

Seminar über Raumzeitmodelle der allgemeinen Relativitätstheorie

Einige Resultate der Schwarzschild-Geometrie

Michael Schaaf
Uwe Münch

Inhaltsverzeichnis

1. Theorie und Eigenschaften des Schwarzschild-Modells	1
2. Orbits und Anwendungen bei schwacher Gravitation	5
3. Starke Gravitation: Schwarze Löcher	10
4. Vergleich mit Experimenten	13
Literatur	16

1. Theorie und Eigenschaften des Schwarzschild-Modells

In diesem Abschnitt wollen wir zunächst das Modell von Schwarzschild vorstellen. Wir werden dazu die Voraussetzungen des Modells angeben und seine Struktur darstellen.

1.1 Voraussetzungen und neue Begriffe

In dem 1916 von K. Schwarzschild eingeführten Modell betrachten wir einen Stern mit einer bestimmten Masse, der natürlich Gravitationskräfte verursacht. Diese Kräfte wollen wir nach dem Äquivalenzprinzip aber nicht als solche, sondern durch eine Krümmung der Raumzeit darstellen; der Stern selbst wird dabei also nicht mehr modelliert.

Das Modell soll an folgende Bedingungen geknüpft sein:

- Die Raumzeit ist *statisch* (der Stern ändert sich und seine Umgebung zeitlich nicht).
- Der Raum ist *kugelsymmetrisch* (der Stern ist „rund“).
- Der Raum soll so modelliert sein, daß eine Sphäre mit Radius R die Schnittkrümmung $1/R^2$ besitzt.
- Für große Abstände vom Stern soll die Raumzeit wie die Minkowski-Raumzeit \mathbb{E}_1^4 aussehen (bei großen Abständen hat der Stern fast keinen Einfluß mehr).
- Die Raumzeit ist ein *Vakuum*, also $T \equiv 0$, d. h. keine Materie wird modelliert (nur der Stern, nicht aber unsere frei fallenden Teilchen sollen die Raumzeit-Struktur beeinflussen).

Um vernünftig arbeiten zu können, definieren wir zunächst einige Begriffe. Dazu sei M jeweils eine zeitorientierte Raumzeit.

Definition: Ein *Beobachterfeld* U ist ein zeitartiges Einheitsvektorfeld mit

$$\forall p \in M : U_p \in C_p^+ .$$

Eine Integralkurve α von U heißt dann ein *Beobachter*.

Definition: Ein Beobachterfeld U heißt *synchronisierbar*, falls Funktionen $h, t \in \mathcal{C}^\infty(M)$ mit $h > 0$ existieren, so daß

$$U = -h \cdot \text{grad } t .$$

t heißt dann die *Zeitfunktion* von M und für alle $s \in t(M)$ nennt man $t^{-1}(\{s\})$ einen *Gleichzeitigkeitsraum*.

Definition: Eine *Standard-Statistische-Raumzeit* ist eine Mannigfaltigkeit $I \times S$, wobei S eine 3-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit ist, versehen mit der Metrik

$$g = -(f \circ Q)^2 dt^2 + ds^2 .$$

Dabei ist ds^2 der Lift der Metrik von S , t bzw. Q die gewöhnlichen Projektionen auf I bzw. S und $f \in \mathcal{C}^\infty(S)$.

Warum nennt man eine solche Raumzeit statisch? Weil der folgende Satz gilt:

Satz: Für alle Zeiten $t \in I$ ist der Gleichzeitigkeitsraum $\{t\} \times S$ isomorph zu S . Die Metrik ist unabhängig vom Zeitpunkt t , d. h. die $\{t\} \times S$ sind isometrisch zueinander.

Weiterhin ist $\frac{\partial_t}{f \circ Q}$ ein Beobachterfeld, welches synchronisierbar ist.

1.2 Die Metrik und Struktur des Schwarzschild-Modells

Aus den oben genannten Bedingungen folgert man nun das Schwarzschildmodell. Es besteht aus zwei getrennten Raumzeiten, die durch „eine Singularität“ getrennt sind. In der folgenden Definition geben wir das Ergebnis für die Strukturen an und geben den Bereichen Namen. Neben der folgenden Definition befindet sich auch eine Zeichnung, die das Schwarzschildmodell veranschaulichen soll (aus [O’N] entnommen).

Wir möchten an dieser Stelle betonen, daß im folgenden der Buchstabe M *nicht* mehr für eine Mannigfaltigkeit steht, sondern für die Masse des Sterns. Also $M \in \mathbb{R}_+$.

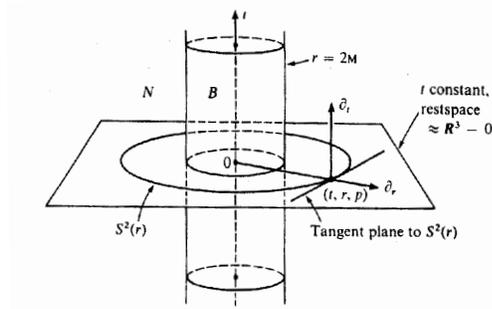


Abb. 1: Innenbereich B und Außenbereich N (eingescannt aus [O'N])

Definition: Für eine reelle positive Zahl M (Masse des Sterns) seien die Gebiete $P_1 := \mathbb{R} \times]2M, \infty[$ und $P_2 := \mathbb{R} \times]0, 2M[$, jeweils ausgestattet mit der Metrik

$$g = -\mathfrak{h} dt^2 + \mathfrak{h}^{-1} dr^2,$$

wobei $\mathfrak{h} := 1 - \frac{2M}{r}$. Diese Funktion \mathfrak{h} nennen wir *Schwarzschild-Funktion*¹. S^2 sei die Einheitssphäre mit Standardmetrik.

Dann heißt:

$N := P_1 \times_r S^2$ die *Schwarzschild-Raumzeit des Außenbereichs* und
 $B := P_2 \times_r S^2$ die *Schwarzschild-Raumzeit des Innenbereichs*. ■

Für die Naturbeschreibung wichtig ist, daß in der Regel die Sterne eine im Vergleich zu ihrem Radius kleine Masse besitzen, z. B. ist für die Sonne $r_{\text{Sonne}} = 7 \cdot 10^5$ km und $M = 1,5$ km. Damit wird der erreichbare Raum, das sind natürlich nur Punkte, die weiter als r_{Stern} vom Sternmittelpunkt entfernt sind, gänzlich durch den Außenbereich modelliert. Wie gut das Modell ist, wird das nächste Kapitel zeigen.

Wenn bestimmte Sterne ausgebrannt sind, so vermutet man, daß es vorkommt, daß sie den inneren Gravitationskräften nichts mehr entgegensetzen können, somit zu einem Punkt kollabieren und fortan als Schwarzes Loch ihr Unwesen (im wahrsten Sinne des Wortes) treiben. Wie wir später zeigen werden, kann man auch da eine sinnvolle Raumzeit definieren.

Satz: Mit den gewöhnlichen Kugelkoordinaten auf S^2 lautet die Metrik mit den Koordinaten $(t, r, \vartheta, \varphi)$ auf N :

$$g = -\mathfrak{h} dt^2 + \mathfrak{h}^{-1} dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2(\vartheta) d\varphi^2).$$

Wir geben an dieser Stelle auch noch das Aussehen der Metrik nach Einsetzen der Gauß'schen Basisfelder $(\partial_t, \partial_r, \partial_\vartheta, \partial_\varphi)$ an, wobei wir die Basisfelder von 0 bis 3 durchnummerieren: Die Metrik ist orthogonal, also für $i \neq j$ gilt $g_{ij} = 0$ und für die Diagonalelemente g_{ii} gilt:

$$(1) \quad \begin{aligned} g_{00} &= -\mathfrak{h}, & g_{22} &= r^2, \\ g_{11} &= \frac{1}{\mathfrak{h}}, & g_{33} &= r^2 \sin^2(\vartheta). \end{aligned}$$

1.3 Der Schwarzschild-Beobachter

Als Spezialfall von dem Satz aus Abschnitt 1.1 ergibt sich nun:

Satz: $U := \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{h}}} \partial_t$ ist ein Beobachterfeld von N . U heißt *Schwarzschild-Beobachterfeld*. Für dieses gilt $U = -\sqrt{\mathfrak{h}} \cdot \text{grad}(t)$ (die Schwarzschildbeobachter sind also synchronisierbar). Die Integralkurven $\alpha : I \rightarrow N$ von U heißen *Schwarzschildbeobachter*. Ihre Parametrisierungswerte $\tau \in I$ nennen wir (wie üblich für Beobachter) ihre *Eigenzeit*.

¹Wir möchten kurz bemerken, daß wir durchgehend *geometrische Einheiten* benutzen. Das bedeutet, daß bei uns für die Lichtgeschwindigkeit $c = 1$ gilt (in SI-Einheiten: $c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$) und für die Gravitationskonstante wird ebenfalls $\Gamma = 1$ gesetzt (in SI-Einheiten: $\Gamma = 6,672 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg sec}^2}$). Bei Benutzung der SI-Einheiten müßte die Schwarzschildfunktion mittels $\mathfrak{h} := 1 - \frac{2\Gamma M}{r \cdot c^2}$ definiert werden. Die geometrischen Einheiten bieten den Vorteil (neben dem Wegfallen der Konstanten c und Γ), daß auch Zeiten und Massen die Einheit Meter besitzen und somit direkt Sternennradien r_{Stern} mit den „Schwarzschildradien“ $2M$ verglichen werden können.

Man sieht hier, daß die Schwarzschildbeobachter immer an der gleichen Stelle im Raum stehen (wie z. B. wir alle auf der Erdoberfläche); wie man im folgenden Satz sieht, ist das aber gar nicht so leicht!

Satz: Sei α ein Schwarzschild-Beobachter, dann gilt:

$$\alpha'' := \frac{\nabla \dot{\alpha}}{dt} = \frac{M}{r^2} \partial_r .$$

Das bedeutet, daß ein Schwarzschild-Beobachter ständig beschleunigen muß, um am rechten Platz zu bleiben.

Da $|\partial_r|^2 = g_{11} = \frac{1}{\mathfrak{h}} > 1$ im Gegensatz zur Newton'schen Beschreibung, wo $|\partial_r| = 1$ ist, muß der Schwarzschildbeobachter in der Nähe des Sterns stärker beschleunigen als ein Newton'scher. Für die Erde gilt $2M = 9 \text{ mm}$ und $r_{\text{Erde}} = 6370 \text{ km}$, also ist die Beschleunigung des Schwarzschildbeobachters auf der Erde nur um den Faktor $1 + 1,4 \cdot 10^{-9}$ vergrößert. Dieser Unterschied ist auf der Erde nicht meßbar. Auf anderen Sternen kann man Beschleunigungen nicht von der Erde aus bestimmen.

Wir betrachten daher nun den Gang von Uhren, die die Schwarzschild-Beobachter mitführen, also deren *Eigenzeit* τ , im Vergleich zur Schwarzschildzeit t .

Satz: Es gilt mit ' als Ableitung nach der Eigenzeit τ :

$$\frac{d(t \circ \alpha)}{d\tau} = (t \circ \alpha)' = d_\alpha t(\dot{\alpha}) \stackrel{\alpha \text{ Integralkurve}}{=} d_\alpha t \left(\frac{\partial_t}{\sqrt{\mathfrak{h}}} \circ \alpha \right) = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{h} \circ \alpha}} .$$

Da \mathfrak{h} nur von r abhängt und $r \circ \alpha \equiv \text{const}$, ist $(t \circ \alpha)'$ entlang α konstant. Daher können wir die beiden Zeiten vergleichen und erkennen (da $0 < \mathfrak{h} < 1$), daß die Eigenzeit immer *langsamer* als die Schwarzschildzeit verläuft: $\tau_2 - \tau_1 = \sqrt{(\mathfrak{h} \circ \alpha)} \cdot (t(\alpha(\tau_2)) - t(\alpha(\tau_1)))$. Für den Vergleich zweier Schwarzschildbeobachter nutzen wir die Synchronisierbarkeit von t und erhalten:

$$(2) \quad \tau_2^{r_{\text{hoch}}} - \tau_1^{r_{\text{hoch}}} = \frac{\sqrt{\mathfrak{h}(r_{\text{hoch}})}}{\sqrt{\mathfrak{h}(r_{\text{tief}})}} \cdot (\tau_2^{r_{\text{tief}}} - \tau_1^{r_{\text{tief}}}) = \frac{\sqrt{1 - \frac{2M}{r_{\text{hoch}}}}}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r_{\text{tief}}}}} \cdot (\tau_2^{r_{\text{tief}}} - \tau_1^{r_{\text{tief}}}) .$$

Je näher der Beobachter am Stern ist, also je stärker die Gravitation wirkt, desto langsamer gehen die Uhren des Beobachters.

Da Frequenzen gleich Schwingungen pro Zeiteinheit sind, werden sich auch die Frequenzen mit dem Radius ändern, da jeder Beobachter die Frequenz mit seiner Eigenzeit mißt. Mit der Frequenz ν_0 , die bei Abwesenheit jeglicher Gravitation vorliegen soll, als Vergleichsmaß erhält man für die beobachtete Frequenz: $\nu(r) = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{h}(r)}} \cdot \nu_0$. Wenn nun bei einem Radius r_1 z. B. ein Lichtstrahl ausgesendet und dieser bei einem anderen Radius r_2 empfangen wird, so ergibt sich durch die Beobachtungen bei diesen verschiedenen Radien folgende Frequenzverschiebung, bezogen auf die Frequenz bei r_1 :

$$(3) \quad \Delta\nu = \nu(r_2) - \nu(r_1) = \frac{\sqrt{1 - \frac{2M}{r_1}} - \sqrt{1 - \frac{2M}{r_2}}}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r_2}}} \cdot \nu(r_1) .$$

Wir ersehen hieraus:

$$\begin{aligned} \Delta\nu > 0, & \quad \text{falls } r_1 > r_2, & \quad \text{das bedeutet: } \textit{Blauverschiebung } r_1 \rightarrow r_2, \\ \Delta\nu < 0, & \quad \text{falls } r_1 < r_2, & \quad \text{das bedeutet: } \textit{Rotverschiebung } r_1 \rightarrow r_2. \end{aligned}$$

Die beiden zuletzt beschriebenen Effekte, die radiusabhängigen Zeitänderungen und die Frequenzverschiebungen, sind experimentell überprüfbar, was wir in Abschnitt 4.2 darlegen.

2. Orbits und Anwendungen bei schwacher Gravitation

Nach der mathematischen Einführung des Modells wollen wir uns jetzt in diesem Abschnitt damit beschäftigen, wie sich massive Teilchen und Licht in der Schwarzschild-Geometrie bewegen. Wir befassen uns insbesondere mit den leichten Unterschieden zur Newton'schen Gravitationstheorie bei schwacher Gravitation wie in unserem Sonnensystem.

2.1 Allgemeines

Da sich frei fallende Teilchen auf Geodätischen γ bewegen, gehen wir von der Geodätischengleichung in lokalen Koordinaten (vgl. 16.1, [Diff]) aus:

$$(x_j \circ \gamma)'' = - \sum_{i,k} \left(\Gamma_{ik}^j \circ \gamma \right) \cdot (x_i \circ \gamma)' (x_k \circ \gamma)' .$$

In orthogonalen Koordinaten, die wir ja haben, vereinfacht sich dies nach Einsetzen der Christoffelsymbole zu:

$$(g_{jj} \cdot (x_j \circ \gamma)')' = \frac{1}{2} \cdot \sum_i \partial_j g_{ii} \cdot ((x_i \circ \gamma)')^2 .$$

Mit unserer Metrik (1), die ja von φ und t unabhängig ist, ergibt sich daraus folgendes

Lemma: Für Geodätische γ existieren Konstanten $E \in \mathbb{R}$ und $L \in \mathbb{R}$, so daß (' jetzt als $\frac{d}{ds}$ notiert):

$$(4) \quad \mathfrak{h} \cdot \frac{d(t \circ \gamma)}{ds} = E ,$$

$$(5) \quad (r \circ \gamma)^2 \sin^2(\vartheta \circ \gamma) \cdot \frac{d(\varphi \circ \gamma)}{ds} = L ,$$

$$(6) \quad \left(\frac{d}{ds} \right) \left((r \circ \gamma)^2 \cdot \frac{d(\vartheta \circ \gamma)}{ds} \right) = (r \circ \gamma)^2 \sin(\vartheta \circ \gamma) \cdot \cos(\vartheta \circ \gamma) \cdot \left(\frac{d(\varphi \circ \gamma)}{ds} \right)^2 .$$

Definition: Eine Kurve γ nennen wir *anfänglich äquatorial* genau dann, wenn $(\vartheta \circ \gamma)(0) = \pi/2$ und $\frac{d(\vartheta \circ \gamma)}{ds}(0) = 0$. Durch geeignete Wahl der Kugelkoordinaten ist dies immer erreichbar.

Hierdurch vereinfachen sich die Gleichungen aus dem letzten Lemma:

Folgerung: Für anfänglich äquatoriale Geodätische γ existieren Konstanten $E \in \mathbb{R}$ und $L \in \mathbb{R}$, so daß

$$(7) \quad \mathfrak{h} \cdot \frac{d(t \circ \gamma)}{ds} = E ,$$

$$(8) \quad (r \circ \gamma)^2 \cdot \frac{d(\varphi \circ \gamma)}{ds} = L ,$$

$$(9) \quad \vartheta \circ \gamma \equiv \frac{\pi}{2} .$$

Wie sind diese Gleichungen, insbesondere die Konstanten, zu interpretieren?

Für materielle Teilchen γ mißt ein Schwarzschildbeobachter U folgende Energie pro Masse:

$$-g(\dot{\gamma}, U) = \frac{E}{\sqrt{\mathfrak{h}}} .$$

Aus diesem Grunde nennt man E die *Energie pro Masse im Unendlichen*, oder kurz: Energie.

Zur Interpretation von L und der Gleichung (9) machen wir einen kurzen Abstecher in die *Newton'sche Gravitationstheorie*:

In dieser Theorie erhält man über das 2. Newton'sche Axiom für ein materielles Teilchen α

$$(10) \quad F = m_{\text{träge}} \cdot \alpha''$$

und das Gravitationsgesetz (α identifiziert als Vektor $\alpha(s) - O$)

$$(11) \quad F = -\frac{m_{\text{schwer}} \cdot M}{r^3} \cdot \alpha$$

und somit nach Gleichsetzen der Massen $m_{\text{träge}} = m_{\text{schwer}}$ (vgl. dazu Abschnitt 4.1) die Abhängigkeit

$$(12) \quad \alpha'' = -\frac{M}{r^3} \cdot \alpha.$$

Man definiert nun den *Drehimpuls pro Masse* (oder kurz: Drehimpuls) L über

$$L := \alpha \times \alpha'.$$

Dabei ist \times das Kreuzprodukt, vgl. LA 12 (und 1.11) aus [Diff]. Wegen der Gleichung (12) gilt: $L' = 0$ und da auch $\alpha \cdot L = 0$, bedeutet dies, daß die Bahn von α in einer Ebene bleibt.

Das entsprechende Ergebnis haben wir in der Schwarzschildgeometrie mit Gleichung (9) erhalten.

Wenn man nun Gleichung (12) in Polarkoordinaten ausdrückt, erhält man 2 Gleichungen. Diese lauten:

$$(13) \quad r'' - r \cdot (\varphi')^2 = -\frac{M}{r^2}$$

$$(14) \quad r^2 \cdot \varphi' \equiv L.$$

Man nennt die Gleichung (14) das *2. Kepler'sche Gesetz*; sie ist formal mit Gleichung (8) identisch. Wir haben somit L als Drehimpuls pro Masse identifiziert.

2.2 Orbits des freien Falls materieller Teilchen

Bei materiellen Teilchen parametrisieren wir nach der Eigenzeit, d. h. $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = -1$. Unter Ausnutzung der letzten Folgerung zur Darstellung von $\dot{\gamma}$ ergibt sich der Energieerhaltungssatz:

$$E^2 = \left(\frac{d(r \circ \gamma)}{d\tau} \right)^2 + \left(1 + \frac{L^2}{(r \circ \gamma)^2} \right) \cdot \mathfrak{h}(r \circ \gamma).$$

Nach Einsetzen von \mathfrak{h} und Definition eines Potentials

$$V(r) := 1 - \frac{2M}{r} + \frac{L^2}{r^2} - \frac{2ML^2}{r^3}$$

erhält man dann die Energiegleichung:

$$(15) \quad E^2 = \left(\frac{d(r \circ \gamma)}{d\tau} \right)^2 + V(r \circ \gamma).$$

Ergänzung zur Folgerung: Hiermit gilt für die noch fehlende Geodätischengleichung unter den Bedingungen der letzten Folgerung:

$$(16) \quad 2 \cdot \frac{d^2(r \circ \gamma)}{d\tau^2} = -\frac{dV}{dr}.$$

Durch Plotten des Potentials $V(r)$ kann man sich nun einen Überblick über $(r \circ \gamma)(\tau)$ verschaffen. Für das *Newton'sche* Potential, bei dem der Term $-\frac{2ML^2}{r^3}$ fehlt, haben wir dies z. B. in 6.4 und 16.4, [Diff], durchgeführt. Für dieses Potential ergeben sich drei Fälle: hyperbolische, parabolische oder elliptische Orbits.

Das Potential $V(r)$ bei uns ist reichhaltiger: Es treten 4 Fälle auf:

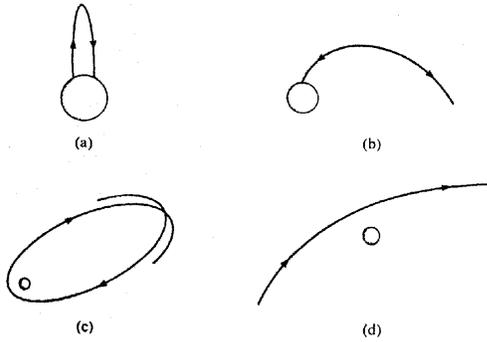


Abb. 2: Orbits im Schwarzschildmodell (eingescannt aus [O’N])

- *Crash-Orbit*: Hierbei stürzen *alle* Teilchen, unabhängig von ihren Anfangsbedingungen, direkt auf den Stern. Dieser braucht keine Ausdehnung zu haben, d.h. der Radius $2M$ wird immer erreicht! Im Newton’schen Fall kann für $L \neq 0$ solch ein Fall nicht auftreten.
- *Crash/Escape-Orbit*: Teilchen, die bei Fallbeginn eine auswärts gerichtete Geschwindigkeit besessen haben ($\frac{d(r \circ \gamma)}{d\tau}(0) > 0$), entfliehen ins Unendliche. Teilchen mit einer Geschwindigkeit Richtung Stern stürzen auf diesen wie im Crash-Orbit.
- *gebundener Orbit*: In diesem Fall oszilliert der Abstand unseres materiellen Teilchens zwischen einem Minimum und einem Maximum (analog zum elliptischen Fall bei Newton).

Im Falle der Sonne nennt man den minimalen Abstand *Perihel*, der maximale Abstand wird *Aphel* genannt.

- *Flyby-Orbit*: Das Teilchen kommt aus dem Unendlichen, fliegt am Stern vorbei und entflieht ins Unendliche (analog zum hyperbolischen Fall bei Newton).

Die Potentiale zu Newton und zu Schwarzschild, letzteres in den Fällen kleiner, mittlerer und großer Drehimpulse haben wir in Abbildung 3 geplottet. Aus diesen liest man ab, wann welcher Fall auftritt. Wir klassifizieren kurz in folgender Tabelle; dabei sind r_1 und r_2 die eventuell vorhandenen kritischen Punkte von $V(r)$ mit $r_1 < r_2$:

Drehimpuls	Energie und Anfangsbedingung	Orbit
kleiner Drehimpuls ($L^2 < 12M^2$)	$E^2 < 1$	Crash-Orbit
	$E^2 \geq 1$	Crash/Escape-Orbit
mittlerer Drehimpuls ($12M^2 < L^2 < 16M^2$)	$E^2 < V(r_1)$ und $(r \circ \gamma)(0) < r_1$	Crash-Orbit
	$V(r_2) \leq E^2 < V(r_1)$ und $(r \circ \gamma)(0) > r_1$	gebundener Orbit
	$V(r_1) < E^2 < 1$	Crash-Orbit
	$E^2 \geq 1$	Crash/Escape-Orbit
großer Drehimpuls ($L^2 > 16M^2$)	$E^2 < V(r_1)$ und $(r \circ \gamma)(0) < r_1$	Crash-Orbit
	$V(r_2) \leq E^2 < 1$ und $(r \circ \gamma)(0) > r_1$	gebundener Orbit
	$1 \leq E^2 < V(r_1)$ und $(r \circ \gamma)(0) > r_1$	Flyby-Orbit
	$E^2 > V(r_1)$	Crash/Escape-Orbit

2.3 Periheldrehung

Falls $L \neq 0$, ist $\frac{d(\varphi \circ \gamma)}{d\tau} \neq 0$, und daher kann man die Bahn des materiellen Teilchens als Funktion $r(\varphi)$ darstellen.

Satz: Für ein frei fallendes materielles Teilchen γ in N mit $L \neq 0$ gilt

$$(17) \quad \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{M}{L^2} + 3Mu^2,$$

wobei $u = \frac{1}{r \circ \gamma}$. Diese Differentialgleichung nennt man *Orbitgleichung*.

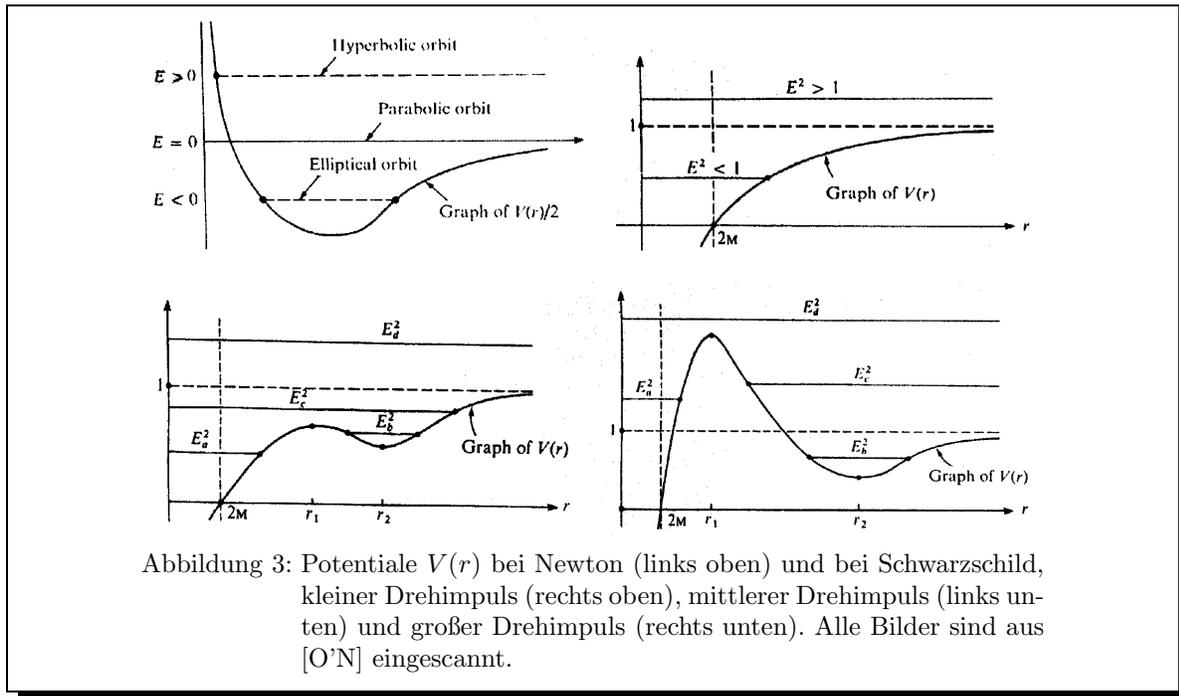


Abbildung 3: Potentiale $V(r)$ bei Newton (links oben) und bei Schwarzschild, kleiner Drehimpuls (rechts oben), mittlerer Drehimpuls (links unten) und großer Drehimpuls (rechts unten). Alle Bilder sind aus [O’N] eingescannt.

Für den Vergleich mit der analogen Newton’schen Orbitgleichung benutzt man die Gleichungen (13) und (14). Hiermit erhält man

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{M}{L^2}.$$

Diese Differentialgleichung hat die Lösung

$$(18) \quad \frac{1}{r} = \tilde{u} = \frac{M}{L^2} \cdot (1 + e \cos(\varphi)),$$

wobei e (die numerische Exzentrizität) aus den Anfangsbedingungen des Teilchens bestimmt ist.

Hiermit folgert man nun folgenden

Satz: Für den Fall, daß $r \gg 2M$, $L \gg M$ und $r \cdot \frac{d(\varphi \circ \gamma)}{d\tau} \ll 1$ und γ einen gebundenen Orbit beschreibt, ist γ fast elliptisch und die Lage des Perihels wächst bei jedem Umlauf des materiellen Teilchens um den Winkel

$$(19) \quad \delta \approx \frac{6\pi M^2}{L^2} = \frac{6\pi M}{a \cdot (1 - e^2)},$$

wobei a die große Halbachse der Fast-Ellipse und e die numerische Exzentrizität ist.

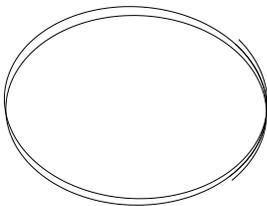


Abb. 4: Periheldrehung

Man beweist dies, indem man obige Newton’sche Lösung \tilde{u} in den Korrekturterm $3Mu^2$ der Gleichung (17) einsetzt. Man erhält dann die Lösung

$$u = \frac{M}{L^2} \cdot (1 + e \cos(\varphi)) + \frac{3M^3}{L^4} \cdot \left(1 + \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{6} \cdot \cos(2\varphi) + e \cdot \varphi \cdot \sin(\varphi) \right),$$

die wir nebenstehend geplottet haben. Um was zu erkennen, sind die M , L und e allerdings so gewählt, daß sie nicht völlig den Voraussetzungen des Satzes entsprechen. Dieser Plot rechtfertigt es, das Maximum von u , also das nächste Perihel, an der Stelle $2\pi + \delta$ zu suchen. Über verschiedene Näherungen mit den Verhältnissen aus der Voraussetzung erlangt man den Ausdruck für δ .

2.4 Orbits des Lichts

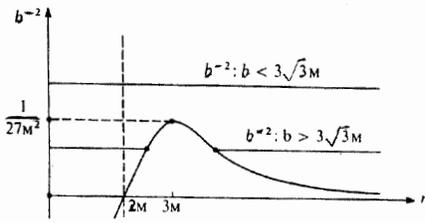
Für lichtartige Geodätische gilt $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0$. Es ergibt sich daher analog zum materiellen Teilchen eine Energiegleichung der Form

$$E^2 = \left(\frac{d(r \circ \gamma)}{ds} \right)^2 + \frac{L^2}{(r \circ \gamma)^2} \cdot \mathfrak{h}(r \circ \gamma).$$

Wenn man nun ein Potential

$$V(r) := \frac{L^2}{r^2} - \frac{2ML^2}{r^3}$$

definiert, so gelten die Gleichungen (15) und (16) entsprechend auch hier.



Mit der Definition $b := \frac{L}{E}$, dem sogenannten *Stoßparameter*, kann man die Energiegleichung für $L \neq 0$ unter Ausnutzung von (8) zu

$$\left(\frac{1}{r^2} \cdot \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + \frac{\mathfrak{h}}{r^2} = \frac{1}{b^2}$$

umschreiben. Mittels nebenstehendem Plot verschafft man sich wieder einen Überblick über die Bahnverläufe. Man erhält:

Abb. 5: Graph von \mathfrak{h}/r^2 (aus [O’N])

Stoßparameter	Anfangsbedingung	Orbit
kleiner Stoßparameter: $b < 3\sqrt{3} M$		Crash/Escape-Orbit
Stoßparameter $b = 3\sqrt{3} M$	nur für $(r \circ \gamma)(0) = 3M$ betrachtet	Kreisbahn
großer Stoßparameter $b > 3\sqrt{3} M$	$(r \circ \gamma)(0) < 3M$ $(r \circ \gamma)(0) > 3M$	Crash-Orbit Flyby-Orbit

Bei der Kreisbahn kann ein Schwarzschildbeobachter seinen Hinterkopf anschauen.

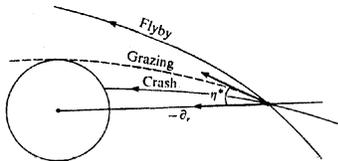


Abb. 6: Zur sichtbaren Sternengröße (eingescannt aus [O’N])

Eine anschaulichere Interpretation liefert folgendes

Lemma: Für ein lichtartiges Teilchen γ in N mit Stoßparameter b gilt:

$$(r \circ \gamma) \cdot \sin(\eta) = b \cdot \sqrt{\mathfrak{h}(r \circ \gamma)},$$

wobei η der Winkel zwischen $-\partial_r$ und der räumlichen Projektion von $\dot{\gamma}$, die die Form $\frac{d(r \circ \gamma)}{ds} \partial_r + \frac{d(\varphi \circ \gamma)}{ds} \partial_\varphi$ hat, ist.

Korollar: Ein Schwarzschildbeobachter im Abstand r sieht einen Stern mit Radius $r_{\text{Stern}} > 3M$ in einem Winkel $\eta_{\text{Stern}} \leq \pi/2$, so daß

$$\sin(\eta_{\text{Stern}}) = \frac{r_{\text{Stern}}}{r} \cdot \sqrt{\frac{\mathfrak{h}(r)}{\mathfrak{h}(r_{\text{Stern}})}}.$$

Die Lichtablenkung läßt einen Stern also größer erscheinen als nach Newton. Dort gilt trivialerweise $\sin(\eta_{\text{Stern}}) = \frac{r_{\text{Stern}}}{r}$.

2.5 Lichtablenkung

Für $L \neq 0$, gilt wiederum $\frac{d(\varphi \circ \gamma)}{ds} \neq 0$ und daher können wir auch die Lichtbahn als Funktion $r(\varphi)$ darstellen.

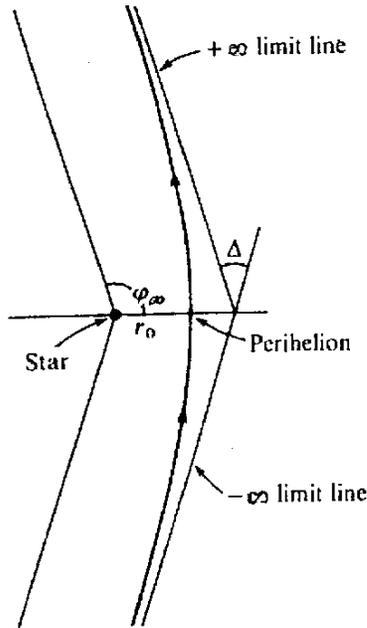


Abb. 7: Lichtablenkung (eingescannt aus [O'N])

Satz: Für ein lichtartiges Teilchen γ in N mit $L \neq 0$ gilt

$$(20) \quad \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = 3Mu^2,$$

wobei $u = \frac{1}{r \circ \gamma}$ (Orbitgleichung für Licht).

Den Newton'schen Fall, bei dem Licht nicht abgelenkt wird, erhält man durch $M = 0$ in Gleichung (20). Die Lösung ist $\tilde{u} = \frac{1}{r_0} \cdot \cos(\varphi)$, was in der Tat geradliniger Ausbreitung entspricht.

Wieder ist der Term $3Mu^2$ der relativistische Korrekturterm. Er wird für große Abstände klein, also breitet sich das Licht in weiter Entfernung vom Stern fast geradlinig aus. Wir können daher den Ablenkungswinkel Δ messen. Wir erhalten:

Satz: Für den Fall, daß γ einen Flyby-Orbit beschreibt und für dessen Perihel $r_0 \gg M$ gilt, dann gilt für den Ablenkungswinkel

$$(21) \quad \boxed{\Delta \approx \frac{4M}{r_0}}.$$

Wiederum beweist man dies, indem man die Newton'sche Lösung \tilde{u} in den Korrekturterm $3Mu^2$ der Gleichung (20) einsetzt. Man erhält dann die Lösung

$$u = \frac{1}{r_0} \cdot \left(1 - \frac{M}{r_0}\right) \cdot \cos(\varphi) + \frac{M}{r_0^2} \cdot (2 - \cos^2(\varphi)).$$

Über verschiedene Näherungen erhält man nun den Ausdruck für Δ . Den Zahlenwert für Δ konnten wir schon in Analysis mit Runge-Kutta-Verfahren für feste Massen bestimmen: vergleiche Aufgabe 170 in der 2. Übung zur Analysis III im WS 1991/92.

3. Starke Gravitation: Schwarze Löcher

3.1 Sternenkollaps

Für gewöhnliche, wasserstoff-fusionierende Sterne wie die Sonne gilt $r_{\text{Stern}} > 2M$, da die freiwerdende Energie durch die Fusion der Gravitation entgegenwirkt. Für diese Fälle reichte unser bisheriges Modell vollkommen aus.

Wenn nun ein Stern ausgebrannt ist (der Wasserstoff ist verbraucht), dann fällt er (nach einem Übergang, in dem er schwerere Elemente fusioniert, sich dabei ausdehnt und dann **Roter Riese** genannt wird) in sich zusammen. Es gibt verschiedene Endstadien:

- **Der Weiße Zwerg:** Tritt auf für Sterne, deren Masse kleiner als 1,4 Sonnenmassen ist. In diesem Fall schrumpfen die Sterne soweit, bis die Elektronenschalen sich berühren. Es ergeben sich größenordnungsmäßig folgende physikalische Daten:

Radius:	5400 km
Dichte:	$10^6 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$
Masse:	$< 2,2 \text{ km}$

Also ist der Außenbereich des Schwarzschild-Modells für Weiße Zwerge voll anwendbar.

- **Der Neutronenstern und der Pulsar:** Dies ist das Endstadium für Sterne, deren Masse zwischen einer und drei Sonnenmassen liegt. Hierbei verlassen die Elektronen die Bahnen der Atome und bilden ein Gemisch zusammen mit den Nukleonen der Atomkerne. Die Kerne und Elektronen sind also dicht gepackt. Pulsare sind schnell rotierende Neutronensterne. Physikalische Daten:

Radius: 10 km
 Dichte: $10^{15} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$
 Masse: 1,5 bis 4,5 M_{\odot}

Auch hier ist das Schwarzschildmodell anwendbar, gelangt aber bereits in extreme Bereiche.

- **Das Schwarze Loch:** Für Sterne, deren Masse größer als 3 Sonnenmassen ist, verlieren sogar die Nukleonen ihre Struktur und die Sterne fallen immer weiter zusammen. Es ist noch kein physikalisches Phänomen bekannt, daß dem unbegrenzten Kollabieren entgegenwirken könnte. Man vermutet aber quantenmechanische Effekte. Ohne diese Effekte gilt also für Schwarze Löcher:

Radius: 0 km
 Dichte: $\infty \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$
 Masse: $> 3 M_{\odot}$

Um diese zusammengefallenen Sterne zu beschreiben, wollen wir nun unser Modell modifizieren.

3.2 Kruskal-Modellierung Schwarzer Löcher

Bislang diente unsere Schwarzschild-Raumzeit also nur zur Modellierung von Sternen mit $r_{\text{Stern}} > 2M$. Man sollte aber eigentlich davon ausgehen, daß dies auch für Sterne von größerer Masse, bzw. kleinerem Radius möglich sein muß, somit müßte man die „Singularität“ $r = 2M$, wie sie bis 1933 genannt wurde, auch beheben können. Das hier vorgestellte Verfahren stammt von *Kruskal* (1960).

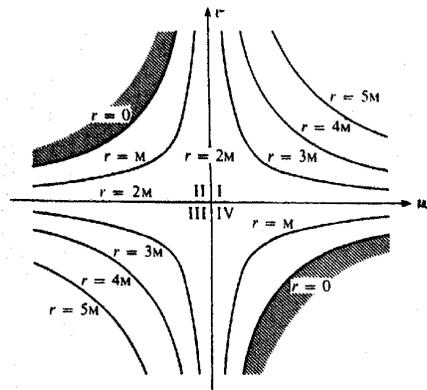


Abb. 8: Die Kruskal-Ebene (eingeschnitten aus [O'N])

Betrachte zunächst die Funktion

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow]-\frac{2M}{e}, \infty[$$

$$r \longmapsto (r - 2M) \cdot e^{(r/2M)-1}.$$

Es gilt: $f' > 0$, und somit ist f ein Diffeomorphismus.

Sei $Q := \{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u \cdot v > -\frac{2M}{3} \}$ (beachte: $-\frac{2M}{3} > -\frac{2M}{e}$) und $r(u, v) := f^{-1}(u \cdot v)$. Mit dieser Funktion r definieren wir:

Definition: Die Mannigfaltigkeit Q , versehen mit der Metrik $ds^2 = 2 \cdot (F \circ r) du dv$ (d. h. $g = (F \circ r) \cdot (du \otimes dv + dv \otimes du)$), wobei $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $r \mapsto (8M^2/r) e^{1-r/2M}$, heißt *Kruskal-Ebene*.

Der Schnitt von Q mit dem i 'ten Quadrant wird Q_i genannt.

Satz: Die Abbildung $(u, v) \mapsto (-u, -v)$ ist eine Isometrie von Q_1 auf Q_3 und von Q_2 auf Q_4 .

Definition: Auf $\cup_{i=1}^4 Q_i$ definiere die Zeitfunktion $t(u, v) := 2M \ln \left(\left| \frac{v}{u} \right| \right)$. Damit gilt:

$$dt = 2M \left(\frac{dv}{v} - \frac{du}{u} \right) \quad \text{und} \quad dr = 2M \cdot \mathfrak{h} \cdot \left(\frac{du}{u} + \frac{dv}{v} \right).$$

■

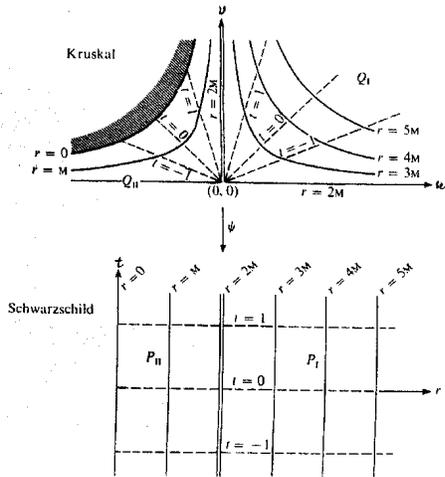


Abb. 9: Kruskal-Ebene und Schwarzschild-Raumzeit (eingescannt aus [O'N])

Weiterhin definieren wir folgende Bezeichnungen: π die kanonische Projektion von K auf Q , $K_i := \pi^{-1}(Q_i)$, $H := K \setminus \cup K_i$ der *Horizont* von K , r bzw. t die Radius- bzw. Zeitfunktion, wobei diese Funktionen nun auf K bzw. $K \setminus H$ definiert sind.

Beachte, daß die Zeit auf dem Horizont H nicht definiert ist, allerdings kann man trotzdem ∂_t auf ganz K fortsetzen, denn es gilt:

Satz: Das Vektorfeld $X = (v\partial_v - u\partial_u)/4M$ stimmt auf $K \setminus H$ mit ∂_t überein.

Wir wählen nun auf K die Zeitorientierung, bei der ∂_t im Bereich K_1 in die Zukunft zeigt (im Bereich K_2 , wie auch schon im Innenbereich B des Schwarzschildmodells, ist ∂_t raumartig). Mit dieser Zeitorientierung gilt:

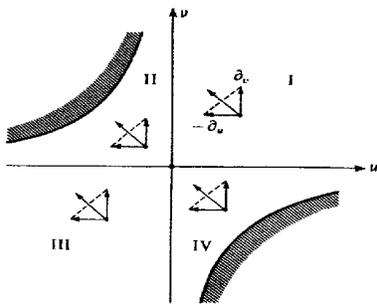


Abb. 10: Der Kruskal-Zukunftskegel (eingescannt aus [O'N])

Satz: $-\partial_u, \partial_v$ sind lichtartig und zeigen in die Zukunft.

Definition: Sei K' das Gebiet von K mit $v > 0$. K' ist das Modell für ein Schwarzes Loch, samt seinem Außenbereich.

Satz: Kein Teilchen, egal ob materiell oder lichtartig, kann aus dem Schwarzen Loch, d.h. K_2 , entkommen, es landet sogar in einer endlichen Zeit bei $r = 0$.

Satz: Mit Ausnahme der Photonen, die sich ständig auf dem Horizont befinden, fallen alle Teilchen, die den Horizont erreichen, ins Schwarze Loch.

Satz: Ein Schwarzschildbeobachter im Abstand r sieht das Schwarze Loch unter einem Winkel η_{Stern} , der durch

$$\sin(\eta_{\text{Stern}}) = 3M \cdot \frac{\sqrt{3b(v)}}{r}$$

festgelegt ist. Dabei ist $\eta_{\text{Stern}} \leq \pi/2$, wenn $r \geq 3M$, und $\eta_{\text{Stern}} \geq \pi/2$, wenn $2M \leq r \leq 3M$.

Ein Schwarzes Loch sieht also durch die Lichtablenkung so aus, als ob es eine recht große Ausdehnung hätte.

Man kann noch viele weitere Sätze beweisen, aber für unseren Rahmen sollten die hier vorgestellten Sätze für das Modell des Schwarzen Lochs genügen.

4. Vergleich mit Experimenten

Nach all den Betrachtungen wollen wir nun ganz konkret einige der theoretischen Ergebnisse mit tatsächlichen experimentellen Befunden vergleichen. Dies wird natürlich besonders leicht bei den Betrachtungen in Abschnitt 2 zur schwachen Gravitation, die real in unserem Sonnensystem vorliegt, gelingen.

4.1 Gleichheit von träger und schwerer Masse

Bei der Gleichsetzung der *Newton'schen* Formeln (10) und (11) nutzten wir die experimentelle, damals schon bekannte Tatsache, daß $m_{\text{träge}} \propto m_{\text{schwer}}$, also bei geeigneter Wahl der Proportionalitätskonstanten $m_{\text{träge}} \equiv m_{\text{schwer}}$. In der *Einstein'schen* Theorie muß von vorneherein $m_{\text{träge}} \equiv m_{\text{schwer}}$ gelten, da die Grundvoraussetzung der gesamten Theorie ja das Äquivalenzprinzip ist. Deshalb müssen die Effekte durch Trägheit bzw. durch Schwere, d. h. Gravitation, äquivalent, also ununterscheidbar sein. Da also das gesamte Gedankengerüst der allgemeinen Relativitätstheorie zusammenfallen würde, wenn träge und schwere Masse unterscheidbar wären, sind Messungen der Gleichheit beider Massen sehr wichtig. Wir skizzieren hier einige Experimente zu dieser Problematik.

Meßergebnisse

Bei den einzelnen Experimenten geben wir die Genauigkeit der Messung über den Korrekturfaktor $\varepsilon := \left| \frac{m_{\text{schwer}}}{m_{\text{träge}}} - 1 \right|$ an.

Eötvös/Dicke-Experiment

Bei diesem Experiment wird eine Waage mit zwei Massen durch die Erddrehung im Gravitationsfeld der Sonne bewegt. Zur Morgen- und zur Abendzeit sollten bei Abweichungen der schweren und trägen Massen Auslenkungen der Waage in verschiedenen Richtungen registrierbar sein. Diese bleiben aus. Eötvös konnte um 1920 herum eine Genauigkeit von

$$\varepsilon < 5 \cdot 10^{-9}$$

erreichen. Dicke wiederholte das Experiment um 1960 herum mit feineren Methoden und erhielt

$$\varepsilon < 10^{-11} .$$

Nordtvedt-Experiment

Nach der Mondlandung wurden auf der Mondoberfläche Spiegel zurückgelassen. Dies ermöglicht es, die Bahn des Mondes über Laufzeitmessungen von Laserstrahlen sehr genau zu vermessen (Lunar-Laser-Ranging). Mit dieser Methode konnte man den Unterschied zwischen den beiden Massenarten auf

$$\varepsilon < 10^{-13}$$

verkleinern. Dies ist die derzeit genaueste Messung. Interessant ist, daß man bei diesem Experiment nachweisen kann, daß auch die potentielle Energie der Körper im Gravitationsfeld (getreu $E = mc^2$) wie Massen wirken. Auch das Gravitationsfeld krümmt den Raum!

Die Zukunft: STEP-Experiment

Im nächsten Jahrhundert will man geeignete Meßgeräte in einem Satelliten um die Erde schicken. Da im Weltall einige auf der Erde störende Effekte ausgeschlossen werden können, wird man ε kleiner 10^{-17} drücken können. Dieser Bereich ist von besonderem Interesse, weil einige Leute hier Abweichungen vom Äquivalenzprinzip durch Quanteneffekte erwarten.

4.2 Eigenzeiten ruhender Beobachter

Während in der *Newton'schen* Theorie die Raumzeitstruktur selbstverständlich unabhängig von der Gravitationswechselwirkung ist, und somit die Eigenzeiten von Beobachtern unabhängig vom Ort überall gleich sind, ist dies bei *Einstein* in unserem Schwarzschildmodell anders.

Wie wir schon in Abschnitt 1.3 gesehen haben, gilt nämlich Formel (2) für die Eigenzeiten der Schwarzschildbeobachter. Diesen Effekt hat man folgendermaßen getestet: Man hat zwei Atomuhren im Tal synchronisiert, eine davon auf den Gipfel der Zugspitze gebracht, während die andere im Tal blieb, beide Uhren dann eine Woche in Ruhe laufen lassen und schließlich die Gipfel-Uhr wieder zurückgebracht und mit der Tal-Uhr verglichen. Mit diesem Experiment konnte man den berechneten Effekt tendenziell nachweisen, stößt aber auf folgendes Problem: Das Zwillingsparadoxon der speziellen Relativitätstheorie wirkt dem Gravitationseffekt entgegen. Beim Transport der einen Uhr muß man also die Geschwindigkeiten des Transports mitprotokollieren und den Zwillings-Effekt aus der Messung herausrechnen. Trotzdem die Geschwindigkeiten des Zuges und der Seilbahn, die zur Zugspitze fahren, recht genau kontrollierbar sind (auf dem Mt. Everest hätte man keine Chance . . .), sind die Fehler der Messung zu groß, um die Theorie voll bestätigen zu können; man kann halt nur die richtige Tendenz bestätigen.

Weitere Experimente mit Atomuhren führte man in hochfliegenden Flugzeugen durch. Diese sind aber keine Schwarzschildbeobachter (da sie ja auch Anteile entlang ∂_φ oder ∂_θ aufweisen), sodaß man Probleme durch neue Effekte erhält.

Sehr viel genauere Ergebnisse bekommt man durch Frequenzmessungen, was wir nun beschreiben wollen.

Rot- bzw. Blauverschiebung im Experiment von Pound, Rebka und Snider

Auf Seite 4 haben wir die Blau- bzw. Rotverschiebung von Lichtstrahlen betrachtet, die bei einem Radius r_1 ausgesandt und bei einem Radius r_2 absorbiert werden.

Können wir die Frequenzverschiebungen messen? Bei entfernten Sternen ist der Effekt zwar ziemlich groß, leider tritt neben der Gravitations-Rotverschiebung aber zusätzlich die Friedmann-Rotverschiebung auf. Die Voraussetzungen unseres Modells sind also nicht mehr erfüllt (Friedmann-Universum ist ja nicht statisch); auch ist nicht gewährleistet, daß der jeweilige Stern als einzelne Masse innerhalb einer größeren Umgebung betrachtet werden kann.

Nun sollte aber wenigstens die Rotverschiebung des von der Sonne kommenden Lichts meßbar sein. Da das Licht für den Weg von der Sonne zur Erde nur 8 Minuten benötigt, kann sie als statisch betrachtet werden und auch die anderen Voraussetzungen für das Schwarzschildmodell sind erfüllt. Aber auch das schlägt fehl: Die thermischen Bewegungen der Atome in der Sonne sind so groß und ungeordnet, daß die theoretisch scharfen Emissionslinien durch den Dopplereffekt so stark aufgeweitet sind, daß der Gravitations-Rotverschiebungseffekt innerhalb dieser Frequenzverteilung untergeht.

Pound und Rebka ist es aber gelungen, die Rotverschiebung auf der *Erde* nachzuweisen. Pound und Snider haben die Genauigkeit dieses Experiments, was wir im folgenden beschreiben, erhöht; wir geben ihre Meßwerte an (vgl. [P-S]).

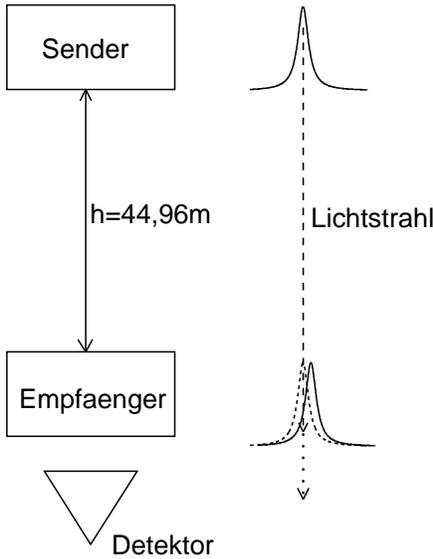


Abb. 11: Versuch von Pound und Snider

Um ehrlich zu sein: die obige Darstellung ist etwas vereinfacht. In Wirklichkeit gleicht man z. B. die Gravitations-Blauverschiebung durch den Dopplereffekt aus (der Empfänger wird sehr langsam bewegt) und so kann man die Frequenzverschiebung viel genauer bestimmen. Für die anderen kleinen Ungenauigkeiten, die physikalischen Tricks und sonstige Details des Versuchs verweisen wir auf den Originalartikel [P-S].

Da $r = 6370 \text{ km}$, $h = 44,96 \text{ m}$ und $M = 4,5 \text{ mm}$, gilt also $r \gg h \gg M$. Daher taylorntähert man Formel (3) und erhält:

$$\Delta\nu = \left(1 - \frac{M}{r} - 1 + \frac{M}{r+h}\right) \cdot \left(1 + \frac{M}{r+h}\right) + \dots = \left(-\frac{M}{r} + \frac{M}{r} - \frac{Mh}{r^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{M}{r} - \frac{Mh}{r^2}\right) + \dots \approx -\frac{Mh}{r^2} .$$

Mit dieser Formel erwartet man also eine Blauverschiebung von

$$\Delta\nu = 4,905 \cdot 10^{-15} \text{ Hz} .$$

Der gemittelte Meßwert von Pound und Snider ist nun

$$\Delta\nu = (4,9001 \cdot 10^{-15} \pm 4,66 \cdot 10^{-17}) \text{ Hz} .$$

Dieser Meßwert beinhaltet bereits statistische als auch systematische Fehler; man kann die Frequenzverschiebung also auf 1% genau bestimmen und bestätigen!

4.3 Periheldrehung beim Merkur u. a.

Während man nach *Newton* gemäß Formel (18) eine geschlossene Ellipse als Bahn der Planeten erwartet, also keinerlei Periheldrehung, so ergibt das Schwarzschildmodell nach der *Einstein'schen* Relativitätstheorie eine theoretisch erwartete Periheldrehung der Fast-Ellipsen nach Gleichung (19). Die theoretisch errechneten Werte befinden sich in der nächsten Tabelle zusammen mit den experimentell gemessenen.

Meßergebnisse

Da die exakte Bestimmung der Lage des Perihels eines Planeten immer schwieriger wird, je weiter er von der Sonne entfernt ist (wenn dabei — wie in unserem Sonnensystem — die Exzentrizitäten der Planeten nicht deutlich ansteigen), kann man nur bei den drei innersten Planeten die geringen Periheldrehungen messen. Die Ungenauigkeit der Messungen nimmt also mit der Sonnenentfernung zu.

Hier nun der Vergleich der experimentellen Werte mit den theoretischen. Die Periheldrehungen sind in Bogensekunden pro 100 Jahren ($[\delta] = '' / 100 \text{ Jahre}$) angegeben.

Planet	große Halbachse [·10 ⁶ km]	Exzentrizität	δ	
			theoretisch	experimentell
Merkur	57,91	0,2056	43,03	43,11 ± 0,45
Venus	108,21	0,0068	8,6	8,4 ± 4,8
Erde	149,6	0,0167	3,8	5,0 ± 1,2

Beim Merkur kann also die theoretische Voraussage auf fast 1% genau bestätigt werden!

4.4 Lichtablenkung an der Sonne

Da Licht keine Masse hat, erwartet man nach *Newton* keine Beeinflussung der geradlinigen Lichtbahnen durch die Gravitation. Nach *Einstein* aber gilt Gleichung (21), d. h. für Lichtstrahlen, die am Rande der Sonne vorbeifliegen, erwartet man eine theoretische Lichtablenkung von (″ steht wieder für Bogen Sekunden).

$$\Delta = 1,75'' .$$

Meßergebnisse

Zunächst war man zur experimentellen Bestimmung der Ablenkung von Lichtstrahlen an der Sonne auf Sonnenfinsternisse angewiesen, um die entfernten Sterne neben der Sonne überhaupt beobachten zu können (erste Messung im Jahre 1919). Ab 1970 änderte sich die Lage: Man konnte nun ferne Sterne beobachten, die im Bereich der Radiowellen strahlen. Dies ermöglicht eine langfristige Beobachtung entfernter Sterne, da die Sonne das Leuchten solcher Sterne nicht mehr überstrahlt. Einige experimentelle Messungen der Lichtablenkung sind die folgenden:

Jahr	Methode	Ort	Beobachter	Meßwert
1919	Sonnenfinsternis	Sobral	Crommelin, Davidson	1,98″ ± 0,18″
1919	Sonnenfinsternis	Principe	Eddington, Cottingham	1,61″ ± 0,45″
1922	Sonnenfinsternis	Wallal	Campbell, Trümpler	1,72″ ± 0,15″
1947	Sonnenfinsternis	Bocayura	van Biesbroeck	2,01″ ± 0,27″
1952	Sonnenfinsternis	Khartum	van Biesbroeck	1,70″ ± 0,10″
1974	Radiowellen		Counselman, Shapiro, et. al.	1,733″ ± 0,03″
1976	Radiowellen		Fomalant, Sramek	1,776″ ± 0,03″

Da Lichtstrahlen auch anderweitig von der Sonne leicht beeinflusst werden, sind diese Meßergebnisse ebenfalls überzeugend.

Literatur

- [Diff] Prof. Dr. H. Reckziegel: *Definitionen, Formeln, Sätze zu dem Vorlesungszyklus über Differentialgeometrie*. Vorlesungsskript. Köln, WS 1992/93–SS 1994
- [O’N] B. O’Neill: *Semi-Riemannian Geometry (with applications to relativity)*. Academic Press, 1983
- [Enz] P. Rennert, et. al.: *Kleine Enzyklopädie Physik*. 2. Auflage. Leipzig: Bibliographisches Institut, 1988
- [P-S] R. V. Pound, J. L. Snider: *Effect of Gravity on Gamma Radiation*. Physical Review **140 B** (1965), p. 788
- [Kr] W. Kranzer: *So interessant ist Physik!* Köln: Aulis-Verlag Deubner, 1982