$S(z) = \frac{z - z_3}{z_2 - z_3}.$$

- b) **Eindeutigkeit** wie oben; **Existenz:** Sei T_1 diejenige Möbiustransfo mit $T_1(z_1) = 1, T_1(z_2) = 0, T_1(z_3) = \infty$ und T_2 diejenige Möbiustransfo mit $T_2(w_1) = 1, T_2(w_2) = 0, T_2(w_3) = \infty$. Dann leistet $S := T_2^{-1} \circ T_1$ das Gewünschte.

• **2. Serie, Aufgabe 5)**

- a) Wenn (z_2, z_3, z_4) paarweise verschieden, dann ist auch $(T(z_2), T(z_3), T(z_4))$ paarweise verschieden. Daher ist

$$\tilde{T} : w \mapsto DV(w, T(z_2), T(z_3), T(z_4))$$

eine Möbiustransformation. Daher ist ebenso $S := \tilde{T} \circ T$ eine Möbiustransformation mit

$$S(z_1) = \tilde{T} \circ T(z_1) = DV(T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4)).$$

Es gilt

– für S :

$$\begin{aligned} S(z_2) &= DV(T(z_2), T(z_2), T(z_3), T(z_4)) = 1 . \\ S(z_3) &= DV(T(z_3), T(z_2), T(z_3), T(z_4)) = 0 . \\ S(z_4) &= DV(T(z_4), T(z_2), T(z_3), T(z_4)) = \infty . \end{aligned}$$

– und definitionsgemäß für das DV :

$$\begin{aligned} DV(z_2, z_2, z_3, z_4) &= 1 . \\ DV(z_3, z_2, z_3, z_4) &= 0 . \\ DV(z_4, z_2, z_3, z_4) &= \infty . \end{aligned}$$

Nach Aufgabe 4) ist die Möbiustrasfo mit diesen Eigenschaften eindeutig. Daher:

$$S = DV(T(\cdot), T(z_2), T(z_3), T(z_4)) \stackrel{!}{=} DV(\cdot, z_2, z_3, z_4) .$$

b) Sei $T(z) = DV(z, z_2, z_3, z_4)$. Daher ist T Möbiustrasfo und natürlich auch T^{-1} . Es gilt: $T(z_2) = 1, T(z_3) = 0, T(z_4) = \infty$.

Das durch $(1, 0, \infty)$ beschriebene Objekt ist die reelle Achse, es entspricht also einer Geraden. Nach Satz 2, Kapitel 1, führt eine Möbiustrasfo Geraden und Kreise in Geraden und Kreise über. Also: Da $T(z_1)$ reell sein muß, wenn er mit $(1, 0, \infty)$ eine Gerade bilden will (Kreis geht ja nicht), geschieht dies genau dann, wenn z_1 mit z_2, z_3, z_4 eine Gerade oder einen Kreis bildet.

Zu Kapitel 2

• 2. Serie, Aufgabe 1)

a) Benutze $1 < n! < n^n$, dann das Cauchy-Hadamard-Kriterium und schließlich $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$. Es ergibt sich dann: $R = 1$.

b) Benutze

$$\sqrt[n]{2^{-n^2}} = \left(\sqrt[n]{2^n} \right)^{-n} .$$

Dann ergibt sich wiederum $R = 1$.

c) Da $\sin(n) < 1$ folgt: $\limsup \sqrt[n]{|\sin(n)|} \leq 1$, also $R \geq 1$. Betrachte nun zunächst:

$$\begin{aligned} \sin(1) &= \sin(n+1-n) \\ &= \sin(n+1)\cos(n) - \sin(n)\cos(n+1) \\ \implies |\sin(1)| &\leq |\sin(n+1)| |\cos(n)| + |\sin(n)| |\cos(n+1)| \\ &\leq |\sin(n+1)| + |\sin(n)| \\ \implies |\sin(n+1)| &\geq \frac{\sin(1)}{2} \quad \text{oder} \quad |\sin(n)| \geq \frac{\sin(1)}{2} . \end{aligned}$$

Es existiert daher eine Teilfolge (n_i) mit:

$$1 \geq \sqrt[n_i]{|\sin(n_i)|} \geq \sqrt[n_i]{\frac{\sin(1)}{2}} \longrightarrow 1 ,$$

da ja $\frac{\sin(1)}{2} > 0$. Also $\sqrt[n_i]{|\sin(n_i)|} \longrightarrow 1$, und damit:

$$\limsup \sqrt[n]{|\sin(n)|} = 1 , \quad \text{also: } R = 1 .$$

• **2. Serie, Aufgabe 2)**

Nach Voraussetzung gilt:

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}.$$

Daher existiert zunächst eine Teilfolge (n_i) :

$$\lim \sqrt[n_i]{|a_{n_i}|} = \frac{1}{R}.$$

Wegen der Stetigkeit von x^2 und $\sqrt{\cdot}$ gilt nun:

$$\lim \left(\sqrt[2n_i]{|a_{n_i}|} \right) = \sqrt{\lim \sqrt[n_i]{|a_{n_i}|}} = \frac{1}{\sqrt{R}}. \quad (\text{B.1})$$

$$\lim \left(\sqrt[n_i]{|a_{n_i}|^2} \right) = \left(\lim \sqrt[n_i]{|a_{n_i}|} \right)^2 = \frac{1}{R^2}. \quad (\text{B.2})$$

Jetzt könnte es natürlich noch andere Teilfolgen geben, deren Grenzwerte größer sind als die in (B.1) und (B.2) angegebenen Grenzwerte. Dies ist nicht der Fall und liegt an folgender Eigenschaft des Supremums unter monoton wachsenden Funktionen: Sei also f monoton wachsend; dann:

$$f(a_k) \leq f(\sup_k \{a_k\})$$

und daher:

$$\sup_k \{f(a_k)\} \leq f(\sup_k \{a_k\}).$$

Also hat der Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n}$ den Wert $\sqrt{R}$ und der von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 z^n$ den Wert R^2 .

• **2. Serie, Aufgabe 3)**

Die Gleichungen sind einfach, falls $\liminf \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 0$ bzw. $\limsup \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \infty$. Dies sei im folgenden also nicht der Fall.

Sei $0 < s < \liminf \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$. Nach Definition von $\liminf$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_0$: $\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| > s$. Also:

$$\left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = \frac{|z|}{\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|} < \frac{|z|}{s}.$$

Nach dem Quotientenkriterium ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ also absolut konvergent für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < s$. Dies bedeutet aber:

$$\liminf \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \leq r.$$

Analog: Sei $\limsup \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| < t < \infty$. Nach Definition von $\limsup$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_0$: $\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| < t$. Also:

$$\left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = \frac{|z|}{\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|} > \frac{|z|}{t}.$$

Nach dem Quotientenkriterium ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ also divergent für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > t$. Dies bedeutet aber:

$$r \leq \limsup \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Die Aussage für den $\lim$ versteht sich dann hoffentlich von selbst.

• **3. Serie, Aufgabe 1)**

Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \min(R_a, R_b)$. Dann konvergieren die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ absolut. Nach Aussage 2.1 konvergiert daher auch $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$ absolut. Daher gilt dann: $R_{a+b} \geq \min(R_a, R_b)$.

Sei $z = x \cdot y \in \mathbb{C}$ mit $|z| < R_a R_b$, $|x| < R_a$, $|y| < R_b$. Dann konvergieren die beiden Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k y^k$ absolut. Daher konvergiert auch das Dirichlet-Produkt absolut, d. h. die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k b_k) x^k y^k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k b_k) z^k$ existiert. Also damit: $R_{ab} \geq R_a R_b$. (Alternativ: Betrachte $\limsup \sqrt[n]{|a_n b_n|} \leq \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \limsup \sqrt[n]{|b_n|}$).

Weiter gilt: $R_a = R_{\frac{a}{b} \cdot b} \geq R_{\frac{a}{b}} \cdot R_b$. Also:

$$\frac{R_a}{R_b} \geq R_{\frac{a}{b}}.$$

• **3. Serie, Aufgabe 2)**

– **Injektivität:**

$$\begin{aligned} & \exp(z_1) = \exp(z_2) \\ \implies & \exp(z_1 - z_2) = 1 \\ \implies & z_1 - z_2 = 2k\pi i \quad (\text{mit } k \text{ geeignet}) \\ \implies & \operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2) \quad \text{und} \quad (\operatorname{Im}(z_1) - \operatorname{Im}(z_2)) = 2k\pi. \end{aligned}$$

Es gilt: $|\operatorname{Im}(z_1) - \operatorname{Im}(z_2)| < 2\pi$, da $z_1 \in M_s$ und $z_2 \in M_s$. Also:

$$\operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2) \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2),$$

d. h. $z_1 = z_2$.

– **Surjektivität:** Sei $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann gilt mit $\phi \in [s, s + 2\pi[$, falls es ein z mit $w = e^z$ gibt:

$$w = |w|e^{i\phi} = e^{\operatorname{Re}(z)}e^{i\operatorname{Im}(z)}.$$

Also sieht man:

$$z := \ln |w| + i\arg(w)$$

mit $\phi = \arg(w) \in [s, s + 2\pi[$ tut das Gewünschte.

Die Funktion ist für alle $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ unstetig, für die $\arg(w) = s$ gilt. (Man mache sich graphisch klar, daß Umgebungen um solche w durch f^{-1} zerrissen werden.)

Eine stetige Inverse erhält man durch Einschränkung auf folgende Funktion:

$$\exp| \overset{\circ}{M}_s: \overset{\circ}{M}_s \longrightarrow \mathbb{C} \setminus (e^{is}\mathbb{R}_+ \cup \{0\}).$$

Es ergibt sich dann als Umkehrfunktion:

$$f^{-1}(w) = \ln |w| + i\arg(w)$$

mit $s < \arg(w) < s + 2\pi$.

• **3. Serie, Aufgabe 3)**

Nullstellen z_k von $p(z) = (1 - z)^n - 1$:

$$\begin{aligned} (1 - z)^n = 1 & \implies 1 - z = e^{i\frac{2\pi}{n}k} \\ z_k = 1 - e^{i\frac{2\pi}{n}k} & \quad (k = 0, \dots, n-1). \end{aligned}$$

Es gilt:

$$p(z) = \prod_{k=0}^{n-1} (z_k - z) \stackrel{z_0=0}{=} -z \cdot \left(\prod_{k=1}^{n-1} (z_k - z) \right).$$

Also:

$$\prod_{k=1}^{n-1} z_k = \frac{p(z)}{-z} \Big|_{z=0}.$$

Nun gilt einerseits:

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \exp\left(\frac{2\pi k i}{n}\right)\right) &= \prod_{k=1}^{n-1} \exp\left(\frac{\pi k i}{n}\right) \cdot \left(\exp\left(\frac{-\pi k i}{n}\right) - \exp\left(\frac{\pi k i}{n}\right)\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n-1} (-2i) \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{n}\right) \cdot \exp\left(\frac{\pi k i}{n}\right) \\ &= (-2i)^{n-1} \cdot \exp\left(\underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n-1} k\right) \frac{\pi i}{n}}_{\frac{n(n-1)}{2}}\right) \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{\pi k}{n}\right) \\ &= (-2i)^{n-1} \underbrace{\left(\exp\left(\frac{\pi i}{2}\right)\right)^{n-1}}_{=i} \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{\pi k}{n}\right). \end{aligned}$$

Also gilt:

$$\frac{p(z)}{-z} \Big|_{z=0} = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{\pi k}{n}\right). \quad (*)$$

Andererseits:

$$\begin{aligned} p(z) = (1-z)^n - 1 &= \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-z)^k\right) - 1 \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-z)^k \\ &= -z \cdot \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-z)^{k-1}. \end{aligned}$$

Also gilt:

$$\frac{p(z)}{-z} \Big|_{z=0} = \binom{n}{1} = n. \quad (**)$$

Mit (*) und (**) gilt also dann die Behauptung.

• **3. Serie, Aufgabe 4)**

a) Die Folge der Teilprodukte

$$b_k := \prod_{n=1}^k a_n$$

konvergiert gegen a . Daher tut dies natürlich auch die Folge (b_{k+1}) :

$$(b_k) \longrightarrow a \neq 0, \quad (b_{k+1}) \longrightarrow a.$$

Da die Produktbildung und $\frac{1}{x}$ stetig sind, gilt:

$$a_{k+1} = \frac{b_{k+1}}{b_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{a}{a} = 1.$$

b) Die Reihe konvergiere, also:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \log(a_k) = a \quad \text{existiert.}$$

$\exp$ ist stetig, daher:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(\sum_{k=1}^n \log(a_k)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n a_k = \exp(a)$$

existiert, und ist von Null verschieden, da $0 \notin \exp(\mathbb{C})$. Also konvergiert das Produkt. Konvergiere nun das Produkt. b_k die Partialprodukte, $b_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$. Also gilt:

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq n_1 : |b_n - b_m| < \frac{1}{4} |b_\infty|.$$

$$\exists n_2 \in \mathbb{N} : \forall m \geq n_2 : |b_\infty| < 2 \cdot |b_m|.$$

Wähle $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$:

$$\forall m, n \geq n_0 : \left| \frac{b_n}{b_m} - 1 \right| < \frac{1}{2}.$$

Daher wissen wir insbesondere ($m := n_0$): Die Produkte

$$\prod_{k=n_0+1}^n a_k \quad \text{liegen in} \quad \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - 1| < \frac{1}{2} \right\}.$$

Dort ist $\log$ wohldefiniert und stetig. Also:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n_0+1}^n \log(a_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \log\left(\prod_{k=n_0+1}^n a_k\right) = \log(b_\infty)$$

existiert, also konvergiert die Reihe.

• 3. Serie, Aufgabe 5)

a) $z = x + iy \in H_\delta$. Dann:

$$\begin{aligned} |n^z| &= |\exp(z \cdot \ln(n))| \\ &= |\exp(x \cdot \ln(n))| \cdot \underbrace{|\exp(iy \ln(n))|}_{=1} \\ &= |n^x| = n^x \geq n^{1+\delta}. \end{aligned}$$

Also:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \left| \frac{1}{n^z} \right| \leq \frac{1}{n^{1+\delta}}. \quad (*)$$

Wir wissen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\delta}} \quad \text{konvergiert, da} \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{1+\delta}} dx$$

existiert und $\frac{1}{x^{1+\delta}}$ monoton fallend ist, nach dem Integralkriterium. Also konvergiert $\zeta(z)$ absolut und gleichmäßig auf H_δ wegen (*) und dem Weierstraß'schen M-Test.

- b) Da $\zeta(z)$ auf H_δ absolut konvergiert, konvergiert $(\zeta(z))^2$ für jede Anordnung der Produkte. Daher:

$$\begin{aligned} (\zeta(z))^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^z} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(nk)^z} \\ &\stackrel{nk=r}{=} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{k \text{ teilt } r} \frac{1}{r^z} \\ \Rightarrow c_n &= \sum_{k \text{ teilt } n} 1 = \text{Anzahl der Teiler von } n. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n \frac{1}{1-p_k^{-z}} &= \prod_{k=1}^n \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p_k^z} \right)^r \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{r_1+\dots+r_n=s} \frac{1}{(p_1^{r_1} \cdot \dots \cdot p_n^{r_n})^z} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(n_j)^z}, \end{aligned}$$

wobei die letzte Summation über alle natürlichen Zahlen n_j läuft, deren Primfaktoren sämtliche aus der Menge $\{p_1, \dots, p_n\}$ sind. Nun:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^z} - \prod_{k=1}^n \frac{1}{1-p_k^{-z}} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{k_j^z},$$

wobei k_j in diesem Fall alle natürlichen Zahlen durchläuft, die einen Primfaktor enthalten, der nicht in $\{p_1, \dots, p_n\}$ enthalten ist. Dann ist:

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^z} - \prod_{k=1}^n \frac{1}{1-p_k^{-z}} \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{k_j^{\operatorname{Re}(z)}} \stackrel{(**)}{\leq} \sum_{j=p_{n+1}}^{\infty} \frac{1}{j^{\operatorname{Re}(z)}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Also ist nur noch (**) zu begründen: Dies gilt, da für $j < p_{n+1}$ alle Primfaktoren aus $\{p_1, \dots, p_n\}$ kommen müssen.

• 3. Serie, Aufgabe 6)

- a) Beweis z.B. mit Induktion; fleißiges Rechnen führt dann zum Ziel.
 b) $a(z)$: Konvergenzradius trivialerweise 1.
 $b_m(z)$ ist Teilreihe von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$, dessen Konvergenzradius 1 ist. Also ist der Konvergenzradius von $b_m(z)$ schonmal ≥ 1 . Andererseits ist

$$b_m(1) = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

divergent. Also $R = 1$.

$c(z)$: Es gilt:

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{n^2}{n^2 + 2n + 1} \longrightarrow 1 .$$

Also: auch hier $R = 1$.

c) $a(z)$:

$$|z| = 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} |z^n| \neq 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} z^n = w \neq 0 \quad (|w| = 1) .$$

Daher: nirgends auf dem Rand Konvergenz.

$c(z)$:

$$|z| = 1 : \quad \forall n \in \mathbb{N} : \quad \left| \frac{z^n}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2} .$$

Dann folgt mittels Weierstraß'schem M-Test die absolute, gleichmäßige Konvergenz auf dem Rand.

$b_m(z)$: Zunächst: $w^m = 1$. Dann $b_m(w) = \frac{1}{m} \sum \frac{1}{n}$ und dies ist divergent.

Nun: $w^m \neq 1$ (z. z. ist die Konvergenz in diesen w).

$$a_k := \frac{1}{mk} , \quad b_k := w^{mk} , \quad s_0 = a_0 := b_0 := 0$$

und definitionsgemäß aus Teil a)

$$s_k = \sum_{j=1}^k w^{mj} = \frac{w^m}{1 - w^m} (1 - w^{mk}) .$$

Für die Partialsummen

$$b_m^{(n)}(z) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{mk} z^{mk}$$

gilt mittels Teil a):

$$\begin{aligned} b_m^{(n)}(w) &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{mk} - \frac{1}{m(k+1)} \right) \frac{w^m}{1 - w^m} (1 - w^{mk}) + \frac{1}{mn} \frac{w^m}{1 - w^m} (1 - w^{mn}) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{mk(k+1)} \frac{w^m}{1 - w^m} (1 - w^{mk}) + \frac{1}{mn} \frac{w^m}{1 - w^m} (1 - w^{mn}) \\ &= \frac{1}{m} \frac{w^m}{1 - w^m} \left[\underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)}}_{\text{konvergent}} - \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{w^{mk}}{k(k+1)}}_{\text{absolut konvergent}} + \frac{1 - w^{mn}}{n} \right] , \end{aligned}$$

wobei die Konvergenz und die absolute Konvergenz mittels Weierstraß'schem M-Test folgt und der letzte Term konvergiert für $n \rightarrow \infty$ gegen Null, denn es gilt:

$$0 \leq \left| \frac{1 - w^{mn}}{n} \right| \leq \frac{1 + |w|^{mn}}{n} = \frac{2}{n} .$$

Also ist $b_m(w)$ für diese w konvergent.

• 4. Serie, Aufgabe 3)

a) Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned} z^w &= e^{w \log(z)} \\ &= \{ e^{w \operatorname{Log}(z) + 2k\pi i w} \mid k \in \mathbb{Z} \} \\ &= \{ \underbrace{e^{w \operatorname{Log}(z)}}_{\text{eindeutig}} \cdot e^{2k\pi i w} \mid k \in \mathbb{Z} \}. \end{aligned}$$

Also hängt die Mächtigkeit nur von w ab. Daher:

$$\#(z_1^w) = \#(z_2^w).$$

b) Wähle $z = 1$. Es gilt:

$$(1^w) = \{ e^{2k\pi i w} \mid k \in \mathbb{Z} \}.$$

Daher:

$$\#(z^w) = \#(1^w) = \#\{ e^{2k\pi i w} \mid k \in \mathbb{Z} \}.$$

Falls $w = 0$ also: $\#(z^w) = 1$.

Falls $w \neq 0$:

$$\begin{aligned} \#(1^w) < \infty &\iff \text{es existiert ein } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \text{ mit } e^{2k\pi i w} = 1. \\ &\iff \text{es existiert } k, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : 2k\pi w = 2\pi m. \\ &\iff w \in \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

Sei nun $w = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ gekürzt.

$$e^{2k\pi i w} = \cos\left(2k\pi \frac{a}{b}\right) + i \sin\left(2k\pi \frac{a}{b}\right).$$

Dann ist $k = b$ das minimale k mit $e^{2k\pi i w} = 1$. Also:

$$w = \frac{a}{b} \text{ gekürzt} \implies \#(z^w) = b.$$

Eindeutig ist z^w daher für alle w mit $b = 1$ und für $w = 0$, also für $w \in \mathbb{Z}$.

c)

$$\begin{aligned} i^i &= \{ e^{i \operatorname{Log}(i)} e^{2k\pi i \cdot i} \mid k \in \mathbb{Z} \} \\ &= \{ e^{-2k\pi} e^{i \overbrace{(\ln|i| + i\frac{\pi}{2})}^{=0}} \mid k \in \mathbb{Z} \} \\ &= \{ e^{\frac{-4k-1}{2}\pi} \mid k \in \mathbb{Z} \}. \end{aligned}$$

Zu Kapitel 3

• 4. Serie, Aufgabe 1)

Nein, denn aus f analytisch folgt: f stetig. Mit Heine ermittelt man dann mittels $n \rightarrow \infty$ den Funktionswert $f(0) = 0$. Damit gilt für den Differenzenquotienten in 0:

$$\frac{f\left(\frac{1}{n}\right) - 0}{\frac{1}{n}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} = \sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

Also existiert keine Ableitung in 0, d. h. f nicht analytisch auf $\mathbb{C}$.

• 4. Serie, Aufgabe 2)

- a) $f(x + iy) = x + i \cdot 0$: Die CR-Dgl'en sind nirgends erfüllt, also f nirgends komplex differenzierbar.
- b) $g(x + iy) = x^3 + xy^2 + i(x^2y + y^3)$: Stellt man nun die CR-Dgl'en auf und ermittelt die Lösungsmenge, für die diese gelten, so erhält man: $(x, y) = (0, 0)$. Für den Differenzenquotienten in $z = 0$ gilt:

$$\delta_0 = \frac{g(h) - g(0)}{h} = \frac{h|h^2|}{h} = |h|^2 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Also: g nur in 0 komplex differenzierbar.

- c) $h(x + iy) = \sin(\sqrt{x^2 + y^2}) + i \cdot 0$. Die CR-Dgl'en sind in $z = 0$ und $\sqrt{x^2 + y^2} = (k + \frac{1}{2})\pi$ erfüllt. Für $z = 0$ existiert der Differentialquotient

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin|z|}{z}$$

wegen dem Betrag im $\sin$ *nicht*. In den anderen z -Werten ist h stetig partiell differenzierbar. Also ist h in folgenden Punkten komplex differenzierbar:

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \mid \exists k \in \mathbb{Z} : |z| = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi \right\}.$$

• 4. Serie, Aufgabe 4)

- a) Unter Ausnutzung der CR-Dgl'en erhält man Bedingungen für die zwei partiellen Ableitungen von v . Wenn man beide Ableitungen integriert, so ergibt sich als Bedingung:

$$\begin{aligned} v_1(x, y) &= 3x^2y - y^3 - 2y + d_1(x), \\ v_2(x, y) &= 3x^2y + d_2(y). \end{aligned}$$

Also ist, da u und die folgenden v stetig partiell differenzierbar sind, f analytisch mit den folgenden v_d :

$$v_d(x, y) = 3x^2y - y^3 - 2y + d.$$

- b) Es existiert kein geeignetes v , weil u nicht harmonisch ist:

$$\Delta u = e^x \neq 0.$$

- c) Unter Ausnutzung der CR-Dgl'en erhält man Bedingungen für die zwei partiellen Ableitungen von v . Wenn man beide Ableitungen integriert, so ergibt sich als Bedingung:

$$\begin{aligned} v_1(x, y) &= \sin(y)e^x + d_1(x), \\ v_2(x, y) &= \sin(y)e^x + d_2(y). \end{aligned}$$

Also ist, da u und die folgenden v stetig partiell differenzierbar sind, f analytisch mit den folgenden v_d :

$$v_d(x, y) = \sin(y)e^x + d.$$

• **4. Serie, Aufgabe 6)**

a) Aus $\alpha u + \beta v = \gamma$ folgt für die partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned}\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial v}{\partial x} &= 0, \\ \alpha \frac{\partial u}{\partial y} + \beta \frac{\partial v}{\partial y} &= 0\end{aligned}$$

und mittels den CR-Dgl'en:

$$\begin{aligned}\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial v}{\partial x} &= 0, \\ \beta \frac{\partial u}{\partial x} - \alpha \frac{\partial v}{\partial x} &= 0.\end{aligned}$$

Man betrachte die Determinante dieses Gleichungssystems für die partiellen Ableitungen von u und v :

$$\det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix} = -\alpha^2 - \beta^2 \neq 0,$$

denn α und β können nicht gleichzeitig Null werden (sonst wäre auch γ Null mit Widerspruch). Daher:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Also für alle z : $f'(z) = 0$ und somit $f \equiv \text{const.}$

b) Diesen Aufgabenteil kann man an *dieser* Stelle eigentlich noch nicht vollständig lösen. Im folgenden will ich nicht alle möglichen Fälle betrachten, sie verlaufen analog wie die ausgeführten.

Mittels partieller Ableitung und CR-Dgl'en kommt man wiederum auf ein Gleichungssystem, für dessen Determinante folgendes gilt:

$$\det \begin{pmatrix} 2\alpha u & 2\beta v \\ 2\beta v & -2\alpha u \end{pmatrix} = -4\alpha^2 u^2 - 4\beta^2 v^2.$$

$(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, weil sonst ja auch $\gamma = 0$ (s.o.). Sei im folgenden sowohl $\alpha \neq 0$ als auch $\beta \neq 0$. Dann ist die Determinante nur an Nullstellen von f gleich Null. Wie wir in Kapitel 5 sehen werden, liegen diese Nullstellen isoliert und sind dann aus Stetigkeitsgründen (Heine) ohne Bedeutung, oder die Funktion ist auf einer Umgebung konstant Null, was nach dem 5. Kapitel direkt bedeutet, daß die Funktion identisch Null ist auf ganz $\mathbb{C}$ (s. Seite 43).

Wenn die Determinante also ungleich Null ist, so ergibt sich wieder:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Also für alle z : $f'(z) = 0$ und somit $f \equiv \text{const.}$

• **5. Serie, Aufgabe 6)**

Ich halte mich bei dieser und bei der nächsten Aufgabe nicht an die Armbrust-Notation, sondern nutze die Reckziegel-Vorgehensweise.

F total differenzierbar in (x_0, y_0) heißt:

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + D_{(x_0, y_0)} F(x - x_0, y - y_0) + R(x, y)$$

mit

$$D_p F = J_p F = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_p & \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_p \\ \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_p & \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_p \end{pmatrix} \quad \text{linear, stetig und} \quad \frac{R(x, y)}{\|(x - x_0, y - y_0)\|_2} \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} 0 .$$

Unter Ausnutzung der CR-Dgl'en läßt sich dies auch so schreiben:

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} (x - x_0) - \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} (y - y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} (x - x_0) + \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} (y - y_0) \end{pmatrix} + R(x, y) .$$

Wir wechseln nun von der $\mathbb{R}^2$ -Schreibweise auf die in $\mathbb{C}$ mit komplexer Multiplikation:

$$f(z) = f(z_0) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{z_0} + i \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{z_0} \right) (z - z_0) + R(z)$$

mit

$$\frac{R(z)}{\|z - z_0\|} \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0 .$$

Daraus folgt:

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{z_0} + i \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{z_0} \right) + \frac{R(z)}{z - z_0} .$$

Zunächst: Da nach Voraussetzung $\frac{R(z)}{\|z - z_0\|} \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0$, gilt: für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so daß für alle $z \in U_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$ folgende Aussagen äquivalent gelten:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{R(z)}{\|z - z_0\|} \right\| &< \varepsilon . \\ \frac{1}{\|z - z_0\|} \cdot \|R(z)\| &< \varepsilon . \\ \left\| \frac{R(z)}{z - z_0} \right\| &< \varepsilon . \end{aligned}$$

Also gilt auch:

$$\frac{R(z)}{z - z_0} \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0 .$$

Damit also:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{z_0} + i \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{z_0} \in \mathbb{C} .$$

Also ist f komplex differenzierbar in z_0 .

• **5. Serie, Aufgabe 5)**

Komplexe Differenzierbarkeit kann man wie folgt ausdrücken:

$$f(z) = f(z_0) + d_{z_0}(z - z_0) + R(z) \quad \text{mit} \quad \frac{R(z)}{z - z_0} \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0$$

und $d_{z_0} = b_{z_0} + ic_{z_0}$ linear und stetig.

Wir wechseln von der Schreibweise in $\mathbb{C}$ (mit komplexer Multiplikation) auf die in $\mathbb{R}^2$:

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + \begin{pmatrix} b_{(x_0, y_0)}(x - x_0) - c_{(x_0, y_0)}(y - y_0) \\ c_{(x_0, y_0)}(x - x_0) + b_{(x_0, y_0)}(y - y_0) \end{pmatrix} + R(x, y) ,$$

wobei jetzt

$$\frac{R(x, y)}{\|(x - x_0, y - y_0)\|_2} \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} 0$$

gilt mit der gleichen Schlußweise wie in Aufgabe 6).

Also können wir schreiben:

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + D_{(x_0, y_0)}F(x - x_0, y - y_0) + R(x, y)$$

mit

$$D_{(x_0, y_0)}F = \begin{pmatrix} b & -c \\ c & b \end{pmatrix}.$$

Also ist F differenzierbar in (x_0, y_0) .

Zu Kapitel 4

• 5. Serie, Aufgabe 2)

Es gilt:

$$\overline{\sin(z)} = \sin(\bar{z})$$

(wie man sich an der Reihendarstellung klarmachen kann (Konjugation ist Körperautomorphismus, Partialsummenbetrachtung, Konjugation stetig)). Also:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \overline{\sin\left(\frac{1}{z}\right)} dz &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{1}{2}e^{-it}\right) \cdot 2ie^{it} dt = 4 \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{1}{2}e^{it}\right) \cdot \frac{1}{2}ie^{it} dt \\ &= -4 \cos\left(\frac{1}{2}e^{it}\right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 4 \cos\left(-\frac{1}{2}i\right) - 4 \cos\left(\frac{1}{2}i\right) \\ &= 4 \cos\left(\frac{1}{2}i\right) - 4 \cos\left(\frac{1}{2}i\right) = 0. \end{aligned}$$

• 5. Serie, Aufgabe 3,4)

a) $\gamma(t)$ ist darstellbar durch stetig differenzierbares $\phi(t)$ und $r(t) > 0$: $\gamma(t) = r(t)e^{i\phi(t)}$.

(Beweisskizze hiervon: Betrachte $h(t) := \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\gamma'}{\gamma} dt$ und $g(t) := e^{-h(t)}\gamma(t)$. Dann ist $g'(t) \equiv 0$,

also $g(t) \equiv \text{const.} = \gamma(a)$. Geeignetes Ausschreiben von $\gamma(t) = \gamma(a)e^{h(t)}$ ergibt die obige Darstellung.)

Dann $\frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|} = e^{i\phi(t)}$. Also:

$$\begin{aligned} \Omega := \int_w \frac{1}{z} dz &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{e^{i\phi(t)}} i\phi'(t) e^{i\phi(t)} dt \\ &= i \int_{\alpha}^{\beta} \phi'(t) dt = i(\phi(\beta) - \phi(\alpha)) \\ &= i(\arg(b) - \arg(a)). \end{aligned}$$

- b) Sei ρ Jordankurve um Null in E . p sei ein Punkt auf der Spur von ρ . Sei weiterhin σ eine Kurve, die a mit p verbindet. (Diese Kurve existiert, weil E ein Gebiet (Bemerkung: offen und zusammenhängend $\iff$ wegwweise zusammenhängend)). Sei

$$\tilde{\gamma} = \gamma \circ \sigma^{-1} \circ \rho \circ \sigma, \quad \tilde{w} := \frac{\tilde{\gamma}}{|\tilde{\gamma}|}.$$

Dann:

$$\int_{\tilde{w}} \frac{1}{z} dz = 2\pi i + \int_w \frac{1}{z} dz \neq \int_w \frac{1}{z} dz.$$

Also: Ω nicht wohldefiniert.

Sei nun Ω nicht wohldefiniert. Dann existieren also Kurven γ und $\tilde{\gamma}$, so daß

$$\int_w \frac{1}{z} dz \neq \int_{\tilde{w}} \frac{1}{z} dz.$$

Die Kurven lassen sich durch Polygonzüge annähern. Wie in Abbildung 4.3 zu Satz 7, Kapitel 4 kann man diese Polygonzüge nun so vereinfachen, daß w und $-\tilde{w}$ eine Jordankurve bilden. Innerhalb dieser Jordankurve muß nun eine Singularität liegen, sonst wären die Integrale doch gleich. Die einzige Singularität des Integranden ist aber Null. Also existiert eine Jordankurve um Null in E .

- c) Ω sei wohldefiniert, d. h. Ω ist wegunabhängig. Da also eine Stammfunktion von $\frac{1}{z}$ existiert, ist Ω stetig. Also ist auch

$$l(b) = \ln |b| + i\phi_a + \Omega(b)$$

stetig und es gilt (wie gewünscht):

$$\begin{aligned} \exp(\ln |b| + i\phi_a + \overbrace{i(\phi_b - \phi_a)}^{=\Omega(b)}) &= |b| \exp(i\phi_b) = b, \\ l(a) &= \ln |a| + i\phi_a + \underbrace{i(\phi_a - \phi_a)}_{=0}. \end{aligned}$$

Umgekehrt: Sei nun ein Zweig l vorgegeben. Da $l'(z) = \frac{1}{z}$, besitzt $\frac{1}{z}$ eine Stammfunktion. Daher ist $\int_w \frac{1}{z} dz$ wegunabhängig, somit ist Ω wohldefiniert.

• 6. Serie, Aufgabe 1)

- a) Es gilt selbstverständlich:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \operatorname{Re} \left(\int_{\gamma} f(z) dz \right) + i \operatorname{Im} \left(\int_{\gamma} f(z) dz \right).$$

Andererseits gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\alpha}^{\beta} \underbrace{f(\gamma(t))}_{=t} \cdot \underbrace{\gamma'(t)}_{=1} dt = \int_{\alpha}^{\beta} (u(t) + iv(t)) dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} u(t) dt + i \int_{\alpha}^{\beta} v(t) dt. \end{aligned}$$

Vergleich von Real- und Imaginärteil ergibt die Behauptung.

b) Dieses Integral berechnet man folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi \exp(\cos(t)) \cdot \sin(t + \sin(t)) dt &= \int_0^\pi \operatorname{Im}(\exp(\cos(t)) \cdot \exp(i(t + \sin(t)))) dt \\
 &= \int_0^\pi \operatorname{Im}(\exp(it) \cdot \exp(\exp(it))) dt \\
 &\stackrel{\text{a)}}{=} \operatorname{Im} \left(\int_0^\pi \exp(it) \cdot \exp(\exp(it)) dt \right) \\
 &= \operatorname{Im} \left(-i \int_\gamma e^w dw \right) \quad \text{mit } \gamma = e^{it}, \quad t \in [0, \pi] \\
 &= \operatorname{Im} \left(-i e^w \Big|_1^{-1} \right) = \operatorname{Im} \left(-i \left(\frac{1}{e} - e \right) \right) \\
 &= e - \frac{1}{e}.
 \end{aligned}$$

• **6. Serie, Aufgabe 2)**

Diese Integrale werden mittels Partialbruchzerlegung gelöst. Die einzelnen Summanden berechnen sich dann auf bekannte Art sehr einfach.

a) Partialbruchzerlegung ergibt:

$$\frac{z+2}{z^2+6z+10} = \frac{1-5i}{2} \cdot \frac{1}{z-3-i} + \frac{1+5i}{2} \cdot \frac{1}{z-3+i}.$$

Mittels der Umlaufzahldefinition ergibt sich also:

$$\begin{aligned}
 \int_{K_6(0)} \frac{z+2}{z^2+6z+10} dz &= \frac{1-5i}{2} \int_{K_6(0)} \frac{1}{z-(3+i)} dz + \frac{1+5i}{2} \int_{K_6(0)} \frac{1}{z-(3-i)} dz \\
 &= 2\pi i \frac{1-5i}{2} \cdot W(K_6(0), 3+i) + 2\pi i \frac{1+5i}{2} \cdot W(K_6(0), 3-i) \\
 &= 2\pi i.
 \end{aligned}$$

b) Partialbruchzerlegung ergibt:

$$\frac{2z^2-15z+30}{z^3-10z^2+32z-32} = \frac{2}{z-2} + \frac{1}{(z-4)^2}.$$

Es ergibt sich daher:

$$\begin{aligned}
 \int_{K_3(0)} \frac{2z^2-15z+30}{z^3-10z^2+32z-32} dz &= 2 \int_{K_3(0)} \frac{1}{z-2} dz + \underbrace{\int_{K_3(0)} \frac{1}{(z-4)^2} dz}_{=0 \text{ (Cauchy-Integralsatz)}} \\
 &= 2 \cdot 2\pi i W(K_3(0), 2) \\
 &= 4\pi i.
 \end{aligned}$$

• 6. Serie, Aufgabe 3)

a) Sei $|f(z)| \leq M$ auf $U_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$. Mit $\varepsilon < \delta$ gilt:

$$\left| \int_{K_\varepsilon(z_0)} f(z) dz \right| \leq M \cdot 2\pi\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \quad (*)$$

Mittels Cauchy-Integralsatz (Integration über Ringgebiete) ergibt sich für beliebiges ε , wobei (**) noch zu zeigen ist:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{K_\varepsilon(z_0)} f(z) dz \stackrel{(**)}{=} 0.$$

Da diese Gleichung für beliebiges ε gilt, ist das Integral über $K_\varepsilon(z_0)$ konstant. Wegen (*) gilt daher auch (**), was zu zeigen war.

b) Mittels Cauchy-Integralformel (Kapitel 5) ist diese Aufgabe trivial.

Ohne diese Formel wollen wir zeigen, daß $\frac{\sin(z)}{z}$ beschränkt ist auf $U_1(0)$; dann folgt, wie eben bewiesen, daß das zu berechnende Integral Null ist. Mit

$$\sin(z) = z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}$$

folgt die Beschränktheit auf $U_1(0)$ wie folgt:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sin(z)}{z} \right| &\leq 1 + \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k} \right| \\ &\leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} =: M < \infty. \end{aligned}$$

• 6. Serie, Aufgabe 4)

a) Die Kurven γ_0 und γ_1 berühren sich in den Punkten $P := (-a, 0)$ und $Q := (a, 0)$. Man wähle nun zwei geschlossene Wege (also Jordankurven) von P nach Q entlang von γ_0 und zurück nach P entlang $-\gamma_1$. Da diese Wege die Null nicht einschließen, sind nach dem Cauchy-Integralsatz (Ringgebiete) die Integrale längs dieser Wege Null. Addiert man nun die zwei Jordankurven-Integrale, so sieht man, daß die Integrale längs γ_0 bzw. γ_1 gleich sind.

b) Bekannt ist:

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z} dz = 2\pi i.$$

Andererseits gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \frac{1}{z} dz &= \int_0^1 \frac{2\pi a(-\sin(2\pi x)) + ib \cdot 2\pi \cos(2\pi x)}{a \cos(2\pi x) + ib \sin(2\pi x)} dx \\ &= -2\pi \int_0^1 \frac{a \sin(2\pi x) - ib \cos(2\pi x)}{a \cos(2\pi x) + ib \sin(2\pi x)} \cdot \frac{a \cos(2\pi x) - ib \sin(2\pi x)}{a \cos(2\pi x) - ib \sin(2\pi x)} dx \\ &= -2\pi \int_0^1 \frac{(a^2 - b^2) \sin(2\pi x) \cos(2\pi x) - iab \overbrace{(\cos^2(2\pi x) + \sin^2(2\pi x))}^{=1}}{a^2 \cos^2(2\pi x) + b^2 \sin^2(2\pi x)} dx. \end{aligned}$$

Ein Vergleich der Imaginärteile liefert also:

$$ab \int_0^1 \frac{1}{a^2 \cos^2(2\pi x) + b^2 \sin^2(2\pi x)} dx = 1 .$$

Mit der Substitution $t = 2\pi x$ folgt die Behauptung:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2 \cos^2(t) + b^2 \sin^2(t)} dt = \frac{2\pi}{ab} .$$

• 6. Serie, Aufgabe 5)

- a) Gäbe es ein t_0 mit $\gamma(t_0) = 0$, so müßte entweder $\gamma_1(t_0) = 0$ oder $\gamma_2(t_0) = 0$ sein. Also würde eine der beiden Kurven — entgegen der Voraussetzung — doch durch Null laufen.

$$\begin{aligned} W(\gamma; 0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\gamma_1'(t)\gamma_2(t) + \gamma_2'(t)\gamma_1(t)}{\gamma_1(t)\gamma_2(t)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_1(t)} \cdot \frac{\gamma_2(t)}{\gamma_2(t)} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\gamma_2'(t)}{\gamma_2(t)} \cdot \frac{\gamma_1(t)}{\gamma_1(t)} dt \\ &= W(\gamma_1; 0) + W(\gamma_2; 0) . \end{aligned}$$

- b) Definiere $Q(z) := a_n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^{n-j}$. Es gilt: Q ist stetig und $Q(0) = a_n \neq 0$. Daher existiert ein ε , so daß für $z \in U_\varepsilon(0)$: $|Q(z)| \geq \frac{|a_n|}{2}$. Sei $R \geq \frac{1}{\varepsilon}$ (also für $|z| > R$ gelte: $\frac{1}{|z|} < \varepsilon$). Dann gilt für $|z| > R$:

$$\begin{aligned} |P(z)| &= |z|^n \cdot \left| a_n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^{j-n} \right| \\ &= |z|^n \cdot \left| a_n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j \left(\frac{1}{z}\right)^{n-j} \right| \geq R^n \frac{|a_n|}{2} > 0 . \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Also gilt für $z \in K_r(0)$ mit $r > R$: $|P(z)| > 0$, die Kurve $P \circ K_r(0)$ läuft also nicht durch Null.

Seien nun γ_1 und γ_2 die Kurven aus dem Tip. Es gilt: $P \circ K_R(0) = \gamma_1 \cdot \gamma_2$. Daher natürlich

$$W(P \circ K_R(0), 0) = W(\gamma_1; 0) + W(\gamma_2; 0) .$$

Berechne also die beiden rechten Umlaufzahlen:

$$W(\gamma_1; 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{1}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_R(0)} \frac{nz^{n-1}}{z^n} dz = \frac{n}{2\pi i} \int_{K_R(0)} \frac{1}{z} dz = n .$$

Zu $W(\gamma_2; 0)$:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{1}{z} dz \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{K_R(0)} \frac{\overbrace{\sum_{j=0}^{n-1} a_j (j-n) z^{j-n-1}}^{\text{ausklammern}}}{a_n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^{j-n}} dz \right|$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{K_R(0)} \frac{\sum_{j=0}^{n-1} a_j(j-n)z^j}{P(z) \cdot z} dz \right|.$$

OBdA. $R > 1$. Dann gilt für den Integranden $I(z)$ auf $K_R(0)$ mittels Glg. (B.3):

$$|I(z)| \leq \frac{|z|^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} |a_j|(n-j)}{|z||P(z)|} \leq \frac{2}{R^2|a_n|} \sum_{j=0}^{n-1} |a_j|(n-j).$$

Also:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{1}{z} dz \right| \leq \frac{2}{R|a_n|} \sum_{j=0}^{n-1} |a_j|(n-j) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Daher: $W(P \circ K_R(0); 0) = n + 0 = n$.

c) P sei ein nichtkonstantes Polynom mit $\text{grad}(P) = n \geq 1$. Also:

$$W(P \circ K_R(0); 0) = n. \quad (\text{B.4})$$

Annahme: P hat keine Nullstelle in $\mathbb{C}$. Dann ist $\frac{P'(z)}{P(z)}$ analytisch auf ganz $\mathbb{C}$. Also:

$$W(P \circ K_R(0); 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{P \circ K_R(0)} \frac{1}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_R(0)} \frac{P'(z)}{P(z)} dz \stackrel{\text{Cauchy-Integralsatz}}{=} 0 \neq n.$$

Dies ist offensichtlich ein Widerspruch zu (B.4).

Zu Kapitel 5

• 7. Serie, Aufgabe 1)

a)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n \quad \text{mit} \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz.$$

Also:

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \max_{z \in K_r(a)} \left| \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \right| \cdot 2\pi r \stackrel{|z-a|=r}{\leq} \frac{M}{r^n}.$$

b) Da die Funktion auf ganz $\mathbb{C}$ analytisch, ist der Konvergenzradius $R = \infty$. Also:

$$\forall n \geq 1: |a_n| \leq \frac{M}{r^n} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0,$$

also für $n \in \mathbb{N}$: $a_n = 0$. Für $n = 0$ gilt: $|a_0| \leq \frac{M}{r^0} = M$. Also:

$$f(z) = a_0(z-a)^0 = a_0 \equiv \text{const}.$$

• 7. Serie, Aufgabe 3)

a) Sei $f(z) = 0$ für alle $z \in G$. Daher

$$M = \{z \in G \mid f(z) = 0\} = G.$$

Nach der Definition eines Häufungspunktes ist jedes $z_0 \in G$ ein Häufungspunkt von M in G . Besitze nun M einen Häufungspunkt in G . Also existiert Folge (z_k) mit $z_k \in M$, $z_k \neq a$ und $\lim z_k = a$. Für die Koeffizienten der Taylorreihe gilt: $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$. Induktion über n : Für $n = 0$ gilt, weil f stetig,

$$0 = \lim_{\substack{z_k \rightarrow a \\ =0}} f(z_k) = f(a) = a_0.$$

$0, \dots, n \Rightarrow n+1$: Wenn bereits die ersten n Koeffizienten Null sind, gilt für die Taylorentwicklung:

$$f(z) = \sum_{j=n+1}^{\infty} a_j (z-a)^j.$$

Also:

$$0 = f(z_k) = a_{n+1}(z_k - a)^{n+1} + a_{n+2}(z_k - a)^{n+2} + \dots$$

Nach Division durch $(z_k - a)^{n+1} (\neq 0)$ ergibt sich:

$$0 = a_{n+1} + a_{n+2}(z_k - a) + a_{n+3}(z_k - a)^2 + \dots = a_{n+1} + (z_k - a)g(z_k),$$

wobei g in a stetig ist. Für $k \rightarrow \infty$ gilt also: $a_{n+1} = 0$. Damit also für alle $n \in \mathbb{N}_0$: $f^{(n)}(a) = 0$.

Sei nun für ein a und alle $n \in \mathbb{N}_0$: $f^{(n)}(a) = 0$ (d. h. f hat eine Nullstelle der Ordnung ∞ in $a \in G$). Definiere

$$N := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{z \in G \mid \underbrace{f^{(n)}(z)}_{\text{stetig}} = 0\}.$$

Da die einzelnen Mengen abgeschlossen sind (über stetige Gleichungen definiert) und Schnitte beliebig vieler abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen sind, ist N abgeschlossen. N ist auch offen: Sei $z_1 \in N$:

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_1)^j \stackrel{a_j=0}{\equiv} 0$$

auf einer Umgebung, daher ist $f^{(j)} \equiv 0$ auf dieser Umgebung. Weiter ist $a \in N$ nach Voraussetzung. Da G zusammenhängend: $N = G$, und somit $f \equiv 0$.

b) $f - g$ ist analytisch (da f und g analytisch). Also hat:

$$M = \{z \in G \mid (f - g)(z) = 0\}$$

nach Voraussetzung einen Häufungspunkt in G . Also gilt nach obigen Äquivalenzen für alle $z \in G$: $(f - g)(z) = 0$. Also: $f \equiv g$.

c) Der Trick hier besteht darin, daß der Häufungspunkt nicht im Definitionsbereich liegen darf. Beispiel:

$$f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C} ; \quad z \longmapsto \sin\left(\frac{1}{z}\right).$$

Es gilt bei diesem Beispiel: $f(z) = 0 \iff z_n = \frac{1}{\pi n}$. Also:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$$

ist Häufungspunkt, aber nicht im Definitionsbereich.

• **7. Serie, Aufgabe 5)**

a) Sei $\gamma(t) = a + re^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$). Dann liegt γ in G nach Voraussetzung. Also:

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{it})}{a+re^{it}-a} \cdot rie^{it} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a+re^{it}) dt. \end{aligned}$$

b) Sei $U_\varepsilon(a) \subseteq G$ und $r < \varepsilon$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |f(a)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a+re^{it})| dt \leq \max_{|z-a|=r} |f(z)| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a)| dt = |f(a)|. \end{aligned}$$

Also müssen die Integrale sogar gleich sein. Da die Integranden stetig sind, ergibt sich (wenn man die Integranden unter ein Integral bringt (und zwar so, daß der Integrand ≥ 0 ist)): $|f(z)| = |f(a)|$. Also, da dies für alle $r < \varepsilon$ gilt und aus der Konstanz des Betrages analytischer Funktionen ja bereits die Konstanz der Funktion selbst folgt: $f|_{U_\varepsilon(a)} \equiv \text{const}$. Nach dem Identitätssatz gilt daher: $f \equiv \text{const}$ auf ganz G .

c) Besitzt f in $U_r(a)$ keine Nullstelle, so ist $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ in einer Umgebung in $\overline{U_r(a)}$ holomorph, denn:

$$|z-a|=r: \quad 0 \leq |f(a)| < \min_{|z-a|=r} |f(z)| \leq |f(z)| \implies f(z) \neq 0.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} |g(a)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(a+re^{it})| dt \leq \max_{|z-a|=r} |g(z)| \\ \implies \frac{1}{|f(a)|} &\leq \max_{|z-a|=r} \frac{1}{|f(z)|} = \frac{1}{\min_{|z-a|=r} |f(z)|} \\ \implies |f(a)| &\geq \min_{|z-a|=r} |f(z)|. \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, also muß f doch in $U_r(a)$ eine Nullstelle haben.

• **7. Serie, Aufgabe 6)**

Gebiet heißt: zusammenhängend und offen.

Zusammenhang von $f(G)$: f analytisch, also f stetig. Da G zusammenhängt, folgt somit¹, daß $f(G)$ ebenfalls zusammenhängend ist.

Offenheit von $f(G)$: Sei $w_0 \in f(G)$ und $f(z_0) = w_0$. z_0 sei einzige w_0 -Stelle in der abgeschlossenen Menge $\overline{U_r(z_0)}$. Die Menge $K_r(z_0)$ ist kompakt, wähle ε_0 so, daß $|f(z) - w_0| \geq 3\varepsilon_0 > 0$ auf $K_r(z_0)$.

¹siehe Analysis III, 12.14 und Aufgabe 182).

Behauptung: $U_{\varepsilon_0}(w_0) \subseteq f(G)$.

Sei $w \in U_{\varepsilon_0}(w_0)$, also: $|w - w_0| < \varepsilon_0$ und weiter sei $|z - z_0| = r$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |f(z) - w| &= |f(z) - w_0 - (w - w_0)| \geq |f(z) - w_0| - |w - w_0| \\ &\geq 3\varepsilon_0 - \varepsilon_0 = 2\varepsilon_0 . \end{aligned}$$

Mit $z = z_0$ gilt:

$$|f(z_0) - w| = |w_0 - w| < \varepsilon_0 .$$

Also ergibt sich:

$$|f(z_0) - w| < \min_{|z - z_0| = r} |f(z) - w| .$$

Also mit Aufgabe 5c): $f(z) - w$ hat mindestens eine Nullstelle in $U_r(z_0)$. Somit existiert ein $\tilde{z}$ in $U_r(z_0)$, so daß $f(\tilde{z}) = w$. Also: $U_{\varepsilon_0}(w_0) \subseteq f(G)$. Das heißt: $f(G)$ ist offen.

• **8. Serie, Aufgabe 1)**

Sei $a_{-k} \neq 0$ und

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n .$$

Daher gilt:

$$(z - z_0)^k f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z - z_0)^{k+n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-k} (z - z_0)^n =: g(z)$$

mit $g(z_0) = a_{-k} \neq 0$ und g analytisch auf $U_r(z_0)$, da Potenzreihe.

Sei nun $g(z_0) \neq 0$, g analytisch, also insbesondere stetig. Daher existiert eine Umgebung U mit $U \subseteq U_r(z_0)$, so daß $\frac{1}{g}$ analytisch. Somit ist auch $h(z) := \frac{1}{f(z)} = \frac{(z - z_0)^k}{g(z)}$ (letzte Gleichheit nach Definition von g) analytisch und hat eine isolierte Nullstelle der Ordnung k in z_0 .

Sei nun $h(z) = (z - z_0)^k \tilde{g}(z)$ (z_0 Nullstelle der Ordnung k , $\tilde{g}(z_0) \neq 0$). Also nach der Definition von h ($h = \frac{1}{f}$): $(z - z_0)^k f(z) = \frac{1}{\tilde{g}(z)}$. Da $\tilde{g}$ stetig, existiert der Grenzwert:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{\tilde{g}(z)} = \frac{1}{\tilde{g}(z_0)} \neq 0 .$$

Existiere also nun der Grenzwert $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z)$ in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Da $(z - z_0)^k f(z)$ bereits analytisch auf $U_r(z_0) \setminus \{z_0\}$, läßt sich mittels dieses Grenzwertes die Funktion $(z - z_0)^k f(z)$ auf ganz $U_r(z_0)$ analytisch fortsetzen, also auch taylorentwickeln:

$$(z - z_0)^k f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n, \quad b_0 \neq 0 .$$

Daher gilt also mit $a_n := b_{n+k}$ auf $U_r(z_0) \setminus \{z_0\}$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^{n-k} = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n ,$$

wobei $a_{-k} = b_0 \neq 0$.

• **8. Serie, Aufgabe 2)**

Mittels Partialbruchzerlegung erhält man:

$$f(z) = \frac{1}{z(z+1)(z-2)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z+1} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{z-2}.$$

Für $|z| < 1$ gilt:

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n.$$

Für $|z| > 1$ gilt:

$$\frac{1}{z+1} = \frac{\frac{1}{z}}{1+\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{1}{z})} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{-n}.$$

Für $|z| < 2$ gilt:

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{-2(1-\frac{z}{2})} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^n.$$

Für $|z| > 2$ gilt:

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{-n}.$$

Also ergibt sich für die Laurentreihen:

a)

$$f(z) = \underbrace{-\frac{1}{2z}}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}(-1)^n - \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \right) z^n}_{\text{analytischer Teil}}.$$

b)

$$f(z) = \underbrace{-\frac{1}{2z} + \frac{1}{3} \sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^{n+1} z^n}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\left(-\frac{1}{12} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^n \right)}_{\text{analytischer Teil}}.$$

c)

$$f(z) = \underbrace{-\frac{1}{2z} + \frac{1}{3} \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + (-1)^{n+1} \right) z^n}_{\text{Hauptteil}}.$$

• **8. Serie, Aufgabe 3)**

a)

$$f(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right) = 1 + \sum_{m=-\infty}^{-1} \frac{1}{(-m)!} z^m.$$

Also: $z_0 = 0$ ist wesentliche Singularität.

b)

$$\sin\left(\frac{1}{1-z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} \frac{1}{(z-1)^{2n+1}}.$$

Also: $z_0 = 1$ ist wesentliche Singularität.c) Nach Aufgabe 1d) betrachte $h(z) = 1 - e^z$. h hat in $2\pi i$ eine Nullstelle 1. Ordnung (daß dies Nullstelle 1. Ordnung ist, liest man aus $h'(2\pi i) \neq 0$ ab). Also: $z_0 = 2\pi i$ ist Pol 1. Ordnung.d) Nach Aufgabe 1d) betrachte $h(z) = \sin(z) - \cos(z)$. h hat in $\frac{\pi}{4}$ eine Nullstelle 1. Ordnung ($h'(\frac{\pi}{4}) \neq 0$). Also: $z_0 = \frac{\pi}{4}$ ist Pol erster Ordnung.

• **8. Serie, Aufgabe 4)**

Die Funktionen lassen sich wegen ihren Polen bzw. Nullstellen wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} f(z) &= (z - z_0)^{-m} g_1(z), \\ g(z) &= (z - z_0)^{-n} g_2(z), \\ h(z) &= (z - z_0)^p g_3(z) \end{aligned}$$

mit analytischen g_i und $g_i(z_0) \neq 0$. $f + g$: Sei $n \leq m$ Dann:

$$f(z) + g(z) = (z - z_0)^{-m} (g_1(z) + (z - z_0)^{m-n} g_2(z))$$

mit $g_1(z) + (z - z_0)^{m-n} g_2(z)$ analytisch und $\neq 0$ in z_0 . Der Fall $m \leq n$ geht genauso, für $m = n$ können wir keine Aussage treffen, weil wir nicht wissen, ob vielleicht $g_1(z_0) + g_2(z_0) = 0$. Also: $f + g$ besitzt in z_0 einen Pol der Ordnung $\max\{m, n\}$, falls $m \neq n$. $f + h$: Es gilt:

$$f(z) + h(z) = (z - z_0)^{-m} (g_1(z) + (z - z_0)^{p+m} g_2(z)).$$

Also: Pol der Ordnung m . $f \cdot g$:

$$f(z) \cdot g(z) = (z - z_0)^{-(m+n)} (g_1(z) \cdot g_2(z)).$$

Also: Pol der Ordnung $m + n$. $f \cdot h$:

$$f(z) \cdot h(z) = (z - z_0)^{p-m} (g_1(z) \cdot g_3(z)).$$

Also: Für $p - m \geq 0$ ist z_0 hebbare Singularität und Nullstelle der Ordnung $p - m$. Für $p - m < 0$ ist z_0 Pol der Ordnung $m - p$. f/g :

$$\frac{f(z)}{g(z)} = (z - z_0)^{n-m} \frac{g_1(z)}{g_2(z)}.$$

Also: Für $n - m \geq 0$ ist z_0 hebbare Singularität und Nullstelle der Ordnung $n - m$. Für $n - m < 0$ ist z_0 Pol der Ordnung $m - n$. f/h :

$$\frac{f(z)}{h(z)} = (z - z_0)^{-n-p} \frac{g_1(z)}{g_3(z)}.$$

Also: Pol der Ordnung $n + p$. h/f :

$$\frac{h(z)}{f(z)} = (z - z_0)^{p+n} \frac{g_3(z)}{g_1(z)}.$$

Also: Hebbare Singularität und Nullstelle der Ordnung $p + n$.

• **8. Serie, Aufgabe 5)**

Mit f hat auch $\tilde{f} := (z - z_0)^k f$ eine wesentliche Singularität in z_0 . Es gilt $M(f, r)$ ist $M(r)$ für die Funktion f : $M(\tilde{f}, r) = r^k \cdot M(f, r)$. Daher braucht nur

$$\lim_{r \rightarrow 0} M(f, r) = \infty$$

gezeigt zu werden.

Annahme:

$$\lim_{r \rightarrow 0} M(f, r) \neq \infty,$$

d. h. es existiert eine Folge (r_n) mit $\lim r_n = 0$, aber $\liminf M(f, r_n) = c < \infty$, also oBdA. $\lim M(f, r_n) = c$. Daher:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : M(f, r_n) \leq c + 1.$$

Somit gilt für alle $k \in \mathbb{N}_-$, $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} |a_k| &\leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{K_{r_n}(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz \right| \\ &\leq r_n \cdot \max_{|z - z_0| = r_n} |f(z)| \cdot r_n^{-(k+1)} \\ &\leq (c + 1) \cdot r_n^{-k}. \end{aligned}$$

Also für alle $k \in \mathbb{N}_-$ und $r_n \rightarrow 0$: $a_k = 0$. Damit ist z_0 aber keine wesentliche Singularität, also ein Widerspruch.

• **8. Serie, Aufgabe 6)**

Sei W Umgebung von c . Nach Casorati-Weierstraß ist $f(U_\delta(z_0) \setminus \{z_0\})$ dicht in $\mathbb{C}$. Also existiert ein $z_1 \in U_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$ mit $w_1 = f(z_1) \in W$. Da f holomorph, insbesondere stetig ist, existiert Umgebung $\tilde{U}_1$ von z_1 und $W_1 \subset W$ von w_1 , so daß $f(\tilde{U}_1) = W_1$ (Gleichheit wegen Gebietstreue erreichbar). Wähle $\tilde{U}_1$ so, daß $\tilde{U}_1 \subset U_{\delta_1}(z_1) \subset U$ mit $\delta_1 < \frac{|z_1 - z_0|}{3}$. Weiterhin existiert Umgebung U_1 von z_1 mit $\overline{U_1} \subset \tilde{U}_1$, wobei $\overline{U_1}$ natürlich kompakt ist. Es gilt: $f(\overline{U_1}) \subseteq f(\tilde{U}_1) \subseteq W_1$.

Nach Casorati-Weierstraß ist nun wiederum $f(U_{\delta_1}(z_0) \setminus \{z_0\})$ dicht in $\mathbb{C}$. Also existiert natürlich auch ein $z_2 \in U_{\delta_1}(z_0) \setminus \{z_0\}$ mit $w_2 = f(z_2) \in f(\overline{U_1})^\circ$. Da f immer noch holomorph, insbesondere stetig ist, existiert Umgebung $\tilde{U}_2$ von z_2 und W_2 von w_2 , so daß $W_2 = f(\tilde{U}_2) \subset f(\overline{U_1})^\circ$ (Gleichheit wegen Gebietstreue erreichbar). Wähle $\tilde{U}_2$ so, daß $\tilde{U}_2 \subset U_{\delta_2}(z_2) \subset U$ mit $\delta_2 < \frac{|z_2 - z_1|}{3}$. Weiterhin existiert Umgebung U_2 von z_2 mit $\overline{U_2} \subset \tilde{U}_2$, wobei $\overline{U_2}$ natürlich kompakt ist. Es gilt:

$$f(\overline{U_2}) \subseteq W_2 \subseteq f(\overline{U_1})^\circ \subseteq f(\overline{U_1}) \subseteq W_1 \subseteq W.$$

Mittels Fortsetzung dieses Verfahrens erhält man also Umgebungen U_n mit $\overline{U_n}$ kompakt und paarweise disjunkt. Weiter gilt: $f(\overline{U_{n+1}}) \subset f(\overline{U_n})$, wobei die $f(\overline{U_j})$ kompakt sind, da f stetig. Wegen dieser Eigenschaften gilt: Es existiert ein a mit

$$a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f(\overline{U_n}) \subset W$$

und daher existieren $u_n \in \overline{U_n}$ mit $f(u_n) = a$ und alle u_n verschieden (die U_n waren ja paarweise disjunkt). Also wird a von f unendlich oft angenommen.

• **9. Serie, Aufgabe 1)**

Vorab: Für $R > 0$ gilt:

$$z_0 \in U_{\frac{1}{R}}(0) \setminus \{0\} \iff 0 < |z_0| < \frac{1}{R} \iff \frac{1}{|z_0|} > R \iff \frac{1}{z_0} \in \mathbb{C} \setminus \overline{U_R(0)}.$$

Daher sind

$$\frac{1}{z} : U_{\frac{1}{R}}(0) \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{U_R(0)}$$

und die Umkehrung:

$$\tilde{\frac{1}{z}} : \mathbb{C} \setminus \overline{U_R(0)} \longrightarrow U_{\frac{1}{R}}(0) \setminus \{0\}$$

holomorph auf ihren Definitionsbereichen.

a) Sei zunächst ∞ isolierte Singularität, d. h. 0 isolierte Singularität von $f\left(\frac{1}{z}\right)$. Daher ist f mit

$$f(z) = f \circ \left(\underbrace{\frac{1}{z} \circ \tilde{\frac{1}{z}}}_{\text{holomorph in } U_{\frac{1}{R}}(0) \setminus \{0\}} \right) = \underbrace{\left(f \circ \frac{1}{z} \right)}_{\text{holomorph in } U_{\frac{1}{R}}(0) \setminus \{0\}} \circ \underbrace{\tilde{\frac{1}{z}}}_{\text{holomorph}}$$

holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \overline{U_R(0)}$.

Sei nun $f(z)$ holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \overline{U_R(0)}$. Dann ist auch

$$f \circ \underbrace{\frac{1}{z}}_{\text{holomorph}} : U_{\frac{1}{R}}(0) \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

holomorph, also 0 isolierte Singularität von $f\left(\frac{1}{z}\right)$.

b) Da f analytisch auf $\mathbb{C}$, gilt für $z \in \mathbb{C}$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Damit gilt für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$:

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{z^n} = a_0 + \sum_{m=-\infty}^{-1} a_{-m} z^m.$$

Also: $f\left(\frac{1}{z}\right)$ hat hebbare Singularität in 0: $a_n = 0$ für alle $n \geq 1$. Dies gilt genau, wenn $f(z) \equiv a_0 = \text{const.}$

$f\left(\frac{1}{z}\right)$ hat Polstelle k -ter Ordnung in 0: $a_n = 0$ für $n > k$, $a_k \neq 0$. Dies gilt genau, wenn f Polynom vom Grade k ist.

$f\left(\frac{1}{z}\right)$ hat wesentliche Singularität in 0: unendlich viele $a_n \neq 0$. Dies gilt genau, wenn f kein Polynom ist.

• **9. Serie, Aufgabe 2)**

a)

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

ergibt einmal differenziert:

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n.$$

Daher gilt im angegebenen Gebiet:

$$\left(\frac{z-z_0}{z-a}\right)^2 = \left(\frac{1}{1-\frac{a-z_0}{z-z_0}}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(\frac{a-z_0}{z-z_0}\right)^n.$$

b) Die geometrische Reihe $(k-1)$ -mal differenziert ergibt:

$$(k-1) \cdot (k-2) \cdot \dots \cdot 1 \cdot \frac{1}{(1-z)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+k-1) \cdot (n+k-2) \cdot \dots \cdot (n+1) z^n.$$

Daher im angegebenen Gebiet:

$$\left(\frac{z}{z-1}\right)^k = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right)^k = \frac{1}{(k-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} (n+k-1) \cdot (n+k-2) \cdot \dots \cdot (n+1) \cdot z^{-n}.$$

c)

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{e^z}{z} \frac{1}{z(1-\frac{1}{z})} = \frac{e^z}{z^2} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-2}}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}\right) \\ &\stackrel{\text{Cauchy-Produkt}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^{k-2}}{k!} \cdot z^{-(n-k)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} z^{-n+2k-2} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{\substack{n \geq k \geq 0 \\ k = \frac{m+n+2}{2}}} \frac{1}{k!} \right) z^m. \end{aligned}$$

• 9. Serie, Aufgabe 3)

Definiere:

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi, \\ f_2(z) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi. \end{aligned}$$

Diese Funktionen f_i sind auf E_i analytisch und es gilt nach der Cauchy-Integralformel (analog wie im Beweis zur Laurentreihenentwicklung):

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z).$$

f_2 ist auch analytisch in ∞ , denn dieses f_2 ist dort durch 0 fortsetzbar:

$$\begin{aligned} |f_2(z)| &\leq \frac{1}{2\pi} \max_{\xi \in \gamma_2} \frac{|f(\xi)|}{|\xi-z|} l(\gamma_2) \\ &\leq \frac{1}{2\pi} l(\gamma_2) \cdot \max_{\xi \in \gamma_2} |f(\xi)| \cdot \frac{1}{\text{dist}(z, \gamma_2)} \\ &\xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{mit } \text{dist}(q, A) := \inf\{d(p, q) \mid p \in A\}). \end{aligned}$$

Zur Eindeutigkeit: Sei $f = f_1 + f_2 = \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2$. Dann gilt

$$f_1 - \tilde{f}_1 = \tilde{f}_2 - f_2$$

und damit kann man eine auf ganz $\widehat{C}$ analytische Funktion g definieren:

$$g := \begin{cases} f_1 - \tilde{f}_1 & z \in E_1 \\ \tilde{f}_2 - f_2 & z \in E_2 \cup \{\infty\} \end{cases} \quad \text{wohldefiniert .}$$

Nach Aufgabe 1b), 9. Serie, Seite 115, ist daher $g \equiv \text{const.}$ Also:

$$\begin{aligned} f_1 &= \tilde{f}_1 + \text{const} , \\ f_2 &= \tilde{f}_2 - \text{const} . \end{aligned}$$

• **9. Serie, Aufgabe 6)**

Zunächst: Sei $G \subset \mathbb{C}$ Gebiet, beschränkt. $h : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und auf $\overline{G}$ stetig, nicht konstant. Da $\overline{G}$ kompakt und $|h|$ stetig, wird das Maximum angenommen, d. h.

$$\exists z \in \overline{G} : \forall \xi \in \overline{G} : |h(\xi)| \leq |h(z)| .$$

Nach dem Maximumsprinzip ist h konstant oder $z \notin G$. Daher: $z \in \partial G$. Also wird das Maximum analytischer Funktionen auf dem Rand von kompakten Mengen angenommen.

- a) Definiere $g(z) := \frac{f(z)}{z}$ für $z \in U_1(0) \setminus \{0\}$ und $g(0) := f'(0)$. Da $f(0) = 0$ ist g holomorph auf $U_1(0)$, z. B. in 0:

$$g'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f'(z)z - \overbrace{f(z)}^{\rightarrow 0}}{z^2} \stackrel{\text{l'Hospital}}{=} f''(0) \in \mathbb{C} .$$

Da $|f(z)| < 1$, gilt für $0 < r < 1$:

$$\max_{z \in K_r(0)} |g(z)| \leq \frac{1}{r} .$$

Daher nach den Vorbetrachtungen: $|g(z)| \leq \frac{1}{r}$ für alle $z \in U_r(0)$ (wobei $0 < r < 1$). Mit $r \rightarrow 1$ erhält man also: $|g(z)| \leq 1$ für alle $z \in U_1(0)$. Also nach der Definition von g : $|f(z)| \leq |z|$ und $|g(0)| = |f'(0)| \leq 1$.

- b) Es gebe also ein $z_0 \in U_1(0) \setminus \{0\}$ mit $|f(z_0)| = |z_0|$ oder $|f'(0)| = 1$. Daher ist $|g(0)| = 1$ oder $|g(z_0)| = 1$. Also wird das Maximum von g im Inneren von $U_1(0)$ angenommen. Nach den Vorbetrachtungen ist dann g konstant. Also: $f(z) = a \cdot z$ mit $|a| = 1$ für alle $z \in U_1(0)$.

Zu Kapitel 6

• **9. Serie, Aufgabe 5)**

- a) $1 - \cos(z)$ hat bei 0 Nullstelle 2. Ordnung (betrachte Reihe). Also hat $\frac{1 - \cos(z)}{z^3}$ Pol 1. Ordnung. Daher:

$$\text{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(z)}{z^2} \stackrel{\text{zweimal l'Hospital}}{=} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos(z)}{2} = \frac{1}{2} .$$

- b) Pol 3. Ordnung bei $z = -1$. Also:

$$\text{Res}(f, -1) = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} z^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 .$$

c) Pol 2. Ordnung bei $z = 1$. Also:

$$\operatorname{Res}(f, 1) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} e^z = e .$$

• 10. Serie, Aufgabe 1)

a) $f(z)$ hat in $z = k\pi$ Pol 1. Ordnung, also:

$$\operatorname{Res}(f, k\pi) = \lim_{z \rightarrow k\pi} \frac{(z - k\pi)}{\sin(z)} = \lim_{z \rightarrow k\pi} \frac{1}{\cos(z)} = (-1)^k .$$

b) $f(z)$ hat in $z = 1$ Pol 1. Ordnung, also:

$$\operatorname{Res}(f, 1) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z}{(z - 2)^2} = 1 .$$

$f(z)$ hat in $z = 2$ Pol 2. Ordnung, somit:

$$\operatorname{Res}(f, 2) = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{d}{dz} \frac{z}{z - 1} = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{(z - 1) - z}{(z - 1)^2} = -1 .$$

c) Es gilt:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{(z - 1)^k} \quad \text{also: } \operatorname{Res}(f, 1) = 1 .$$

d) $f(z)$ hat in $z = 2k\pi i$ einen Pol 1. Ordnung, also:

$$\operatorname{Res}(f, 2k\pi i) = \lim_{z \rightarrow 2k\pi i} \frac{(z - 2k\pi i)}{1 - e^z} = \lim_{z \rightarrow 2k\pi i} \frac{1}{-e^z} = -1 .$$

• 10. Serie, Aufgabe 2)

a)

$$\int_{K_1(0)} \frac{e^z}{z} dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^z}{z}, 0\right) = 2\pi i .$$

b)

$$\int_{K_r(0)} \frac{f(z)}{(z - z_1) \cdot \dots \cdot (z - z_k)} dz = 2\pi i \sum_{i=1}^k \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \frac{f(z_i)}{(z_i - z_j)} .$$

• 10. Serie, Aufgabe 3)

a)

$$\int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_0^\pi \frac{\exp(ir \exp(it))}{r \exp(it)} ir \exp(it) dt = i \int_0^\pi e^{ir \cos(t)} e^{-r \sin(t)} dt .$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
 |I(r)| &= \left| \int_0^\pi e^{ir \cos(t)} e^{-r \sin(t)} dt \right| \\
 &\leq \int_0^\pi \underbrace{e^{ir \cos(t)}}_{=1} e^{-r \sin(t)} dt \\
 &= 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r \sin(t)} dt \\
 &\stackrel{\substack{t/2 \leq \sin(t) \\ t \in [0, \frac{\pi}{2}]}}{\leq} 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{rt}{2}} dt \\
 &= -\frac{4}{r} e^{-\frac{rt}{2}} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= -\frac{4}{r} (e^{-r \frac{\pi}{4}} - 1) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0.
 \end{aligned}$$

Zur benutzten Abschätzung: Zwischen 0 und $\frac{\pi}{3}$ steigt die Funktion $g(t) := \sin(t) - \frac{t}{2}$ monoton, zwischen $\frac{\pi}{3}$ und $\frac{\pi}{2}$ fällt sie monoton. Da $g(0) = 0$ und $g(\frac{\pi}{2}) > 0$ ist $g([0, \frac{\pi}{2}]) \subseteq \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$. Also gilt unsere Abschätzung.

b)

$$\begin{aligned}
 |I(r) - \pi i| &= \left| i \int_0^\pi (\exp(ir \exp(it)) - 1) dt \right| \\
 &\stackrel{|e^w - 1| \leq |w|e^{|w|}}{\leq} \int_0^\pi |ir \exp(it)| \exp(|ir \exp(it)|) dt \\
 &= \int_0^\pi r e^r dt = \pi r e^r \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0.
 \end{aligned}$$

Zum Beweis von $|e^w - 1| \leq |w|e^{|w|}$:

$$\begin{aligned}
 |e^w - 1| &= \left| \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} w^n - 1 \right| = \left| \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n!} w^n \right| \\
 &\leq \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n!} |w|^n = |w| \cdot \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+1)!} |w|^n \\
 &\stackrel{\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{n!}}{\leq} |w| e^{|w|}.
 \end{aligned}$$

• **10. Serie, Aufgabe 4)**

$\frac{e^{iz}}{z}$ ist analytisch für $z \neq 0$. $0 \in \text{ext}(\gamma)$ für die angegebene Kurve γ . Daher gilt nach dem Cauchy-Integralsatz:

$$\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z} dz = 0. \quad (\text{B.5})$$

Für den linken reellen Integralweg gilt:

$$\begin{aligned} \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{it}}{t} dt &= \int_{-R}^{-\varepsilon} \underbrace{\frac{\cos(t)}{t}}_{\text{ungerade}} dt + i \int_{-R}^{-\varepsilon} \underbrace{\frac{\sin(t)}{t}}_{\text{gerade}} dt \\ &= - \int_{\varepsilon}^R \frac{\cos(t)}{t} dt + i \int_{\varepsilon}^R \frac{\sin(t)}{t} dt \end{aligned}$$

und für den rechten reellen Integralweg:

$$\int_{\varepsilon}^R \frac{e^{it}}{t} dt = \int_{\varepsilon}^R \frac{\cos(t)}{t} dt + i \int_{\varepsilon}^R \frac{\sin(t)}{t} dt .$$

Mit Glg. (B.5) ergibt sich daher:

$$\begin{aligned} \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{it}}{t} dt + \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{it}}{t} dt &= - \int_{-\Gamma_{\varepsilon}(0)} \frac{e^{it}}{t} dt - \int_{\Gamma_R(0)} \frac{e^{it}}{t} dt \\ \Rightarrow 2i \int_{\varepsilon}^R \frac{\sin(t)}{t} dt &= -I(R) + I(\varepsilon) . \\ \Rightarrow 2i \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_{\varepsilon}^R \frac{\sin(t)}{t} dt &= \pi i . \\ \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt &= \frac{\pi}{2} . \end{aligned}$$

• 10. Serie, Aufgabe 5)

- a) Wähle $g(z) = z^6 - 4z^5 = z^5(z - 4)$. g hat in $U_1(0)$ 5 Nullstellen.

$$\begin{aligned} |g(z) - f(z)| &= |z^2 - 1| \leq |z|^2 + |-1| \\ &\stackrel{|z|=1}{=} 2 < 3 \stackrel{|z|=1}{=} ||z^6| - 4|z^5|| \leq |z^6 - 4z^5| = |g(z)| . \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Rouché hat f daher ebenfalls 5 Nullstellen auf $U_1(0)$.

- b) Zuerst: Wieviele Nullstellen hat f in $U_2(0)$? Wähle $g(z) = z^4$. g hat 4 Nullstellen in $U_2(0)$. Es gilt:

$$|f(z) - g(z)| = |5z - 1| \leq 5|z| + 1 \stackrel{|z|=2}{=} 11 < 16 \stackrel{|z|=2}{=} |z|^4 = |g(z)| .$$

Nach Rouché hat also auch f 4 Nullstellen in $U_2(0)$.

Nun: Wieviele Nullstellen hat f in $U_1(0)$? Wähle $g(z) = z^4 - 5z = z(z^3 - 5)$. g hat 1 Nullstelle in $U_1(0)$. Es gilt:

$$|f(z) - g(z)| = 1 < 4 \stackrel{|z|=1}{=} ||z|^4 - 5|z|| \leq |z^4 - 5z| = |g(z)| .$$

Nach Rouché hat also auch f 1 Nullstelle in $U_1(0)$. Weiterhin hat f keine Nullstelle auf $K_1(0)$, denn sonst wäre dort eben nicht die Bedingung $|g(z) - f(z)| < |g(z)|$ erfüllt gewesen.

Daraus ergibt sich nun: f hat in $K_{1,2}(0) = U_2(0) \setminus \overline{U_1(0)}$ genau $4 - 1 = 3$ Nullstellen.

Lösung zu den restlichen Aufgaben (alle Themen)

- **Aufgabe 1)**

Sei p Polynom mit $\text{grad}(p) \geq 1$.

Annahme: $p(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Also ist die Funktion $f(z) = \frac{1}{p(z)}$ eine auf ganz $\mathbb{C}$ analytische Funktion. Für Polynome gilt (mit geeigneten M, R): $|p(z)| \geq M \cdot |z|^n$, falls $|z| \geq R$. Daher für $|z| > R$:

$$|f(z)| = \left| \frac{1}{p(z)} \right| \leq \frac{1}{M|z|^n} \leq \frac{1}{M \cdot R^n}.$$

Für $|z| < R$: Auf $\overline{U_R(0)}$ ist $|f(z)|$ beschränkt, weil wegen der Stetigkeit von f und der Kompaktheit von $\overline{U_R(0)}$ das Maximum angenommen wird.

Also ist f auch auf ganz $\mathbb{C}$ beschränkt; außerhalb von $\overline{U_R(0)}$ ist ja $\frac{1}{M \cdot R^n}$ Schranke. Nach Liouville folgt: $f \equiv \text{const}$. Daher: $p(z) \equiv \text{const}$ mit Widerspruch zu $\text{grad}(p) \geq 1$.

- **Aufgabe 2)**

Fall 1: $g(z)$ hat in 0 hebbare Singularität. Dann ist f konstant.

Fall 2: $g(z)$ hat in 0 wesentliche Singularität. Dann folgt mit dem Satz von Picard gerade, daß $\#(\mathbb{C} \setminus f(\mathbb{C})) \leq 1$.

Fall 3: $g(z)$ hat in 0 einen Pol. Dann ist f ein Polynom vom Grad $n \geq 1$ (vgl. Aufgabe 1, Serie 9). Nach dem Fundamentalsatz der Algebra ist f dann surjektiv (denn: sei $c \in \mathbb{C}$: bilde $p(z) - c = 0$). Also: $\#(\mathbb{C} \setminus f(\mathbb{C})) = 0$.

- **Aufgabe 3)**

Fall 1: $p(z) = z^n$: fertig (wähle einfach ein $z \in K_R(0)$).

Fall 2: **Annahme:**

$$\forall z \in K_R(0) : |p(z)| < R^n.$$

Sei

$$g(z) = a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0 \quad \text{und} \quad f(z) = -z^n.$$

Auf $K_R(0)$ gilt dann:

$$|g(z) - (-z^n)| = |p(z)| < R^n = |-z^n|.$$

Nach dem Satz von Rouché hat g also in $U_R(0)$ n Nullstellen. Dies ist ein Widerspruch, da g genau $n-1$ Nullstellen (den Vielfachheiten gemäß gezählt) hat.

- **Aufgabe 4)**

Sei

$$g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n.$$

Dann gilt:

$$g'(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{n \cdot a_n}_{=b_{n-1}} z^{n-1}.$$

Also: $b_{-1} = 0 \cdot a_0 = 0$.

Weiter $h(z) := \exp(g(z))$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= 2\pi i \operatorname{Res}(g', 0) = \int_{K_\varepsilon(0)} g'(z) dz \\ &\stackrel{h \neq 0}{=} \int_{K_\varepsilon(0)} \frac{g'(z) \cdot h(z)}{h(z)} dz = \int_{K_\varepsilon(0)} \frac{h'(z)}{h(z)} dz . \end{aligned}$$

Unter der Annahme, in 0 befinde sich ein Pol oder eine durch 0 hebbare Singularität, ergibt sich mittels Argumentprinzip, daß die Zahl der Nullstellen (nach Vielfachheiten gezählt) von h in $U_\varepsilon(0)$ gleich der Zahl der Polstellen (nach Ordnungen gezählt) von h in $U_\varepsilon(0)$ ist. Also hat h in 0 einen Pol k -ter Ordnung genau dann, wenn h in 0 eine Nullstelle k -ter Ordnung hat, denn andere $z \in U_\varepsilon(0)$ kommen offensichtlich nicht für Nullstellen und Pole in Frage. h kann aber nicht gleichzeitig einen Pol und eine Nullstelle in 0 haben, daher hat h weder Pol noch Nullstelle in 0.

C. Ergänzungen

In diesem Kapitel ergänze ich ein paar Dinge, bei denen Prof. Armbrust nur auf die entsprechende Literatur verwiesen hat. Die Seitenzahlen von Prof. Armbrust stimmen auflagenbedingt nicht immer mit denen überein, auf denen ich das Stichwort gefunden habe, aber das ist ja ein bekanntes Phänomen.

Wie zu erwarten war, ersieht man aus diesen Lehrbüchern, daß man die Funktionentheorie deutlich formaler aufziehen kann; für einen Überblick hat Prof. Armbrust aber gesorgt.

Für die Zusammenstellung dieses Kapitels brauchte ich leider drei Semester. Ich bedauere dies sehr; der einzige Vorteil, der aus der Verspätung entstand, ist der, daß ich aus dem Reckziegel-Skript zur Differentialgeometrie zitieren kann. . .

Nun zu den einzelnen Ergänzungen:

C.1 Der Weierstraß'sche Konvergenzsatz

In 3.1 auf Seite 18 gab Prof. Armbrust einen Satz an (Satz 3), dessen Sinn mir bis heute verborgen geblieben ist. Die Aussage ist zwar ohne Zweifel korrekt, nur kann man sie nicht einfach auf einen reellen Beweis zurückführen. Weiterhin ist die entsprechende reelle Aussage viel eingeschränkter als die komplexe (das ist der Weierstraß'sche Konvergenzsatz (s. u.)), denn im Reellen muß man fordern, daß die Folge der Ableitungen f'_n gegen eine Funktion g gleichmäßig konvergiert, im Komplexen ist dies nicht nötig. Also ist mir nicht klar, warum dies in Satz 3 dennoch gefordert wird, denn der reelle Beweis ist ja nicht übertragbar.

Die Aussage, die wir in 3.1 benötigen, ist lediglich das Korollar für die Potenzreihe, das wir bei Prof. Reckziegel ja bewiesen haben. Alles Weitere baut nur auf diesem Korollar auf; wir machen also keinen Zirkelschluß, wenn wir nun Aussagen aus späteren Kapiteln zum Beweis des Weierstraß'schen Konvergenzsatzes benutzen. Weiterhin ist die Richtigkeit des Weierstraß'schen Konvergenzsatzes sofort anschaulich klar, wenn man bedenkt, daß jede analytische Funktion in eine Potenzreihe auf einer Umgebung entwickelbar ist, und für Potenzreihen haben wir ja den Satz bei Prof. Reckziegel bewiesen.

Dies wäre natürlich schon eine erste Beweisidee. Wir wählen allerdings eine andere, auch weil diese Potenzreihen-Idee sich formal schwerer packen läßt als die, der wir folgen wollen. Für diese benötigen wir zunächst eine

Definition: Eine Funktionenfolge (f_n) , deren Funktionen f_n auf einem Gebiet G definiert sind, konvergiert *auf dem Gebiet G kompakt* gegen eine Funktion F , wenn für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq G$ die Konvergenz von f_n gegen F auf K gleichmäßig ist.

Häufig wird diese kompakte Konvergenz auch als *gleichmäßige Konvergenz im Inneren von G* bezeichnet.

Bei Autoren, die diesen Konvergenzbegriff mit *gleichmäßiger Konvergenz im Inneren von G* bezeichnen, muß man aufpassen, dies nicht mit *gleichmäßiger Konvergenz auf G* zu verwechseln.

Beispiel: Die Folge $f_n(z) = z^n$ konvergiert in $|z| \leq r < 1$ gleichmäßig gegen die Grenzfunktion $F \equiv 0$. Auf $U_1(0)$ konvergiert diese Folge (f_n) zwar kompakt gegen F , aber keinesfalls gleichmäßig.

Nun zu unserem Konvergenzsatz:

Weierstraß'scher Konvergenzsatz: Die Folge (f_n) von auf G definierten Funktionen f_n sei kompakt konvergent auf G . Alle Funktionen f_n seien außerdem in G analytisch. Dann ist dort auch

$$F = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$$

analytisch. Weiterhin darf man daher beliebig oft differenzieren und es gilt:

$$F^{(k)} = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{(k)}$$

(man darf also einfach glied- oder komponentenweise differenzieren) und $\lim f_n^{(k)}$ konvergiert kompakt auf G gegen $F^{(k)}$.

Beweis: Zuerst ist zu beweisen, daß F analytisch ist: Sei $z_0 \in G$ und $z_0 \neq \infty$. U sei eine Umgebung um z_0 , deren topologischer Abschluß noch in G liegt (im folgenden kann dann oBdA. $\overline{U}$ als kompakte Teilmenge von G angesehen werden (evtl. Verkleinern oder Beschränkung durch geschlossene Kurve). Entsprechend können wir statt von kompakter Konvergenz direkt von gleichmäßiger Konvergenz sprechen). Dann ist nach dem 1. Vererbungssatz¹ wegen der Stetigkeit der f_n auch F stetig in U (und daher längs einer Kurve γ integrierbar). Ferner ist für jede geschlossene Kurve γ in U :

$$\int_{\gamma} F(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz = 0 ,$$

und zwar gilt die erste Gleichung wegen der Vertauschbarkeit von Integral (die Integralabbildung ist linear und daher glm. stetig) und gleichmäßiger Konvergenz² und die zweite wegen des Cauchy-Integralsatzes. Nach dem Satz von Morera (Seite 41) folgt daraus die Holomorphie von F in U .

Liegt $z_0 = \infty$ in G , so setzen wir:

$$H(z) = F\left(\frac{1}{z}\right) \quad \text{und} \quad h_n(z) = f_n\left(\frac{1}{z}\right) ,$$

betrachten

$$H(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(z)$$

in einer Umgebung von $z^* = 0$ und schließen genau wie vorher.

Zur gliedweisen Differentiation

Sei $z_0 \in G$ und $z_0 \neq \infty$. Weiter seien U_δ und $U_{\frac{\delta}{2}}$ zwei Umgebungen um z_0 in G , so daß das $\overline{U_\delta}$, das ja kompakt ist, noch ganz in G liegt. Nach obigen Ausführungen ist dann F in U_δ holomorph. Da ferner die Folge (f_n) auf G kompakt konvergiert, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0 , so daß für $n_1 > n_0$ und alle Punkte $\xi \in U_\delta$ gilt:

$$|F(\xi) - f_{n_1}(\xi)| < \varepsilon .$$

¹Erinnerung: Analysis I, 5.4.

²vgl. Analysis I, 5.4 , 5.7 und 5.12.

Daher gilt für $z \in U_{\frac{\delta}{2}}$:

$$\begin{aligned} \left| F^{(k)}(z) - f_{n_1}^{(k)}(z) \right| &= \left| \frac{k!}{2\pi i} \int_{U_\delta} \frac{F(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} d\xi - \frac{k!}{2\pi i} \int_{U_\delta} \frac{f_{n_1}(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} d\xi \right| \\ &= \left| \frac{k!}{2\pi i} \int_{U_\delta} \frac{F(\xi) - f_{n_1}(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} d\xi \right| \\ &< \frac{k!}{2\pi} \frac{\varepsilon}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^{k+1}} 2\pi\delta = \frac{2^{k+1}k!}{\delta^k} \cdot \varepsilon. \end{aligned}$$

Weil ε beliebig gewählt werden kann, so hat man gleichmäßig in $U_{\frac{\delta}{2}}$:

$$F^{(k)}(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{(k)}(z)$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.

Liegt $z_0 = \infty$ in G , so betrachten wir H und h_n wie oben in der Umgebung des Nullpunktes und schließen wie vorher aus der kompakten Konvergenz von $H(z) = \lim h_n(z)$ auf die Gültigkeit der Beziehung

$$H'(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} h'_n(z)$$

und die gleichmäßige Konvergenz dieser Folge in einer Umgebung von $z^* = 0$. Aus den Beziehungen $F(z) = H\left(\frac{1}{z}\right)$ und $f_n(z) = h_n\left(\frac{1}{z}\right)$ folgt dann:

$$F'(z) = -\frac{1}{z^2} H'\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2} \lim_{n \rightarrow \infty} h'_n\left(\frac{1}{z}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(z)$$

in einer Umgebung von $z_0 = \infty$ und die gleichmäßige Konvergenz der letzten Folge auf dieser Umgebung. Wiederholt man diesen Schluß k -mal, so ergeben sich diese Aussagen auch für die k -ten Ableitungen.

Zur kompakten Konvergenz

Sei $K \subseteq G$ eine vorgegebene kompakte Teilmenge. Zu jedem $z \in K$ wähle Umgebungen U_{δ_z} und $U_{\delta_z/2}$ wie oben bei den Beweisschritten zur gliedweisen Differentiation (dies ist möglich, weil ja G offen ist). Auf den $U_{\delta_z/2}$ konvergieren die f_n — wie eben bewiesen — gleichmäßig gegen F . Da K kompakt ist, reichen endlich viele (sagen wir s) Umgebungen aus, K zu überdecken. Wir numerieren sie durch: $U_1, \dots, U_s$. Zu jedem ε existieren wegen der glm. Konvergenz Zahlen $n_k(\varepsilon)$, ($k = 1, \dots, s$) derart, daß

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \quad (*)$$

für alle $n > n_k(\varepsilon)$ und alle z aus der jeweiligen Umgebung U_k . Sei $n_0 := \max(n_1, \dots, n_s)$. Dann ist für alle $z \in K$ und $n > n_0$ die Ungleichung $(*)$ erfüllt, also konvergieren die f_n gleichmäßig gegen F auf K , und dies ist gleichbedeutend mit der kompakten Konvergenz auf G , da K eine beliebige kompakte Teilmenge war. ■

Natürlich folgen aus diesen Aussagen die entsprechenden Aussagen für Funktionenreihen in der üblichen Weise³

$$F(z) = \sum_{n=m}^{\infty} f_n(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=m}^k f_n(z).$$

³zur Erinnerung: analog wie in Analysis II, 9.8.

Falls G beschränkt, so kann man, falls die Folge (f_n) in $\overline{G}$ stetig und in G analytisch ist, die gleichmäßige Konvergenz von f_n gegen F (wobei F mit den gleichen Eigenschaften wie die f_n) einfach überprüfen: Wenn nämlich $f_n|_{\partial G}$ gleichmäßig in ∂G gegen $F|_{\partial G}$ konvergiert, so konvergiert bereits f_n auf ganz $\overline{G}$ gleichmäßig gegen F . Nach der Vorbetrachtung zur Aufgabe auf Seite 117 gilt nämlich für die Supremum-Normen:

$$|f_m - f_n|_{\overline{G}} = |f_m - f_n|_{\partial G}.$$

Da $f_n|_{\partial G}$ eine Cauchy-Folge bzgl. $|\cdot|_{\partial G}$ ist, ist $f_n|_{\overline{G}}$ eine Cauchy-Folge bzgl. $|\cdot|_{\overline{G}}$. Da $B(\overline{G}, \mathbb{C})$ vollständig (weil $\mathbb{C}$ vollständig), gilt also das Behauptete (daß F die gleichen Eigenschaften hat wie die f_n , folgt ja mit dem 1. Vererbungssatz und dem eben bewiesenen Weierstraß'schen Konvergenzsatz; das war also keine zusätzliche Voraussetzung).

Vorsicht! Man kann hiermit zwar überprüfen, daß z. B.

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

auf ganz $\overline{U_1(0)}$ glm. konvergiert, aber die Holomorphie von F und damit Existenz von

$$F'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n}$$

ist nach dem Weierstraß'schen Konvergenzsatz natürlich nur auf $U_1(0)$ gesichert. Und in der Tat konvergiert $F'(z)$ in manchen $z \in K_1(0)$ noch nicht einmal bedingt.

Nochmals betonen möchte ich, daß im **Reellen** die gleichmäßige Konvergenz von f'_n gegen eine Funktion g Voraussetzung ist, um gliedweise differenzieren zu können. Im **Komplexen** — dank der schönen Eigenschaft Holomorphie — überflüssig.

C.2 Stammfunktionen und Wegunabhängigkeit

Auf Seite 30 in 4.1 haben wir für stückweise glatte Wege gezeigt, daß aus F Stammfunktion zu f folgt, daß die Integrale von f über diese Wege wegunabhängig sind. Man steht häufig vor dem Problem, etwas einfach für stückweise glatte Wege zeigen zu können, die Verallgemeinerung auf beliebige Wege aber wünschenswert ist. Um dieses allgemeine Problem ein für allemal zu lösen, beweisen wir das folgende Lemma. Wir haben es bisher mit völliger Selbstverständlichkeit benutzt.

Lemma: Sei G ein Gebiet, $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ sei ein rektifizierbarer Weg und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ sei stetig. Dann existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein Polygonweg Γ in G , so daß $\Gamma(a) = \gamma(a)$, $\Gamma(b) = \gamma(b)$ und

$$\left| \int_{\gamma} f - \int_{\Gamma} f \right| < \varepsilon.$$

Beweis: Zunächst sei G eine Scheibe, also ein $U_r(z_0)$. Die Länge von γ sei durch $l(\gamma)$ bezeichnet. Sei ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Definiere $\hat{\varepsilon} := \frac{\varepsilon}{1+l(\gamma)}$. Da $\gamma([a, b])$ kompakt, ist $d := \text{dist}(\gamma([a, b]), \partial G) > 0$.

Wir können daher die Scheibe auf $U_{\rho}(z_0)$ mit $\rho = r - \frac{d}{2}$ verkleinern, so daß f auf $\overline{U_{\rho}(z_0)}$ gleichmäßig konvergiert. OE sei g bereits das verkleinerte $U_{\rho}(z_0)$. Wähle nun δ so, daß für $|z - w| < \delta$ durch die glm. Stetigkeit von f $|f(z) - f(w)| < \hat{\varepsilon}$ gilt. Da γ ein Weg auf $[a, b]$ und somit glm. stetig ist, kann man eine Zerlegung (t_k) von $[a, b]$ finden, so daß

$$|\gamma(s) - \gamma(t)| < \delta \tag{C.1}$$

mit $t_{k-1} \leq s, t \leq t_k$ und außerdem aufgrund der Integraldefinition

$$\left| \int_{\gamma} f - \sum_{k=1}^n f(\gamma(\tau_k)) [\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})] \right| < \hat{\varepsilon} \quad (\text{C.2})$$

mit $t_{k-1} \leq \tau_k \leq t_k$ gilt. Definiere nun $\Gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{C}$ durch

$$\Gamma(t) := \frac{1}{t_k - t_{k-1}} [(t_k - t)\gamma(t_{k-1}) + (t - t_{k-1})\gamma(t_k)] ,$$

wobei $t_{k-1} \leq t \leq t_k$. Auf $[t_{k-1}, t_k]$ ist Γ eine gerade Linie, also ist Γ auf G ein Polygonweg.

Weil $\int_{\Gamma} f = \int_a^b f(\Gamma(t))\Gamma'(t) dt$, folgt:

$$\int_{\Gamma} f = \sum_{k=1}^n \frac{\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\Gamma(t)) dt .$$

Mit der Integralabschätzung (C.2) erhalten wir

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f - \int_{\Gamma} f \right| &\leq \hat{\varepsilon} + \left| \sum_{k=1}^n f(\gamma(\tau_k)) [\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})] - \int_{\Gamma} f \right| \\ &\leq \hat{\varepsilon} + \sum_{k=1}^n \frac{|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})|}{t_k - t_{k-1}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |f(\Gamma(t)) - f(\gamma(\tau_k))| dt . \end{aligned}$$

Wegen Glg. (C.1) gilt auch (denn die Figur, die durch die Verbindungsgeraden von $\gamma(s)$ nach $\gamma(t)$ (mit s, t wie oben bei Glg. (C.1)) ausgefüllt wird, ist konvex mit einem Durchmesser kleiner δ):

$$|\Gamma(t) - \gamma(\tau_k)| < \delta \quad \text{für } t_{k-1} \leq t \leq t_k .$$

Damit ergibt sich, unter Einbeziehung der glm. Stetigkeit von f :

$$\left| \int_{\gamma} f - \int_{\Gamma} f \right| \leq \hat{\varepsilon} + \hat{\varepsilon} \sum_{k=1}^n |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \leq \hat{\varepsilon}(1 + l(\gamma)) = \varepsilon .$$

Damit ist der Fall der Scheibe bewiesen.

Nun sei G beliebig. Es gibt eine Zahl r , so daß $0 < r < \text{dist}(\gamma([a, b]), \partial G)$ (denn $\gamma([a, b])$ ist ja kompakt). Wähle $\delta > 0$ so, daß $|\gamma(s) - \gamma(t)| < r$, wenn $|t - s| < \delta$. Suche eine Zerlegung von $[a, b]$ derart, daß $|t_k - t_{k-1}| < \delta$ für alle k . Mit der Definition von $\gamma_k : [t_{k-1}, t_k] \rightarrow G$ durch $\gamma_k(t) := \gamma(t)$ erhalten wir Wege, deren Bilder $\gamma_k([t_{k-1}, t_k])$ in $U_r(\gamma(t_{k-1}))$ enthalten sind. Mit dem eben betrachteten Fall ergeben sich dann Polygonwege Γ_k mit den Eigenschaften

$\Gamma_k(t_{k-1}) = \gamma(t_{k-1})$, $\Gamma_k(t_k) = \gamma(t_k)$ und $\left| \int_{\gamma_k} f - \int_{\Gamma_k} f \right| < \frac{\varepsilon}{n}$. Durch Zusammensetzen der Γ_k erhält man schließlich die gesuchten Polygonwege.

Nun ist auch die Verallgemeinerung in unserem Spezialfall einfach: Sei ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir finden dann nach dem Lemma einen Polygonweg Γ von z_1 nach z_2 derart, daß $\left| \int_{\gamma} f - \int_{\Gamma} f \right| < \varepsilon$. Da

Γ stückweise glatt, gilt — wie bereits in 4.1 bewiesen — die Gleichung $\int_{\Gamma} f = F(z_2) - F(z_1)$. Also

$\left| \int_{\gamma} f - (F(z_2) - F(z_1)) \right| < \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, gilt die Wegunabhängigkeit für beliebige rektifizierbare Wege.

C.3 Der Cauchy–Integralsatz

Auf Seite 33 haben wir den *Cauchy-Integralsatz* sehr elegant bewiesen, indem wir die Voraussetzungen etwas erweitert haben. Wenn man den Cauchy–Integralsatz mit seinen ursprünglichen Voraussetzungen beweisen möchte, so benutzt man ebenfalls ein Lemma, das dem Lemma aus dem vorigen Abschnitt sehr ähnlich ist. Ich skizziere hier die Vorgehensweise nur. Wieder wird die Kurve γ durch Polygonwege angenähert. Nun braucht man nur noch zu zeigen, daß der Cauchy-Integralsatz über Polygonwege gilt. Und wiederum nähert man an: Diesmal füllt man die geschlossenen Polygonzüge durch Dreiecke aus.

Um den Cauchy–Integralsatz über die Dreiecke zu beweisen, geht man sukzessive zu kleineren Dreiecken über, indem man das ursprüngliche Dreieck durch 4 Teildreiecke ausfüllt. Das Integral über das ursprüngliche Dreieck wird abgeschätzt durch das größte Integral der Teildreiecke. Diese Teildreiecke konvergieren gegen z_0 innerhalb des ursprünglichen Dreiecks. Es ergibt sich folgende Abschätzung:

$$\left| \int_{\Delta} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\Delta_{k_n}^n} f(z) dz \right|.$$

Wenn das Dreieck klein genug ist, ersetzt man die Funktion f in einer kleinen Umgebung um das Dreieck mittels

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + (z - z_0)\eta(z).$$

Dabei ist $|\eta(z)| < \varepsilon$ auf dieser Umgebung. Nun erkennt man das Verschwinden der Integrale $\int_{\Delta_{k_n}^n} dz$ und

$\int_{\Delta_{k_n}^n} (z - z_0) dz$, da Stammfunktionen existieren. Das Integral über den letzten Term läßt sich abschätzen

gegen $2\varepsilon D_n^2$, wobei D_n der halbe Dreiecksumfang des Teildreiecks der n -ten Teilung. Man kann die Teilungen nun so konstruieren, daß $D_n = \frac{D_0}{2^n}$ gilt. Es ergibt sich dann als Abschätzung für beliebiges ε

$$\left| \int_{\Delta} f(z) dz \right| < 2\varepsilon S_0^2,$$

womit die Behauptung folgt, daß $\int_{\Delta} f(z) dz = 0$ ist. Mit den ganzen anderen Näherungen ist dann sogar der ganze Cauchy–Integralsatz bewiesen.

Ich finde, der Beweis von Seite 33 ist viel schöner...

C.4 Beschränktheit von $\cot(\pi z)$ auf C_N

Ich will hier darstellen, daß — wie auf Seite 66 behauptet — auf der Kurve C_N die Funktion $\cot(\pi z)$ durch $P = \coth(\frac{\pi}{2})$ beschränkt ist:

Wir unterscheiden drei Fälle ($z = x + iy$):

- Teil von C_N mit $y > \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
 |\cot(\pi z)| &= \left| \frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}} \right| \\
 &\leq \frac{|e^{i\pi z}| + |e^{-i\pi z}|}{||e^{i\pi z}| - |e^{-i\pi z}||} = \frac{|e^{i\pi x - \pi y}| + |e^{-i\pi x + \pi y}|}{|e^{-i\pi x + \pi y}| - |e^{i\pi x - \pi y}|} \\
 &= \frac{e^{-\pi y} + e^{\pi y}}{e^{\pi y} - e^{-\pi y}} = \frac{1 + e^{-2\pi y}}{1 - e^{-2\pi y}} \\
 &\leq \frac{1 + e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}} = \frac{e^{\pi/2} + e^{-\pi/2}}{e^{\pi/2} - e^{-\pi/2}} = \coth\left(\frac{\pi}{2}\right) = P.
 \end{aligned}$$

- Teil von C_N mit $y < -\frac{1}{2}$: Wie im ersten Fall gilt:

$$\begin{aligned}
 |\cot(\pi z)| &= \left| \frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}} \right| \\
 &\leq \frac{|e^{i\pi z}| + |e^{-i\pi z}|}{||e^{i\pi z}| - |e^{-i\pi z}||} = \frac{|e^{i\pi x - \pi y}| + |e^{-i\pi x + \pi y}|}{|e^{i\pi x - \pi y}| - |e^{-i\pi x + \pi y}|} \\
 &= \frac{e^{-\pi y} + e^{\pi y}}{e^{-\pi y} - e^{\pi y}} = \frac{1 + e^{2\pi y}}{1 - e^{2\pi y}} \\
 &\leq \frac{1 + e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}} = \frac{e^{\pi/2} + e^{-\pi/2}}{e^{\pi/2} - e^{-\pi/2}} = \coth\left(\frac{\pi}{2}\right) = P.
 \end{aligned}$$

- Teil von C_N mit $-\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$:

Betrachte zuerst den Teil des Weges mit $z = N + \frac{1}{2} + iy$. Dann:

$$\begin{aligned}
 |\cot(\pi z)| &= |\cot(\pi(N + \frac{1}{2} + iy))| = \frac{|\cos(\pi(N + \frac{1}{2} + iy))|}{|\sin(\pi(N + \frac{1}{2} + iy))|} \\
 &= \frac{|\sin(\pi iy)|}{|\cos(\pi iy)|} \stackrel{\text{vgl. Seite 15}}{=} \frac{|i \cdot \sinh(\pi y)|}{|\cosh(\pi y)|} \\
 &= |\tanh(\pi y)| \leq \tanh\left(\frac{\pi}{2}\right) \stackrel{\sinh < \cosh}{\leq} \coth\left(\frac{\pi}{2}\right) = P.
 \end{aligned}$$

Natürlich funktioniert diese Betrachtung für $z = -N - \frac{1}{2} + iy$ genauso.

Wir haben damit für beliebige Punkte $z \in C_N$ die Behauptung

$$|\cot(\pi z)| \leq \coth\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

gezeigt.

C.5 Der Riemann'sche Abbildungssatz

C.6 Der Monodromiesatz

C.7 Meromorphe Funktionen

Auf Seite 68 in Abschnitt 6.2 habe ich bereits einige Aussagen zu meromorphen Funktionen zusammengestellt. Es fehlten die Beweise. Diese sollen jetzt nachgeliefert werden.

Als erstes präzisieren wir die **Definition:** Eine Funktion heißt *meromorph* in einem Gebiet G , wenn es eine diskrete Teilmenge $P(f)$ von G gibt, so daß f in $G \setminus P(f)$ analytisch ist und in jedem Punkt von $P(f)$ einen Pol hat.

Die Menge $P(f)$ nennen wir die *Polstellenmenge* von f . Die Forderung an $P(f)$, diskret zu sein, garantiert, daß f in jedem Punkt auch wirklich einen Pol besitzen kann. Denn die Eigenschaft eines Punktes, Pol zu sein, ist nach unserer Definition ja daran gebunden, daß f in diesem Punkt eine isolierte Singularität hat. (Also ist unsere „präzisierende Definition“ redundant formuliert.) Da $P(f)$ diskret ist, ist $P(f)$ natürlich auch abgeschlossen⁴.

Der Fall einer leeren Polstellenmenge ist zugelassen. Also sind analytische Funktionen auch meromorph.

Falls $P(f) \neq \emptyset$, dann kann man die analytische Funktion $f : G \setminus P(f) \rightarrow \mathbb{C}$ auf G stetig fortsetzen, indem man für die Pole p die Werte $f(p) := \infty$ definiert. Man erhält damit eine Funktion, die wir weiterhin f nennen, mit dem erweiterten Wertebereich $\hat{\mathbb{C}} : f : G \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$.

Beispiele

Wir wiederholen nochmal die **Beispiele** aus Abschnitt 6.2.

Ein Beispiel waren die rationalen Funktionen. Sie besitzen endlich viele Pole, nämlich gerade die Nullstellen des Nennerpolynoms.

Ein anderes Beispiel war die Funktion $\cot(z)$. Sie besitzt abzählbar unendlich viele Pole, nämlich gerade die Nullstellen von $\sin(z)$. Also: $P(f) = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Anzahl der Pole

Die Anzahl der Pole kann Null sein (wenn $P(f) = \emptyset$), sie kann endlich sein (z.B. bei rationalen Funktionen) oder sie kann abzählbar unendlich sein. Sind dies alle Möglichkeiten, oder kann $P(f)$ auch überabzählbar viele Pole enthalten?

Nein, das kann nicht passieren. Denn $\mathbb{C}$, das ja isomorph zum $\mathbb{R}^2$ ist, hat abzählbare Topologie⁵. Diese abzählbare Topologie besteht z.B. aus den Umgebungen $U_{\frac{1}{n}}(\frac{p}{q})$ mit $p, q, n \in \mathbb{Z}$. Nach dem Satz von Lindelöf⁶ enthält dann jede offene Überdeckung von $\mathbb{C}$ eine höchstens abzählbare Überdeckung. Mit $G \setminus P(f)$ und Umgebungen um $p \in P(f)$, die die Pole p isolieren, erhält man eine Überdeckung von $\mathbb{C}$. Da die Anzahl der Pole gleich der Anzahl der Umgebungen der höchstens abzählbaren Überdeckung minus 1, ist auch die Anzahl der Pole höchstens abzählbar.

$\mathcal{M}(G)$ ist eine $\mathbb{C}$ -Algebra

Sei $c \in G$. Nach dem Laurententwicklungssatz läßt sich eine meromorphe Funktion in einer Umgebung um c darstellen mittels

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n(z-c)^n$$

mit $a_m \neq 0$ und $m \in \mathbb{Z}$ (der Ordnung des Pols).

Behauptung: Meromorphe Funktionen lassen sich addieren und multiplizieren, sie bilden also eine $\mathbb{C}$ -Algebra.

⁴Dazu ist ja wohl nichts weiter zu sagen, schließlich müssen ja — wegen $P(f)$ diskret — die Endstücke der Folge konstant sein.

⁵Definition dieses Begriffes: Anhang Diffgeo-Skript, Top. 5. In Diffgeo I, 7.2 ist gezeigt, daß affine Räume parakompakt sind. Der wegweise Zusammenhang affiner Räume ist klar. Nach Diffgeo I, 7.1 sind affine Räume topologische Mannigfaltigkeiten. Daher (Diffgeo I, 7.2) haben alle affinen Räume abzählbare Topologie.

⁶Anhang Diffgeo-Skript, Top. 9.

Beweis: Diese Aussage gilt natürlich für analytische Funktionen (siehe Seite 17).

Sei nun f und g meromorph. Da $P(f)$ und $P(g)$ diskret, ist auch $P(f) \cup P(g)$ diskret. Auf $G \setminus (P(f) \cup P(g))$ ist $f + g$ und $f \cdot g$ analytisch.

Zu jedem Punkt $c \in P(f) \cup P(g)$ betrachte die Funktionen $(z - c)^m f(z)$ (m : Ordnung des Pols c von f) und $(z - c)^n g(z)$ (n : Ordnung des Pols c von g). Auf einer Umgebung $U \subseteq G$ von c sind diese Funktionen beschränkt, also sind auch die Funktionen

$$(z - c)^{m+n} \cdot [f(z) + g(z)] \quad \text{und} \quad (z - c)^{m+n} \cdot [f(z) \cdot g(z)]$$

auf dieser Umgebung beschränkt. Der Punkt c kann also keine wesentliche Singularität sein. Ist c eine hebbare Singularität von $f + g$ bzw. $f \cdot g$, so sind diese in c analytisch. Die Polstellenmengen von $f + g$ bzw. $f \cdot g$ sind also Teilmengen von $P(f) \cup P(g)$ und damit diskret und in allen anderen Punkten analytisch. Also ist damit die Behauptung bewiesen. ■

Mit f ist auch f' meromorph in G ; sie haben dieselbe Polstellenmenge: $P(f) = P(g)$.

Dies ist direkt klar, da auch die Laurentreihen gliedweise differenziert werden können (na gut, das haben wir nie bewiesen, aber es stimmt...). Daher sind Polstellen von f auch Polstellen von f' , wobei die Ordnung des Pols beim Differenzieren um Eins steigt. Punkte, in denen f analytisch ist, sind natürlich auch analytische Punkte von f' , wie schon lange bekannt (Cauchy-Formeln).

$\mathcal{M}(G)$ ist sogar ein Körper

Zwei analytische Funktionen kann man im allg. nicht dividieren, denn eine Funktion $\frac{f}{g}$ hätte an den Nullstellen von g Singularitäten. Daher:

Definition: Die Nullstellenmenge $N(f)$ einer meromorphen Funktion $f \neq 0$ ist die Menge:

$$N(f) = \{ z \in G \setminus P(f) \mid f(z) = 0 \}.$$

Da nach Satz 5 auf Seite 42 die Nullstellen für $f \neq 0$ durch Umgebungen isoliert werden können (vgl. auch Satz 6), ist auch die Nullstellenmenge (neben der Polstellenmenge) diskret (und daher auch abgeschlossen). Beachte (um Satz 5 anwenden zu können): Mit G Gebiet (nach Voraussetzung) ist auch $G \setminus P(f)$ ein Gebiet ($P(f)$ diskret und abgeschlossen).

Behauptung: Sei f und $g \neq 0$ meromorph. Dann ist auch $\frac{f}{g}$ meromorph. Also bildet $\mathcal{M}(G)$ nicht nur eine $\mathbb{C}$ -Algebra, sondern sogar einen Körper.

Beweis: Da wir schon gezeigt haben, daß das Produkt zweier meromorpher Funktionen wieder meromorph ist, brauchen wir nur zu zeigen, daß $h := \frac{1}{g}$ meromorph ist. Dazu definieren wir $A := N(g) \cup P(g)$, welches diskret und abgeschlossen ist. In $G \setminus A$ ist h analytisch. In $c \in N(g)$ kann man g auf einer Umgebung als $g(z) = (z - c)^m \cdot k(z)$ mit k analytisch und $k(c) \neq 0$ schreiben. Auf dieser Umgebung hat also $h(z) = (z - c)^{-m} \cdot \frac{1}{k(z)}$ einen Pol in c .

Sei nun $c \in P(g)$. Dann kann man g auf einer Umgebung $U \setminus \{c\}$ als $g(z) = (z - c)^{-m} \cdot k(z)$ schreiben mit k analytisch und $k(c) \neq 0$. Die Funktion $h(z) = (z - c)^m \cdot \frac{1}{k(z)}$ hat auf $U \setminus \{c\}$ eine hebbare Singularität: $\lim_{z \rightarrow c} h(z) = 0$.

Also: $P(h) = N(g)$ diskret. In allen anderen Punkten von h ist h analytisch. Damit ist $h = \frac{1}{g}$ meromorph.

Speziell sehen wir: Der Quotient zweier analytischer Funktionen ist auf jeden Fall meromorph. Es gilt aber sogar: Jede meromorphe Funktion ist als Quotient zweier analytischer Funktionen darstellbar. Dies zu beweisen ist mir aber an dieser Stelle zu aufwendig. Der Literaturhinweis auf den **Remmert 2** in Abschnitt 6.2 bezieht sich gerade auf den zugehörigen Beweis. Dieser Hinweis muß hier genügen.

Behauptung: Die auf G analytischen Funktionen bilden einen nullteilerfreien Unterring von $\mathcal{M}(G)$.

Beweis: Wir haben schon beim Beweis, daß die meromorphen Funktionen eine $\mathbb{C}$ -Algebra bilden, benutzt, daß auch die analytischen Funktionen eine $\mathbb{C}$ -Algebra bilden. Das beinhaltet ja, daß die analytischen Funktionen auch ein Ring sind. Da meromorphe Funktionen i. a. nicht analytisch sind, handelt es sich natürlich um einen Unterring.

Zur Nullteilerfreiheit also: Sei $f \not\equiv 0$ und $g \not\equiv 0$ analytisch und $f \cdot g \equiv 0$. Falls $f(z) \neq 0$ für alle z , müßte $g(z) = 0$ sein für alle z , was wir ausgeschlossen hatten. Also sei $f(c) = 0$. Wir wissen dann nach Satz 5, Seite 42, daß wir eine Umgebung U finden, auf der f keine weitere Nullstelle hat. Also muß g auf der Umgebung $U \setminus \{c\}$ überall Nullstellen besitzen, aus Stetigkeitsgründen auch in c . Da also g auf ganz U gleich Null ist, muß g auf ganz G identisch Null sein nach Satz 6, Seite 43. Erneut wollten wir das ausschließen. ■

C.8 Der Satz von Mittag–Leffler

Der Satz von Mittag–Leffler behandelt die umgekehrte Frage, ob zu vorgegebenen Polstellen und Hauptteilen eine meromorphe Funktion existiert.

Satz (Mittag–Leffler): Sei G ein Gebiet, $\{a_k\}$ eine Menge diskreter Punkte in G (um jedes a_{k_0} existiert Umgebung, so daß kein anderes a_k in dieser Umgebung). Für jedes k sei eine rationale Funktion

$$S_k(z) = \sum_{j=1}^{m_k} A_{jk}(z - a_k)^{-j}$$

mit $m_k \in \mathbb{N}$ gegeben. Dann existiert eine meromorphe Funktion f auf G , deren Pole gerade die Punkte $\{a_k\}$ sind und deren Hauptteil in a_k gerade durch S_k gegeben ist.

Ich kann den Beweis dieses Satzes leider nicht vollständig ausführen, da dazu noch weitere Theoreme benötigt werden und das den Beweis rekursiv und viel zu lang machen würde. Ich skizziere daher nur ein paar Schritte des Beweises.

Teile einer Beweisskizze: Das Gebiet G ist eine zusammenhängende topologische Mannigfaltigkeit⁷. Da G abzählbare Topologie hat (das hatten wir schon auf Seite 130), ist G auch parakompakt⁸, und daher findet man offene Mengen G_n , so daß⁹:

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n, \quad \overline{G_n} \text{ kompakt} \quad \text{und} \quad \overline{G_n} \subseteq G_{n+1}.$$

Da $\overline{G_n}$ kompakt und die a_k diskret, gibt es nur endlich viele Punkte in jedem $\overline{G_n}$. Definiere Zahlenmengen I_n durch:

$$I_1 := \{k \mid a_k \in \overline{G_1}\}, \quad I_n := \{k \mid a_k \in \overline{G_n} \setminus \overline{G_{n-1}}\} \quad (n \geq 2).$$

Definiere nun Funktionen f_n durch

$$f_n(z) := \sum_{k \in I_n} S_k(z).$$

⁷vgl. Diffgeo I, 7.1, Beispiel c).

⁸vgl. Diffgeo I, 7.2 Theorem b).

⁹vgl. Diffgeo I, 7.2, Folgerung, vgl. auch Anhang zum Diffgeo-Skript, Top. 7.

Falls I_n leer, wähle $f_n \equiv 0$. Durch diese Definition hat f_n seine Pole jeweils in den a_k mit $k \in I_n$, also jeweils nicht in $\overline{G_{n-1}}$. Nach einem Theorem (*Runge-Theorem*), was ich hier nur erwähne, aber nicht beweise, kann man geeignete rationale Funktionen $R_n(z)$ finden, so daß deren Pole außerhalb von G liegen und für alle $z \in \overline{G_{n-1}}$ gilt:

$$|f_n(z) - R_n(z)| < \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Dann ist

$$f(z) := f_1(z) + \sum_{n=2}^{\infty} [f_n(z) - R_n(z)]$$

die gesuchte meromorphe Funktion.

Wir wollen zuerst zeigen, daß f meromorph ist. Zuerst: f in $G \setminus \{a_k\}$ analytisch. Dazu zeigen wir, daß die Reihe in der Definition von f , auf $G \setminus \{a_k\}$ kompakt konvergiert. Dann sind wir mit dem Weierstraß'schen Konvergenzsatz fertig (s. o.). Sei also K eine kompakte Teilmenge von $G \setminus \{a_k\}$; dann gibt es ein N , so daß $K \subseteq \overline{G_N}$. Wenn $n > N$, dann: $|f_n(z) - R_n(z)| < \left(\frac{1}{2}\right)^n$ für alle $z \in K$. Also ist die Reihe von einer konvergenten Reihe dominiert, also konvergiert die Reihe nach dem Weierstraß'schem M-Test gleichmäßig auf K , d. h. kompakt auf G .

Also betrachte jetzt noch ein beliebiges a_{k_0} : In einer Umgebung, die nur a_{k_0} , aber kein anderes a_k enthält, gilt dann:

$$f(z) = S_k(z) + g(z)$$

mit einem analytischen g auf dieser Umgebung. Also ist a_k ein Pol von f und $S_k(z)$ ist der Hauptteil von f in a_k . ■

C.9 Der kleine Satz von Picard

Der Satz von Liouville, den wir als Aufgabe auf Seite 85 vollständig formulierten, besagt, daß beschränkte, auf ganz $\mathbb{C}$ definierte Funktionen bereits konstant sind. Der Satz schließt also aus einer schwachen Aussage über den Wertebereich einer ganzen Funktion bereits auf die Konstanz dieser Funktion. i 5.2

D. Die Kramers–Kronig–Relationen

Dieses Anhangs-Kapitel ist im wesentlichen (teilweise wörtlich) dem Buch

Jänich, Analysis (für Physiker und Ingenieure)

entnommen. Ich möchte an dieser Stelle dieses Buch jedem weiterempfehlen¹. Es ist sehr auflockernd geschrieben, alles wird motiviert, enthält viele Zeichnungen und bietet einen Überblick über die Themen Funktionentheorie, gewöhnliche Differentialgleichungen und spezielle Funktionen (das sind bestimmte partielle Differentialgleichungen, die man mit einfachen Mitteln lösen kann und in der Physik dringend braucht (Stichworte: Schrödingerglg., Kugelfunktionen, u. a.)).

Die Funktionentheorie stellt dieses Buch mit Betonung der Anschauung dar, so wird zunächst *konform*, dann erst *analytisch* definiert. Besonders empfehlenswert, was die Ergänzung dieser Vorlesung angeht, ist es beim *Residuenkalkül*, wo noch ein paar weitere Methoden dargestellt werden als hier, beim Begriff der *analytischen Fortsetzung* (um den Sinn der Beispiele in Kapitel 8 zu verstehen, sollte man den Abschnitt im **Jänich** gelesen haben; dort wird aber nichts dazu bewiesen, sondern nur anschaulich klar gemacht, was geschieht) und eben bei den *Hauptwerten*, was ich hier auszugsweise darstellen möchte.

D.1 Etwas mehr über Hauptwerte

In den physikalischen Anwendungen treten bisweilen Linienintegrale auf, bei denen ein oder mehrere einfache Pole *auf* dem Integrationsweg liegen.

$\int_{\gamma} f(z) dz$ ist, wenn auf der Kurve ein Pol erster Ordnung liegt, die unvollständige Formulierung eines ursprünglich vernünftigen Problems. De facto kommen für die sinnvolle Interpretation des Pols auf der Kontour nur drei Fälle vor:

- Pol rechts,
- Pol links,
- Hauptwert,

die wir jetzt diskutieren wollen.

Sei $f(z)$ analytisch in G bis auf einen Pol an der Stelle p , und die in G verlaufende stückweise stetig differenzierbare Kurve γ gehe genau einmal durch p und zwar glatt und mit von Null verschiedener Geschwindigkeit. Dann zerlegt die Kurve jede genügend kleine Kreisscheibe um p in eine rechte und eine linke „Hälfte“.

¹dies sieht auch Prof. Reckziegel so: „phantastisch ab 2. Semester“

Denken wir uns zunächst, das Integral stamme aus einem Grenzprozeß $f_\varepsilon \rightarrow f$ für $\varepsilon \rightarrow 0+$, wobei f_ε analytisch auf G bis auf einen Pol bei p_ε ist und zwar so, daß p_ε für $\varepsilon \rightarrow 0+$ auf dem rechten Ufer von γ gegen p strebt, also ‚von rechts kommt‘: s. Abb. D.1.

Aus dem Cauchy-Integralsatz folgt, daß es das Integral $\int_\gamma f_\varepsilon dz$ gar nicht bemerkt, wenn wir das Kurvenstück innerhalb eines genügend kleinen Kreises um p durch den linken Bogen ersetzen: siehe Abb. D.2

Definition: Verändert man γ zu einem Weg $\bar{\gamma}$ (bzw. $\overline{\bar{\gamma}}$), indem man das Kurvenstück innerhalb eines genügend kleinen Kreises um p durch den linken (bzw. rechten) Kreisbogen ersetzt, so ist nach dem Cauchy-Integralsatz der *Rechtswert*

$$\mathcal{R} \int_\gamma f(z) dz := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\gamma f_\varepsilon(z) dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\gamma}} f_\varepsilon(z) dz = \int_{\bar{\gamma}} f(z) dz$$

(bzw. analog der *Linkswert* $\mathcal{L} \int_\gamma f(z) dz$ mittels $\overline{\bar{\gamma}}$) vom Radius dieses Hilfskreises unabhängig (und damit wohldefiniert).

Aus Abbildung D.3 erkennt man:

$$\mathcal{L} \int_\gamma f(z) dz - \mathcal{R} \int_\gamma f(z) dz = \int_{K_\varepsilon(p)} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, p). \quad (\text{D.1})$$

Oftmals ist nun im Anwendungsfall das Integral $\int_\gamma f(z) dz$ weder als Rechts- noch als Linkswert zu interpretieren, sondern als ihr arithmetisches Mittel:

Definition: Der Mittelwert

$$\mathcal{P} \int_\gamma f(z) dz := \frac{\mathcal{L} \int_\gamma f(z) dz + \mathcal{R} \int_\gamma f(z) dz}{2}$$

aus Rechts- und Linkswert heißt *Haupt-* oder *Prinzipalwert* des Integrals.

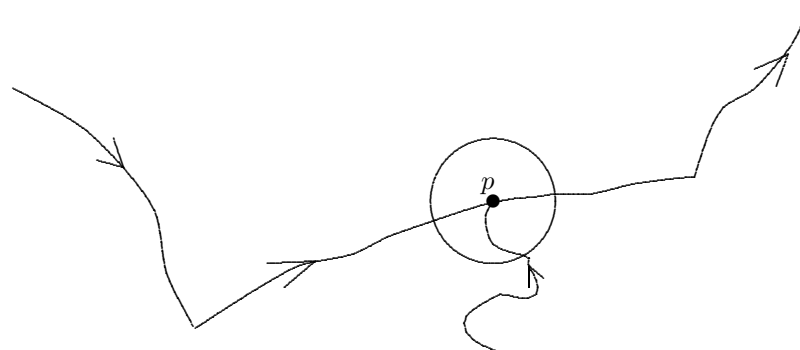
Aus Glg. (D.1) und dieser Definition ergibt sich:

$$\mathcal{P} \int_\gamma f(z) dz = \mathcal{R} \int_\gamma f(z) dz + \pi i \operatorname{Res}(f, p) = \mathcal{L} \int_\gamma f(z) dz - \pi i \operatorname{Res}(f, p). \quad (\text{D.2})$$

Bisher haben wir nicht gebraucht, daß es sich um einen Pol erster Ordnung handelt. Aber es gibt auch einen reellen Hauptwertbegriff, der gleich noch definiert wird, und wenn p ein Pol erster Ordnung ist, stimmen beide Hauptwerte überein.

Definition: Für ein an der Stelle $x_0 \in [a, b]$ uneigentliches Integral $\int_a^b f(x) dx$ wird der *Cauchy-Hauptwert* definiert, falls der folgende Grenzwert existiert:

$$\mathcal{P} \int_a^b f(x) dx := \lim_{r \rightarrow 0+} \left(\int_a^{x_0-r} f(x) dx + \int_{x_0+r}^b f(x) dx \right).$$



Weg des Poles p_ε
für $\varepsilon \rightarrow 0$

Abbildung D.1: Annäherung des Pols von rechts

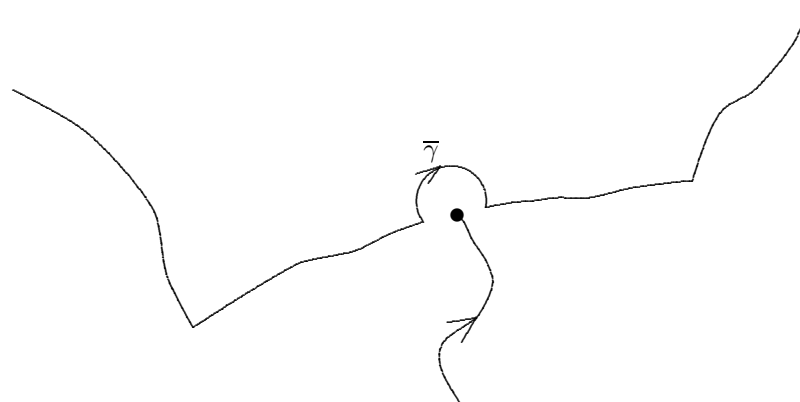
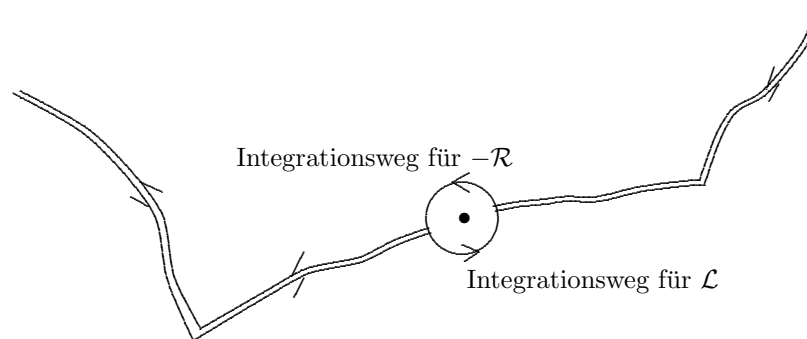


Abbildung D.2: Ersatzkurve durch linken Bogen



Integrationsweg für $-\mathcal{R}$

Integrationsweg für $\mathcal{L}$

Abbildung D.3: Differenz von Links- und Rechtswert

Hieran erkennt man jetzt auch, warum auf Seite 60 das Integral $\lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^c f(x) dx$ Cauchy–Hauptwert genannt wurde.

Satz: Ist $f(z)$ analytisch an allen Punkten des reellen Intervalls $[a, b]$ mit Ausnahme eines einfachen Pols bei p , dann existiert der Cauchy–Hauptwert und es gilt:

$$\underbrace{\mathcal{P} \int_{\gamma} f(z) dz}_{\text{Mittelwert aus Rechts- und Linkswert}} = \underbrace{\mathcal{P} \int_a^b f(x) dx}_{\text{Cauchy–Hauptwert reell}} .$$

Beweis: Weil der Pol von erster Ordnung, hat $(z - p)f(z)$ bei p eine hebbare Singularität, also ist $f(z) = \frac{g(z)}{z - p}$ für ein auf ganz G analytisches $g(z)$. Sei $\Gamma_r(p)$ wie üblich der obere Halbkreisbogen. Dann gilt:

$$\int_{\Gamma_r(p)} f(z) dz = \int_{\Gamma_r(p)} \frac{g(z)}{z - p} dz = \int_{\Gamma_r(p)} \frac{g(z) - g(p)}{z - p} dz + \int_{\Gamma_r(p)} \frac{g(p)}{z - p} dz .$$

Der erste Summand geht mit r gegen Null, weil der Integrand beschränkt ist und der Weg schrumpft, der zweite Summand ist:

$$\int_0^{\pi} \frac{g(p)}{re^{it}} i r e^{it} dt = \pi i g(p) = \pi i \operatorname{Res}(f, p) .$$

Der Cauchy-Integralsatz liefert nun, angewandt auf einen Halbring mit den Radien r, r_0 (analoger Weg wie auf Seite 62):

$$\int_{p-r_0}^{p-r} f(x) dx + \int_{-\Gamma_r(p)} f(z) dz + \int_{p+r}^{p+r_0} f(x) dx + \int_{\Gamma_{r_0}(p)} f(z) dz = 0 ,$$

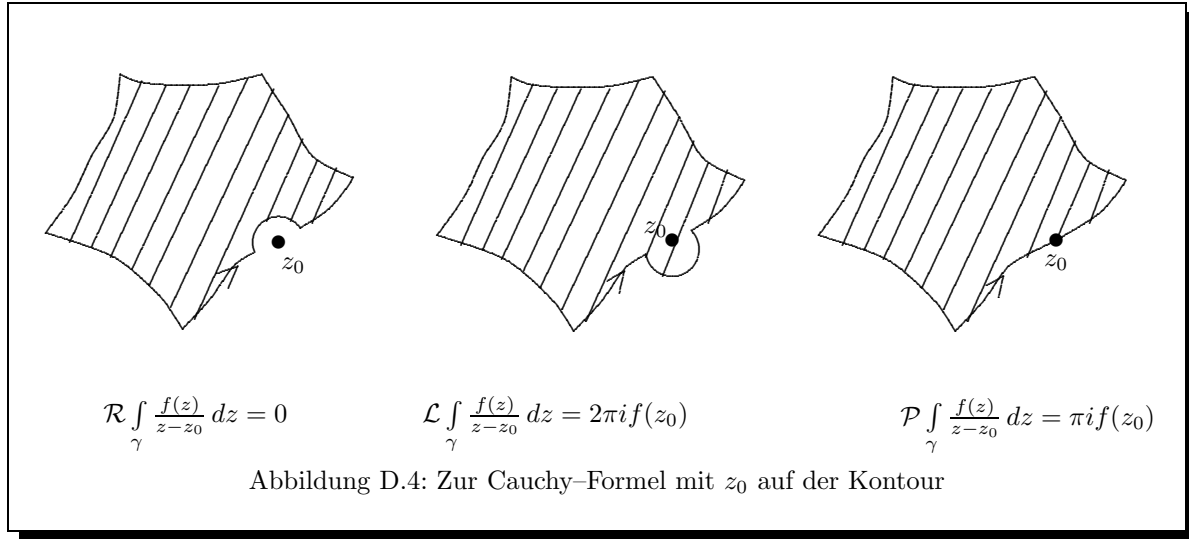
und bringen wir nun die Bogenintegrale auf die eine, die Intervall-Integrale auf die andere Seite und fügen auf beiden Seiten $\int_a^{p-r_0} f(x) dx + \int_{p+r_0}^b f(x) dx$ hinzu, so erhalten wir:

$$\int_a^{p-r} f(x) dx + \int_{p+r}^b f(x) dx = \mathcal{R} \int_{\gamma} f(z) dz + \int_{\Gamma_r(p)} f(z) dz .$$

Der Grenzwert der rechten Seite für $r \rightarrow 0+$ existiert und ist gleich $\mathcal{R} \int_{\gamma} f(z) dz + i\pi \operatorname{Res}(f, p)$, wie wir oben ausgerechnet haben, aber auch gleich dem funktionentheoretischen Hauptwert $\mathcal{P} \int_{\gamma} f(z) dz$ nach Glg. (D.2), also ist das auch der Grenzwert der linken Seite, was zu zeigen war. ■

D.2 Herleitung der Kramers–Kronig–Relationen

Mit Hilfe des Hauptwertbegriffes können wir nun auch eine Version der Cauchy–Formel für die Werte auf der Kontour hinschreiben: Sei $f(z)$ analytisch in G und sei γ eine positiv orientierte Jordankurve, die



samt ihrem Innengebiet ganz in G liegt. Ist dann z_0 ein Punkt, den γ glatt und mit von Null verschiedener Geschwindigkeit durchsetzt, so haben wir offenbar (siehe Abbildung D.4) als Hauptwertversion der Cauchy-Formel mit z_0 auf der Kontour:

$$f(z_0) = \frac{1}{\pi i} \mathcal{P} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0} dz.$$

Diese Beobachtung verbinden wir nun mit der Beweisidee zu Satz 6, Kapitel 6 und wenden sie auf eine auf der oberen Halbebene (einschließlich der reellen Achse) analytische Funktion an, die außerdem so beschaffen ist, daß der obere Halbkreisbogen $\Gamma_r(0)$ harmlos für $\frac{f(z)}{z-z_0}$, $z_0 \in \mathbb{R}$ ist (d. h. $= 0$ im Integral über $\Gamma_r(0)$).

Dann gilt also:

$$f(z_0) = \frac{1}{\pi i} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(z)}{z-z_0} dz,$$

und wenn wir diese Hauptwert-Cauchyformel nach Real- und Imaginärteil aufspalten und die Variablen in der dabei üblichen Weise umbenennen (nämlich x statt z_0 und x' statt z schreiben), so erhalten wir die

Kramers–Kronig–Relationen: Sei $f(z)$ analytisch auf der oberen Halbebene (einschließlich der reellen Achse) und es gelte $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$ (genauer: zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein R , so daß $|f(z)| < \varepsilon$ für alle z , die $\text{Im}(z) \geq 0$ und $|z| > R$ erfüllen). Dann gelten für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Relationen:

$$\begin{aligned} \text{Re}(f(x)) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im}(f(x'))}{x' - x} dx' \\ \text{Im}(f(x)) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Re}(f(x'))}{x' - x} dx' \end{aligned}$$

Ein letzter Gedanke zur bisherigen Beweisskizze: Warum ist nun der Halbkreisbogen, wie oben gefordert, harmlos? Weil aus $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$ natürlich folgt, daß

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z \cdot \frac{f(z)}{z - z_0} = 0$$

gilt, und damit ist nach dem Beweis zu Satz 6, Kapitel 6 der Halbkreisbogen in der Tat harmlos. Der Rest des Beweisganges ist somit ja bereits oben skizziert.

■

Bräuchte $f(z) \rightarrow 0$ für $z \rightarrow \infty$ nicht erfüllt zu sein, so ergäben sich absurde Dinge aus diesen Relationen: Da man aus der Kenntnis des Realteiles den Imaginärteil berechnen kann und umgekehrt, würde für eine auf $\mathbb{R}$ reelle Funktion aus der ersten Relation bereits folgen, daß sie identisch Null sein müßte...

Bemerkung: Das eigentlich Interessante an diesen Formeln erschließt sich erst in den physikalischen Anwendungen, wo $\operatorname{Re}(f)$ und $\operatorname{Im}(f)$ meßbare Größen sind („Dispersionsrelationen“).

In anderer Hinsicht reichen die Formeln aber doch etwas weiter als hier angegeben, im Zweifelsfalle versuche man einfach den Beweis für die jeweilige Situation ein bißchen zu modifizieren, z.B. wird man für $f(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}$ einen geeigneten Zweig betrachten, etwa $re^{i\phi} \mapsto \sqrt{r}e^{i\phi/2}$ auf der nach unten geschlitzten Ebene $-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{3}{2}\pi$: Mit einem kleinen Hilfsweg um 0 funktioniert das ganze Argument für $x \neq 0$ noch immer. (Die Harmlosigkeit des kleinen Hilfsweges um 0 muß aber immer überprüft werden; hier klappt's.)

Index

- arccos, 16
- arcosh, 16
- arcsin, 16, 19
- $\operatorname{Arg}(z)$, 3
- $\arg(z)$, 3
- arsinh, 16
- $\mathbb{C}$, 1
- $\hat{\mathbb{C}}$, 4–6
 - Gerade in, 6
 - Kreis in, 6
 - Metrik auf, 6
 - Topologie auf, 4, 6
- cos, 14, 19
- cosh, 15, 19
- $DV(z_1, z_2, z_3, z_4)$, 79
- exp, 13, 19
- $\operatorname{ext}(\gamma)$, 25
- $\mathcal{IH}$, 60, 70
- $\operatorname{int}(\gamma)$, 25
- log, 15, 19
- $\mathcal{M}(E)$, 68
- $\operatorname{Res}(f, z_0)$, 51
- S^2
 - Kreis auf, 6
- sin, 14, 19
- sinh, 15, 19
- $W(\gamma, z_0)$, 36, 84
- $\zeta(z)$, 81, 97
- Abbildungssatz
 - Riemann'scher, 72
- Abel'scher Grenzwertsatz, 16
- Ableitung, 17
- Ableitungsregeln, 17
- absolut konvergent, 10
- Abstand
 - chordaler, 6
- abzählbare Topologie, 130
- Addition
 - komplexe, 1
- Additionstheoreme, 14
- Äußeres, 25
- analytisch, 23
- analytische Fortsetzung, 74–78
- analytischer Teil, 44
- angeordneter Körper, 79
- Arcuscosinus, 16
- Arcussinus, 16, 19
- Areafunktionen, 16
- Argument, *siehe* Hauptwert des Arguments
- Argumentprinzip, 55
- bedingt konvergent, 10
- beschränkt, 12
- Betrag, 2
- bianalytisch, 70
 - lokal, 70
- biholomorph, 70
 - lokal, 70
- Brennpunktgleichung einer Ellipse, 65
- Casorati–Weierstraß, 49
- Cauchy–Formel, 138
 - erste, 38
 - $(n+1)$ -te, 40
 - zweite, 40
- Cauchy–Hadamard, 12
- Cauchy–Hauptwert, 60, 135
- Cauchy–Integralsatz, 33, 128
- Cauchy–Kriterium, 10
- Cauchy–Produkt, 11
- Cauchy–Riemann'sche Differentialgleichungen (abgekürzt CR–Dgl.en), 20
- Cayley–Abbildung, 73
- chordaler Abstand, 6
- Cosinus, 14, 19
- Cosinus hyperbolicus, 15, 19
- de l'Hospital, 50
- Differentialquotient, 17
- Differenzenquotient, 17
- differenzierbar
 - komplex, 17–24, 82
 - partiell, 20–22
 - total, 22, 82
 - unendlich oft, 41
- Dirichlet–Produkt, 11
- Dispersionsrelationen, 139
- Divergenz, *siehe* Konvergenz
- Drehstreckung, 3, 7, 8, 70
- Eindeutigkeitssatz für Potenzreihen, 16

einfach, 25
 einfach geschlossen, 25
 einfach zusammenhängend, 25
 Einheit
 imaginäre, 1
 Einheitswurzeln, 4
 Ellipse, 64
 Exponentialfunktion, 13, 19
 Exzentrizität
 lineare, 64
 numerische, 64

 Formel von Moivre, 4
 Fundamentalsatz der Algebra, 84, 89

 Gaußsche Zahlenebene, 1, 2, 5
 Gebiet, 23
 Gebietstreue, 85
 geometrische Reihe, 10
 Gerade in $\widehat{\mathbb{C}}$, 6
 geschlossen, 25
 glatt, 26
 gleichmäßig konvergent, 12
 gleichmäßig konvergent im Inneren, 123
 Green, 33

 Hadamard, 12
 Halbebene
 obere, 60, 70
 harmonische Funktionen, 22
 Hauptteil, 44
 Hauptwert, 135
 Cauchy, 60, 135
 reell, 135
 Hauptwert des Arguments, 3
 hebbare Singularität, 48
 Hebbbarkeitssatz, 48
 holomorph, 23
 homotop, 78
 Hyperbelfunktionen, 15

 Identitätssatz
 für analytische Funktionen, 43, 85
 für Potenzreihen, 16
 imaginäre Einheit, 1
 imaginäre Zahl, 1
 Imaginärteil, 1
 Index, 36
 Inneres, 25
 Integral, 26
 Integralkriterium, 11
 Integrationsregeln, 29
 Inverses, 2
 Inversion, 7, 8
 isolierte Singularität, 48

 Jänich, 134
 Jordan–Kurve, 25
 Jordan’scher Kurvensatz, 25

 Kettenregel, 18
 Körperautomorphismus, 2, 79, 90
 Körperisomorphismus, 2
 kompakt konvergent, 123
 konform, 70
 lokal, 69
 Konjugation, 2
 konjugierte Paare, 22
 konvergent
 absolut, 10
 bedingt, 10
 gleichmäßig, 12
 gleichmäßig konvergent im Inneren, 123
 kompakt, 123
 punktweise, 12
 Konvergenz, 9
 Konvergenzkreis, 12, 81
 Konvergenzkriterien, 10
 Konvergenzradius, 12, 80
 Kramers–Kronig–Relationen, 138
 Kreis auf S^2 , 6
 Kreis in $\widehat{\mathbb{C}}$, 6
 Kreiskettenverfahren, 75
 Kurve, 25

 Laplace–Gleichung, 22
 Laurent–Entwicklung, 43
 Laurentreihe, 43, 48
 Linkswert, 135
 Liouville, 85
 Logarithmus
 komplexer, 15, 19, 83
 lokal bianalytisch, 70
 lokal biholomorph, 70
 lokal konform, 69

 Mächtigkeit (einer Menge), 81
 Majorantenkriterium, 10
 Maximumsprinzip, 85
 meromorph, 68, 129, 132
 Metrik auf $\widehat{\mathbb{C}}$, 6
 Mittag–Leffler, 132
 Mittelpunktsgleichung einer Ellipse, 64
 Möbiustransformation, 7, 8, 79, 91
 Moivre–Formel, *siehe* Formel von Moivre
 Monodromiesatz, 78
 Morera, 41
 Multiplikation
 komplexe, 1, 3

 negativ orientiert, 37
 Nordpol N , 5

- Nullstelle, 43
- Nullstellenmenge, 131
- Ordnung
 - einer Nullstelle, 43
 - eines Poles, 48
- orientiert
 - negativ, 37
 - positiv, 37
- orientierter Winkel, 69
- Parametergleichung einer Ellipse, 65
- Parameterwechsel, 29
- Partialsumme, 9
- Periode von
 - cos, 14
 - cosh, 15
 - exp, 14
 - sinh, 15
 - sin, 14
- Picard
 - großer Satz von, 50
 - kleiner Satz von, 133
- Pol, 48, 86
 - Anzahl von, 130
- Polardarstellung, 3, 13
- Polargleichung einer Ellipse, 65
- Polarwinkel, 3
- Polstellenmenge, 130
- Polygonweg, 126
- Polygonzüge, 34
- Polynom in zwei Variablen, 58
- positiv orientiert, 37
- Potential, 32
- Potenzreihe, 12, 18
- Prinzipalwert, 135
- Produkt
 - unendliches, 81
- Produktregel, 17
- Projektion
 - stereographische, 5, 6
- punktweise konvergent, 12
- Quotientenkriterium, 11, 13
- Quotientenregel, 17
- rationale Funktion, 58
- Realteil, 1
- Rechtswert, 135
- Regel von de l'Hospital, 50
- regulär, 23
- Reihe
 - geometrische, 10
- rektifizierbar, 26
- Residuenkalkül, 58
- Residuensatz, 52
- Residuum, 51
- Riemann'sche Zahlenkugel, 5
- Riemann'scher Abbildungssatz, 72
- Riemann'scher Hebbbarkeitssatz, 48
- Riemannsumme, 26
- Ringgebiet, 34
- Rouché, 57
- Satz von
 - der Gebietstreue, 85
 - Liouville, 85
 - Mittag-Leffler, 132
 - Morera, 41
 - Picard, *siehe* Picard, *siehe* Picard
 - Rouché, 57
- Schwarz'sches Lemma, 87
- Singularität
 - hebbare, 48
 - isolierte, 48
 - nicht-isolierte, 48
 - wesentliche, 48, 86
- Sinus, 14, 19
- Sinus hyperbolicus, 15, 19
- Stammfunktion, 30
- stereographische Projektion, 5, 6
- stetig
 - komplex, 12
- stückweise glatt, 26
- Substitutionsregel, 55
- Tangentenvektor, 69
- Taylor-Entwicklung, 41
- Topologie auf $\widehat{\mathbb{C}}$, 4, 6
- Translation, 7, 8
- trigonometrische Funktion, 14
- Umkehrfunktion
 - Differentiation der, 19
 - komplexer arccos, 16
 - komplexer arcosh, 16
 - komplexer arcsin, 16
 - komplexer arsinh, 16
- Umlaufzahl, 36
- Umordnungssatz, 13
- unendliche Reihe, 9–16, 18
- unendliches Produkt, 81
- Unterteilung, 26
- Vektoraddition im $\mathbb{R}^2$, 1
- Vergleichskriterium, 10
- Wegunabhängigkeit, 30, 31, 126
- Weierstraß'scher Konvergenzsatz, 124
- Weierstraß'scher M-Test, 11
- wesentliche Singularität, 48, 86
- Winkel

- orientierter, 69
- Wurzel, 4
- Wurzelkriterium, 10
- Zahl
 - imaginäre, 1
- Zahlenebene
 - Gaußsche, 1, 2, 5
- Zahlenkugel
 - Riemann'sche, 5
- Zerlegung, *siehe* Unterteilung
- zusammenhängend, 23
- Zweig, 15