Wintersemester 1992/93 Köln, den 25.01.93

Seminar über spezielle Funktionenräume

Anwendung der Fourier-Transformation auf die Lösung partieller Differentialgleichungen

von Uwe Münch

0.1 Ziele und Idee

Anhand den partiellen Differentialgleichungen (5) (der sogenannten Wärmeleitungsgleichung) und (26) (der sogenannten Wellengleichung) möchte ich beispielhaft zeigen, wie man die Fouriertheorie zur Lösung dieser Differentialgleichungen benutzen kann und welche Methoden man verwendet. Im 3. Abschnitt werde ich noch zwei weitere partielle Differentialgleichungen angeben, die man (ebenso wie viele andere partielle Dgl.) mit den dargestellten Methoden lösen kann. Eine dieser Differentialgleichungen ergibt sich aus komplizierten physikalischen Überlegungen und dient als Beispiel dafür, daß die mit Fouriertheorie lösbaren Differentialgleichungen nicht nur in trivialen Fällen auftauchen.

Eine **Partielle Differentialgleichung** ist eine Gleichung, deren Lösung eine banachraumwertige Funktion mehrerer reeller Variablen ist; also eine Gleichung zwischen

- einer Funktion mehrerer Variablen,
- deren partiellen Ableitungen nach diesen Variablen und
- den Variablen selbst.

Z. B. sieht eine partielle Differentialgleichung 2. Ordnung (dabei ist die *Ordnung* der Differentialgleichung gleich der höchsten vorkommenden Ordnung der Ableitungen) für die Funktion zweier Variablen $u = (x,t)$ allgemein so aus:

$$F\left(u(x,t), \frac{\partial u}{\partial x}(x,t), \frac{\partial u}{\partial t}(x,t), \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t), \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(x,t), x, t\right) = 0.$$

Als ‚Anfangsbedingungen' sind zum Beispiel $u(.,t_0)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(.,t_0)$ für ein festes t_0 vorgegeben.

In den Vorträgen [Ra], [Pü] und [Va] haben wir u. a. kennengelernt, daß unter Fouriertransformation komplexwertiger Funktionen (speziell: reellwertiger Funktionen) Differentiation in Multiplikation übergeht:

$$c_n(f') = inc_n(f) \quad \text{für alle n}$$ [1]

bzw.

$$(f')^\wedge(t) = itf^\wedge(t).$$ [2]

Wir wollen im folgenden nur solche partielle Differentialgleichungen betrachten, deren komplexwertige (reellwertige) Lösungsfunktionen von zwei Variablen abhängen. Fourierentwickeln wir die Lösungsfunktionen nach einer dieser Variablen (z. B. x), so hängen die Fourierkoeffizienten meist nur noch von der anderen Variablen t ab (z. B. bei linearen partiellen Dgl.). Häufig gehorchen die Fourierkoeffizienten also einer *gewöhnlichen Differentialgleichung*, deren Lösungen wir in den meisten Fällen schon kennen.

Sollten wir diese gewöhnlichen Differentialgleichungen aber auch nicht lösen können, so können wir (falls wir Glück haben) auch die Fourierkoeffizienten (die ja noch eine Funktion von t sind) fourierentwickeln. Wir erhalten dann meist für diese Koeffizienten *algebraische Gleichungen*. Diese sind im Vergleich am leichtesten lösbar. Allerdings erkaufen wir uns diese Erleichterung mit dem Problem der Rücktransformation („Erhaltung der Schwierigkeit").

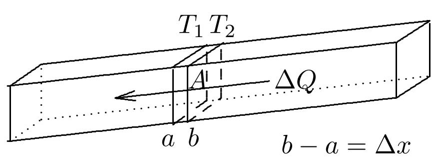
0.2 Die Beweisstrategie für die folgenden Aussagen

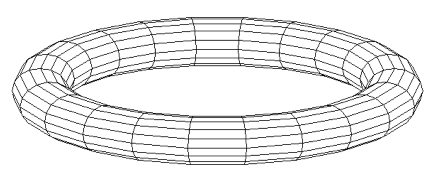
Unser Vorgehen beim Beweis der folgenden Sätze wird daher so aussehen:

Wir werden annehmen, es gebe eine Lösung $u(x,t)$ für die Differentialgleichung, die die im Satz geforderten Eigenschaften erfüllt. Mit Hilfe der Fourierentwicklung untersuchen wir die ‚analytischen Gesetzmäßigkeiten' von $u(x,t)$ solange, bis wir eine ‚gutartige' Gestalt für $u(x,t)$ angeben können. Diese Gestalt ist eine *notwendige Darstellung* von $u(x,t)$ ($\Longrightarrow$ Eindeutigkeit). Wenn es uns gelingt, alle Forderungen aus dem Satz für diese Darstellung zu zeigen, so ist auch die Existenz gesichert.[3]

1 Die 1– dimensionale Wärmeleitungsgleichung

Wir interessieren uns im folgenden meist für Temperaturverteilungen in einem homogenen Stab oder Torus, wobei die Temperatur innerhalb eines Querschnitts jeweils gleich sein soll.





In den meisten Fällen wird also eine Temperaturverteilung in den Körpern zu einem festen Zeitpunkt bekannt sein und das Verhalten der Temperaturverteilung zu späteren Zeitpunkten interessieren.[4]

[1] diese Aussage war ein Nebenprodukt beim Beweis des Theorems 4.4, [Ra] (gleichmäßige Konvergenz der Fourierreihe gegen f für $f \in \mathcal{C}^1$).

[2] Satz 1 (ii*), [Va]

[3] Solch eine Beweisstrategie wurde zum Beispiel auch in 11.4, [Ana] (Trennung der Variablen) benutzt.

[4] Da Temperaturen reell sind, sind alle Funktionen in diesem Abschnitt 1 reellwertig.

1.1 Vom Problem zur partiellen Differentialgleichung

Um das soeben dargestellte physikalische Problem mit einem geeigneten mathematischen Modell beschreiben zu können, geht man von folgenden zwei experimentellen Erfahrungen aus:

$$\Delta Q = m \cdot c_v \cdot \Delta T = c_v \cdot \rho \cdot V \cdot \Delta T \tag{1}$$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -k \cdot A \cdot \frac{\Delta T}{\Delta x} \qquad \text{mit} \quad k > 0 \tag{2}$$

Dabei beschreibt Gleichung (1) die Tatsache, daß eine Wärmeänderung (= Energieänderung) eine Temperaturänderung bewirkt in Abhängigkeit der stoffspezifischen Konstanten c_v (> 0, *spezifische Wärme*) und ρ (> 0, *Dichte*) und der körperabhängigen Größe V (*Volumen*). Anschaulich besagt dies zum Beispiel, daß man zum Erwärmen von Wasser (z. B. auf einem Herd) mehr Energie benötigt, wenn man auch mehr Wasser erwärmen möchte.

Gleichung (2) beschreibt die experimentelle Erfahrung, daß bei einer Temperaturdifferenz zwischen zwei Orten Wärme vom wärmeren Ort zum kälteren Ort fließt ($k > 0$, das negative Vorzeichen gibt die Richtung an). Dies geschieht in Abhängigkeit des durchfließbaren Querschnitts A und der stoffspezifischen Konstante k (das ist die sogenannte *Wärmeleitzahl* bzw. der *Wärmeleitkoeffizient*).

Dabei sind alle stoffspezifischen Konstanten von x unabhängig (da der Stab/Torus homogen). Desweiteren nehmen wir an, daß alle Konstanten von der Temperatur unabhängig sind, da sonst die Differentialgleichung im allgemeinen nicht linear bleibt und daher deutlich schwieriger lösbar ist. In der Realität ist diese Bedingung für Tieftemperaturen *nicht* erfüllt. Wir betrachten daher alle Temperaturfunktionen im Zimmertemperaturbereich und höher; die Temperaturfestlegung 0 Grad ist ansonsten willkürlich, z. B. die Celsiusskala.

Da ich hier nur plausibel machen möchte, daß aus den beiden Gleichungen die Wärmeleitungsgleichung folgt, erlaube ich mir in der folgenden Herleitung ein paar mathematische Ungenauigkeiten.

Herleitung

Wir wählen nun Δx in Gleichung (2) sehr klein, weil wir später den Grenzübergang $\Delta x \to 0$ machen werden. In der Gleichung (2) schreiben wir diesen Grenzübergang schon mal formal hin. Es ergibt sich:

$$\Delta Q = -k \cdot A \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \Delta t$$

Betrachten wir nun das Intervall $I = [a, b]$: Die Wärme Q, die in I hineinfließt, ist gerade:

$$\Delta Q_{\text{rein}} = +k \cdot A \cdot \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_b - \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_a \right] \cdot \Delta t \tag{3}$$

(Bei b gilt $+k$, weil das ‚$-$' nur die Richtung angibt; Falls $\frac{\partial T}{\partial x} > 0$, so besagt das ‚$-$', daß die Wärme nach links (= negative x–Richtung) fließt, also bei b in I hinein; da die hereinfließende Wärme *positiv* zu zählen ist, gilt $+k$.)

Aus Gleichung (1) erhält man andererseits durch $V = A \cdot (b - a)$ und Erweitern mit Δt:

$$\Delta Q = c_v \cdot \rho \cdot A \cdot (b - a) \cdot \frac{\Delta T}{\Delta t} \Delta t \tag{4}$$

Durch Gleichsetzen von (3) und (4) erhält man:

$$k \cdot \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_b - \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_a \right] \cdot A \cdot \Delta t = c_v \cdot \rho \cdot (b - a) \cdot \frac{\Delta T}{\Delta t} \cdot A \cdot \Delta t$$

Daher:

$$\frac{\left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_b - \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_a\right]}{b-a} = \frac{c_v \cdot \rho}{k} \cdot \frac{\Delta T}{\Delta t}$$

Durch die Grenzübergänge $\frac{\Delta T}{\Delta t} \to \frac{\partial T}{\partial t}$ und $b \to a$ (das bedeutet ja gerade $\Delta x \to 0$) erhält man als partielle Differentialgleichung die sogenannte *Wärmeleitungsgleichung* oder *Diffusionsgleichung*:

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = c \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad \text{mit} \quad c > 0,} \tag{5}$$

wobei $c := \frac{k}{c_v \cdot \rho} > 0$ (*Diffusionskonstante*).

1.2 Lösungen der Diffusionsgleichung

1.2.1 Torus der Länge 2π

Falls der Torus nicht die Länge 2π hat (sondern Länge L), so transformiere man die Längenskala um: $\lambda_{\text{neu}}(I) := \frac{2\pi}{L}\lambda_{\text{alt}}(I)$.

Theorem: Voraussetzung: Vorgegeben sei eine stetige, 2π–periodische Funktion f auf $\mathbb{R}$ (Temperaturverteilung zum Zeitpunkt $t = 0$).

Behauptung: Dann existiert eine eindeutig festgelegte Funktion $T(x,t)$ für $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, die folgende Eigenschaften erfüllt:

(i) $T(x,t)$ ist 2π–periodisch in x für alle $t > 0$.

(ii) Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial T}{\partial t}$ existieren und sind stetig für $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

(iii) $T(x,t)$ erfüllt die Wärmegleichung (5).

(iv) $T(x,t)$ konvergiert für $t \to 0+$ gleichmäßig gegen f:

$$\lim_{t\to 0+} ||T - f||_\infty = \lim_{t \to 0+} \left[\max_x |T(x,t) - f(x)|\right] = 0.$$

Beweis: Wie bereits in der Strategie erläutert, nutze ich zunächst die Behauptungen zur Konstruktion des $T(x,t)$ aus. Da $T(x,t)$ stetig differenzierbar ist, läßt es sich gleichmäßig (bzgl. x) durch seine Fourierreihe darstellen, für $f(x)$ hingegen können wir nur formal die Fourierreihe aufschreiben:

$$T(x,t) \overset{\text{glm.}}{=} \sum_{-\infty}^{\infty} c_n(t) e^{inx}, \qquad f(x) \rightsquigarrow \sum_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}_n e^{inx}$$

Weiterhin wissen wir, daß $T(x,t)$ für $t \to 0$ gleichmäßig gegen $f(x)$ konvergiert. Was gilt dann für die Fourierkoeffizienten?

$$\begin{aligned} |c_n(t) - \tilde{f}_n| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (T(x,t) - f(x))\, e^{-inx}\, dx \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |T(x,t) - f(x)|\, dx \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi \cdot ||T(x,t) - f(x)||_\infty \overset{t\to 0}{\longrightarrow} 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Also konvergieren die Fourierkoeffizienten von $T(x,t)$ für $t \to 0$ gegen die Fourierkoeffizienten von f.

Wie sieht nun die Differentialgleichung für die $c_n(t)$ aus?

$$
\begin{aligned}
2\pi\frac{d}{dt}c_n(t) &= \int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}T(x,t)e^{-inx}\,dx && (T \text{ ist stetig diffbar, } [0,2\pi] \text{ kompakt})\\
&= c\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial x^2}T(x,t)e^{-inx}\,dx && (\text{Dgl. für } T)\\
&= -cn^2\int_0^{2\pi}T(x,t)e^{-inx}\,dx && (\text{zweimal partiell integrieren; } 2\pi\text{–Periodizität von } T \text{ und } e^{-inx})\\
&= -2\pi cn^2 c_n(t)
\end{aligned}
$$

Also lautet die Differentialgleichung der Fourierkoeffizienten

$$\frac{d}{dt}c_n(t) = -cn^2 c_n(t).$$

Für die Anfangsbedingung $c_n(t_0)$ für ein $t_0 > 0$ lautet die Lösung[5]:

$$c_n(t) = c_n(t_0)e^{-cn^2(t-t_0)}$$

Unter dem Grenzübergang $t_0 \to 0$ geht $c_n(t_0)$ in $\tilde{f}_n$ über, also gilt:

$$c_n(t) = \tilde{f}_n e^{-cn^2 t}$$

Setzen wir diese Darstellung der Fourierkoeffizienten in die Fourierreihe ein, so erhalten wir

$$T(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\tilde{f}_n e^{-cn^2 t}e^{inx} \tag{7}$$

Also, mit der Definition der $\tilde{f}_n$:

$$T(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-cn^2 t}e^{inx}\int_0^{2\pi} f(y)e^{-iny}\,dy$$

Der Faktor $e^{-cn^2 t}e^{inx}$ läßt sich natürlich ins Integral ziehen, er ist ja unabhängig von y, aber: läßt sich Summation und Integration vertauschen? Ja, denn $\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-cn^2 t}e^{in(x-y)}$ konvergiert gleichmäßig bzgl. x und y, wenn $t > 0$, da dann $e^{cn^2 t} > cn^2 t$, also $e^{-cn^2 t} < \frac{1}{ct}\frac{1}{n^2}$ und nach dem Majorantenkriterium konvergiert dann die fragliche Summe absolut, da $\sum_1^{\infty}\frac{1}{n^2}$ und natürlich auch $\sum_{-\infty}^{-1}\frac{1}{n^2}$ konvergieren.
Also gewinnen wir als erste Darstellung für $T(x,t)$ den Ausdruck:

$$\boxed{T(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-cn^2 t}e^{in(x-y)}\right] f(y)\,dy = p_t * f} \tag{8}$$

mit

$$p_t(x) := \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-cn^2 t}e^{inx}. \tag{9}$$

Wir wollen noch eine andere Darstellung für $T(x,t)$ finden. Für dieses Ziel benötigen wir folgendes

[5] hier wär's schlecht mit einer Fouriertransformation der Fourierkoeffizienten; zumindest mathematisch exakt, Physikerüberlegungen würden schon klappen; aber dann nehmen wir doch lieber die vollkommen saubere Lösung aus [Ana] für die gewöhnliche Dgl.

Lemma: Sei f aus $L^1(I\!R)$ und stetig differenzierbar, so daß $\sum_{-\infty}^{\infty} f'(x+2\pi n)$ gleichmäßig auf $[0,2\pi[$ konvergiert. Weiterhin konvergiere auch die Reihe $\sum_{-\infty}^{\infty} f(x_0+2\pi n)$ für mind. ein $x_0 \in [0,2\pi[$. Dann konvergiert auch $\sum_{-\infty}^{\infty} f(x+2\pi n)$ gleichmäßig auf ganz $[0,2\pi[$ und:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} f(x+2\pi n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{-\infty}^{\infty} f^{\wedge}(n) e^{inx}$$

Beweis: Wegen der Summation über alle $n \in Z\!\!\!Z$ und der gleichmäßigen Konvergenz von

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f'(x+2\pi n)$$

auf $[0,2\pi[$ ist diese Reihe sogar für alle $x \in I\!R$ definierbar mit gleichmäßiger Konvergenz für alle diese x. Diese Funktion ist 2π–periodisch. Daher ist diese Funktion natürlich auch auf dem beschränkten Intervall $[0,2\pi]$ gleichmäßig konvergent. Nach dem 3. Vererbungssatz ist dann auch

$$g(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+2\pi n)$$

gleichmäßig konvergent und für die Ableitung gilt:

$$g'(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f'(x+2\pi n).$$

Also ist $g \in \mathcal{C}^1$, 2π–periodisch. Aus diesem Grunde kann man g gleichmäßig durch seine Fourierreihe darstellen:

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

Berechnen wir die Fourierkoeffizienten:

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(y) e^{-iny}\, dy && \text{(nun: Einsetzen der Def. von } g\text{)} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(y+2\pi k) e^{-iny}\, dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} f(y+2\pi k) e^{-iny}\, dy && \text{(Summe glm. konvergent)} \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} f(y) e^{-iny}\, dy && \text{(Substitutionsregel, } e^{-iny} \text{ } 2\pi\text{–periodisch)} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-iny}\, dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f^{\wedge}(n) && \text{(Def. der Fouriertransformierten)}
\end{aligned}$$

Damit gilt also, wenn man diesen soeben berechneten Ausdruck für die Fourierkoeffizienten in die Fourierreihe einsetzt:

$$g(x) \overset{\text{Def von } g}{=} \sum_{-\infty}^{\infty} f(x+2\pi n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{-\infty}^{\infty} f^\wedge(n) e^{inx}. \quad ^6$$

Wir wollen das Lemma auf $f(x) = e^{-\alpha x^2}$ anwenden. Dazu berechnen wir zunächst die Fouriertransformierte:

$$\begin{aligned} f^\wedge(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha y^2} e^{-ixy}\, dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\alpha y^2 + ixy)}\, dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\left(y+\frac{ix}{2\alpha}\right)^2 - \frac{x^2}{4\alpha}}\, dy \qquad \text{(quadr. Ergänzung)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha z^2}\, dz}_{=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}} \qquad \text{(Substitution } z := y + \tfrac{ix}{2\alpha}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha}} \end{aligned}$$

Nun müssen wir überprüfen, ob f die Voraussetzungen des Lemmas erfüllt. Wir benutzen dazu ein hinreichendes Kriterium, um die Konvergenzbedingungen der Voraussetzung zu untersuchen. Wenn wir Konstanten $A > 0$, $a > 0$, $p > 1$ finden können, so daß $|f(x)| \leq |x|^{-p}$ für alle x mit $|x| \geq A$, so konvergiert die Reihe $\sum_{-\infty}^{\infty} f(x+2\pi n)$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}$.[7] Es bleibt also zu zeigen, daß für die Funktionen $f(x) = e^{-\alpha x^2}$ und $f'(x) = -2\alpha x e^{-\alpha x^2}$ jeweils solche Konstanten existieren. Das glaubt man zwar sofort, aber trotzdem nochmal: Wähle Œ $A > \frac{1}{2\alpha}$. Dann gilt, da $|x| \geq A$: $|f(x)| \leq |f'(x)|$, somit brauchen wir nur Konstanten für f' zu

[6] Aus dieser Formel läßt sich auch leicht die *Poisson–Summenformel*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} h(bn) = \frac{\sqrt{2\pi}}{b} \sum_{-\infty}^{\infty} h^\wedge\left(\frac{2\pi}{b} n\right)$$

mit einem $b > 0$ beweisen: Sei also $a > 0$ und definiere f (fürs Lemma) durch $h(x) = f(ax)$. Dann:

$$f^\wedge(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h\left(\frac{y}{a}\right) e^{-iny}\, dy = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-iant}\, dt = a h^\wedge(an).$$

Mit dem Lemma für f gilt dann ($x = 0$; $f(2\pi n) = h\left(\frac{2\pi n}{a}\right)$):

$$\sum_{-\infty}^{\infty} h\left(\frac{2\pi n}{a}\right) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \sum_{-\infty}^{\infty} h^\wedge(an)$$

und mit $b := \frac{2\pi}{a}$ ergibt sich die Poisson–Summenformel.

[7] Zum Beweis dieser Tatsache möchte ich den Weierstraß'schen M–Test (Prof. Armbrust), das ist das folgende Majorantenkriterium, benutzen (vgl. [Ba], S. 314): Wenn $||f_n||_\infty \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\sum_1^\infty c_n$ konvergiert, dann konvergiert $\sum_1^\infty f_n$ gleichmäßig. Der Beweis ist mit dem Cauchy–Kriterium ein Einzeiler:

$$\left|\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k \right|\right|_\infty \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} ||f_k||_\infty \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k$$

Wir brauchen die glm. Konvergenz nur für $x \in [0, 2\pi[$ (statt für $x \in \mathbb{R}$) zu zeigen (weil der Ausdruck 2π–periodisch ist).

finden, für f sind diese dann auch gut. Wähle $a = 1$, $p = 2$. Ich will nun $\frac{f'}{x^{-2}} \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$ zeigen. Hieraus folgt dann die Existenz eines A (nach dem, was Konvergenz bedeutet), so daß für alle $|x| \geq A$ die Abschätzung $\frac{2\alpha x e^{-\alpha x^2}}{x^{-2}} \leq 1$ gilt, was wir zeigen wollten. Jetzt also zu dieser Konvergenz: Wir wenden zweimal den Satz von l'Hospital an (die Voraussetzungen sind jeweils erfüllt) und kennzeichnen die durch ihn im Grenzwert $x \to \infty$ gültigen Gleichungen mit einem $(*)$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{2\alpha x e^{-\alpha x^2}}{x^{-2}} &= \lim_{x\to\infty} 2\alpha \frac{x^3}{e^{+\alpha x^2}} \\
&\overset{(*)}{=} \lim_{x\to\infty} 2\alpha \frac{3x^2}{2\alpha x e^{\alpha x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{e^{\alpha x^2}} \\
&\overset{(*)}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{3}{2\alpha x e^{\alpha x^2}} = 0
\end{aligned}$$

Also können wir jetzt endlich das Lemma auf f anwenden und erhalten, wenn wir statt $x + 2\pi n$ als Argument $x - 2\pi n$ einsetzen (was nichts ändert wegen der Summation über alle $n \in \mathbb{Z}$):

$$\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x-2\pi n)^2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{n^2}{4\alpha}} e^{inx}$$

Setzen wir $\alpha := \frac{1}{4ct}$, so erkennen wir einen Teil des Ausdrucks auf der rechten Seite als p_t (vgl. (9)):

$$\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-2\pi n)^2}{4ct}} = \sqrt{\frac{ct}{\pi}} \underbrace{\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-cn^2 t} e^{inx}}_{2\pi p_t}$$

Damit läßt sich $T(x,t)$ zu einem handlicheren Ausdruck umformen:

$$\begin{aligned}
T(x,t) &\overset{(8)}{=} p_t * f = \frac{1}{2\sqrt{\pi ct}} \int_0^{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y-2\pi n)^2}{4ct}} f(y)\,dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi ct}} \sum_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{(x-y-2\pi n)^2}{4ct}} f(y)\,dy \qquad \text{(glm. Konvergenz)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi ct}} \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} e^{-\frac{(x-y)^2}{4ct}} f(y)\,dy \qquad \text{(Substitution } y \rightsquigarrow y + 2\pi n\text{, möglich, weil } f\ 2\pi\text{–periodisch)}
\end{aligned}$$

Œ sei das A des hinr. Krit. eine natürliche Zahl. Dann:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} f(x+2\pi n) = \sum_{-\infty}^{-A} f(x+2\pi n) + \sum_{-A}^{A} f(x+2\pi n) + \sum_{A}^{\infty} f(x+2\pi n)$$

Der mittlere Term ist als endliche Summe für die Konvergenz ohne Interesse. Die beiden anderen Terme müssen nun gegen von x unabhängige konvergente Reihen abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned}
\sum_{-\infty}^{-A} f(x+2\pi n) &\leq \sum_{-\infty}^{-A} \frac{a}{|x - 2\pi|n||^p} \overset{x\leq 2\pi}{\leq} a \sum_{A}^{\infty} \frac{1}{(2\pi(n-1))^p} = a \sum_{A-1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi n)^p} \\
\sum_{A}^{\infty} f(x+2\pi n) &\leq \sum_{A}^{\infty} \frac{a}{|x+2\pi n|^p} \overset{x\geq 0}{\leq} a \sum_{A}^{\infty} \frac{1}{(2\pi n)^p}
\end{aligned}$$

Die Ausdrücke ganz rechts sind für $p > 1$ konvergent.

$$= \quad \frac{1}{\sqrt{4\pi ct}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-x)^2}{4ct}} f(y)\, dy \qquad \text{(im Exponenten } x \text{ und } y \text{ vertauscht)}$$

Mittels einer Translation um $+x$ ergibt sich nun also die Darstellung:

$$\boxed{T(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi ct}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{4ct}} f(x+y)\, dy} \tag{10}$$

Wir geben uns nun an den Beweis der Existenz: Erfüllen diese $T(x,t)$–Darstellungen die Behauptungen des Theorems?

Da wir zwischen den Gleichungen (7), (8) und (10) nur Äquivalenzumformungen durchgeführt haben, brauchen wir die Behauptungen jeweils nur an einer beliebigen dieser Darstellungen beweisen.

(i) Die 2π–Periodizität von $T(x,t)$ sieht man direkt z. B. in Glg. (7), weil e^{inx} 2π–periodisch ist.

(ii) Differenzierbarkeit nach t: Sei ein beliebiges, festes x gegeben. Mit der Substitution $z := e^{-ct} \in]0,1[$ in (7) erhält man eine Potenzreihe mit Konvergenzradius ≥ 1. Diese ist bekannterweise differenzierbar mit demselben Konvergenzradius ≥ 1, indem man gliedweise differenziert. Also existiert $\frac{\partial T}{\partial t}$.
Differenzierbarkeit nach x: Diese untersuchen wir mit dem 3. Vererbungssatz (beliebiges, festes t). Die Frage nach der ersten Differentiation führt auf die Untersuchung der gleichmäßigen Konvergenz von $\sum_{-\infty}^{\infty} in\tilde{f}_n e^{-cn^2 t} e^{inx}$. Nach den Betrachtungen mittels u. a. l'Hospital (s. o.) wissen wir, daß diese Reihe in der Tat gleichmäßig konvergiert, da wegen (6) außerdem die Abschätzung $\tilde{f}_n \leq ||f||_\infty$ gilt. Also existiert die erste Ableitung. Die Frage nach der zweiten Ableitung geht ganz analog mit der Untersuchung der glm. Konvergenz von $\sum_{-\infty}^{\infty} -n^2 \tilde{f}_n e^{-cn^2 t} e^{inx}$. Mit der gleichen Abschätzung für die $\tilde{f}_n$ und analogen l'Hospital–Betrachtungen bestätigt man auch hier diese glm. Konvergenz und damit die Existenz von $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$. Diese Ableitung ist nach dem 3. Vererbungsatz auch gliedweise zu berechnen.
Diese Ableitungen sind stetig, da sie noch weiter differenzierbar sind (analoge Betrachtungen).

(iii) Nach dem letzten Punkt können wir in Glg. (7) gliedweise differenzieren. Eine Okularinspektion dieser Ableitungen zeigt die Gültigkeit der Wärmegleichung (5).

(iv) Um diesen Teil der Behauptung zu beweisen, gehen wir von Glg. (10) aus. Wir setzen $\beta := \frac{1}{\sqrt{4ct}} > 0$ und definieren $K_\beta := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \beta e^{-\beta^2 x^2}$. Damit gilt also:

$$T(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_\beta(y) f(x+y)\, dy$$

Als erstes untersuchen wir nun die Eigenschaften von diesem K_β. Da $\beta > 0$ einerseits und nach [Ana] andererseits gilt:

$$K_\beta \geq 0, \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_\beta = 1 \tag{11}$$

Ich behaupte weiter:

$$\int\limits_{|x|\geq x_0} K_\beta(x)\, dx \overset{\beta\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{für beliebiges } x_0 > 0. \tag{12}$$

Dazu: Für jedes $x > 0$ gilt: $K_\beta \overset{\beta\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Wenn wir nun eine $\mathcal{L}^1$–Funktion g finden können, die die K_β für alle $\beta \geq \beta_0$ beschränkt, so gilt (12) nach dem Satz über die majorisierte Konvergenz (da $\int\limits_{-\infty}^{\infty} 0\,dx = 0$). Um dieses g zu finden, untersuchen wir die K_β noch weiter. Es gilt nämlich für alle $\beta_1^2 \geq \beta_2^2 \geq \frac{1}{2x_0^2} (= \beta_0^2)$, $|x| \geq x_0$:

$$K_{\beta_1}(x) \leq K_{\beta_2}(x) \leq K_{\beta_0}(x) = \frac{1}{2x_0^2} e^{-\frac{1}{(2x_0^2)^2} y^2} := g \in \mathcal{L}^1(I\!R)$$

Warum gilt dies? Leiten wir $K_\beta(x)$ nach β ab, so erhalten wir:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(e^{-\beta^2x^2} - 2\beta^2x^2e^{-\beta^2x^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(1-2\beta^2x^2)e^{-\beta^2x^2}$$

Setzen wir unser vorgegebenes x_0 ein, so ergibt sich: Für $\beta^2 \geq \frac{1}{2x_0^2}$ ist $K_\beta(x_0)$ monoton fallend bzgl. β. Wegen $|x| \geq x_0$ gilt auch $\frac{1}{2x^2} \leq \frac{1}{2x_0^2}$, daher: $\beta^2 \geq \frac{1}{2x_0^2} \geq \frac{1}{2x^2}$ und daher ist auch die Ableitung von K_β bzgl. β an der Stelle x kleiner Null, daher auch monoton fallend bzgl. β. Das bedeutet aber gerade, daß die Behauptung gilt.
Nach dem Beweis dieser Eigenschaften von K_β läuft der Rest des Beweises analog zum Beweis der glm. Konvergenz des Cesaro–Mittels[8]. Sei also $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Da f stetig auf dem kompakten Intervall $[0, 2\pi]$, ist f auch glm. stetig: Es existiert also ein $y_0 > 0$ unabhängig von x, so daß

$$\forall y : |y| \leq y_0 \quad \Rightarrow \quad |f(x+y) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Nach (12) existiert ein β_0, so daß

$$\forall \beta : \beta \geq \beta_0 \quad \Rightarrow \quad \int\limits_{|y|\geq y_0} K_\beta(y)\,dy \leq \frac{\varepsilon}{4||f||_\infty}$$

Diese Aussage ist immer noch völlig von x unabhängig, insbesondere kann das β_0 von x unabhängig gewählt werden. Es ergibt sich nun für die $\beta \geq \beta_0$:

$$\begin{aligned}
|T(x,t) - f(x)| &= \left|\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} K_\beta(y) f(x+y)\,dy\right) - f(x)\right| \\
&\overset{\text{wegen (11)}}{=} \left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} K_\beta(y)(f(x+y) - f(x))\,dy\right| \\
&\leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_\beta(y)|f(x+y) - f(x)|\,dy \\
&\leq \underbrace{\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{|y|\leq y_0} K_\beta(y)\,dy}_{\leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_\beta(y)\,dy = 1} + 2||f||_\infty \underbrace{\int\limits_{|y|\geq y_0} K_\beta(y)\,dy}_{\leq \frac{\varepsilon}{4||f||_\infty}} \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

Diese Abschätzungen sind von x unabhängig, daher gilt die Konvergenz gleichmäßig. Da definitionsgemäß $\beta \to \infty$ dem Grenzübergang $t \to 0$ entspricht, ergibt sich mit den soeben durchgeführten Betrachtungen die letzte Behauptung.

[8] vgl. Theorem 3.3, [Ra].

Nachdem wir jetzt endlich den Beweis abgeschlossen haben, wollen wir noch zwei wichtige Eigenschaften von $T(x,t)$ herausfinden. Dazu untersuchen wir zunächst das p_t (vgl. (9)):

$$\int_0^{2\pi} p_t(x)\,dx \overset{\text{glm. Konv.}}{=} \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-cn^2t}\int_0^{2\pi} e^{inx}\,dx = 1,$$

wobei die letzte Gleichung gilt, weil das Integral nur für $n = 0$ verschieden von Null ist. Also ergibt sich:

$$|T(x,t)| = \left|\int_0^{2\pi} p_t(y)f(x-y)\,dy\right| \leq ||f||_\infty \int_0^{2\pi} p_t(y)\,dy = ||f||_\infty$$

Also ist $T(x,t)$ beschränkt durch das Maximum von f, deshalb nennt man diese Beziehung *Maximumsprinzip.*

Als zweite, sehr anschauliche Eigenschaft versuchen wir etwas über das Verhalten von $T(x,t)$ für $t \to \infty$ herauszufinden. Dazu betrachten wir einfach mal folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \tilde{f}_n e^{-cn^2t}e^{inx}\right| &\leq \sum_1^{\infty}\left|\tilde{f}_n e^{-cn^2t}\right| + \sum_{-\infty}^{-1}\left|\tilde{f_{-n}} e^{-cn^2t}\right| \\
&\leq 2||f||_\infty \sum_1^{\infty} e^{-cn^2t} \quad \text{(wegen einer analogen Betrachung wie in Glg. (6))} \\
&\leq 2||f||_\infty \sum_1^{\infty} e^{-cnt} = 2||f||_\infty e^{-ct}\sum_0^{\infty} e^{-cnt} \\
&\overset{\text{geom. Reihe}}{=} 2||f||_\infty \frac{e^{-ct}}{1-e^{-ct}} \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Daher gilt also (vgl. (7)):

$$T(x,t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \tilde{f}_0 = \text{const. bzgl. } x$$

Dies entspricht der anschaulichen Erfahrung, daß sich die Temperaturen in einem abgeschlossenen System mit der Zeit ausgleichen, also überall den gleichen Wert annehmen.

1.2.2 Gerade und ungerade Funktionen

Wenn f *ungerade* ist, so gilt dasselbe für die x–Abhängigkeit von $T(x,t)$: Man substituiere dazu y durch $-y$ in (10) und betrachte dann in dieser Glg. $T(-x,t)$. Man erkennt: Die Vertauschung der Grenzen kompensiert sich mit der inneren Ableitung der Substitution (das -1 dreht die Grenzen wieder richtig), in $e^{-\frac{y^2}{4ct}}$ bleibt die Substitution ohne Auswirkung und dadurch, daß f ungerade ist, erhalten wir gerade $T(-x,t) = -T(x,t)$. Daher ist $T(x,t)$ als Sinus–Reihe darstellbar[9]:

$$T(x,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-cn^2t}\left(\int_0^{\pi} f(y)\sin(ny)\,dy\right)\sin(nx) \tag{13}$$

Deshalb gilt: $T(0,t) = T(\pi,t) = 0$ für alle $t > 0$.

[9] vgl. [Ra], 3.2 (iii)

Analog: Wenn f *gerade* ist, so gilt dasselbe für die x–Abhängigkeit von $T(x,t)$ (nach der gleichen Argumentation (Substitution $y \rightsquigarrow -y$ in (10)) erhält man halt $T(-x,t) = T(x,t)$). Daher ist $T(x,t)$ als Kosinus–Reihe darstellbar[10]:

$$T(x,t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi f(y)\,dy + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-cn^2t}\left(\int\limits_0^\pi f(y)\cos(ny)\,dy\right)\cos(nx) \tag{14}$$

Deshalb ist $\frac{\partial T}{\partial x}$ eine Sinus–Reihe und daher ungerade. Daher gilt: $\frac{\partial T}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial T}{\partial x}(\pi,t) = 0$ für alle $t > 0$; das bedeutet: kein Wärmefluß durch $x = 0$ bzw. $x = \pi$.

Wir interessieren uns für die Umkehrungen:

Aussage: Falls ein x_0 existiert, so daß $T(x_0,t) = 0$ für alle $t > 0$, dann ist $f(x - x_0)$ ungerade (insbesondere folgt also auch: $T(x_0 + \pi, t) = 0$ für alle $t > 0$).

Beweis: Œ: wähle $x_0 = 0$. Dann gilt nach (7):

$$T(0,t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}_n e^{-cn^2t} \overset{\text{Vor.}}{=} 0,$$

was man zu

$$\tilde{f}_0 + \sum_{1}^{\infty}\left(\tilde{f}_n + \tilde{f}_{-n}\right)e^{-cn^2t} = 0$$

umschreiben kann. Setzt man nun $z := e^{-ct}$ für $t > 0$, so sieht man, daß man (da $z \in]0,1[$) eine Potenzreihe mit Konvergenzradius ≥ 1 erhält, die für alle z gleich Null ist. Da für $t \to \infty$ e^{-ct} gegen 0 konvergiert, findet man eine Nullfolge, deren Folgenglieder $\neq 0$ sind. Nach dem Identitätssatz für Potenzreihen gilt daher: $\tilde{f}_0 = 0$ und $\tilde{f}_n + \tilde{f}_{-n} = 0$, d. h. $\tilde{f}_n = -\tilde{f}_{-n}$. Nach dem Identitätssatz für die Fourierkoeffizienten[11] folgt dann $f(x) = -f(-x)$[12], also ist f ungerade.

Aussage: Falls ein x_0 existiert, so daß $\frac{\partial T}{\partial x}(x_0,t) = 0$ für alle $t > 0$, dann ist $f(x - x_0)$ gerade (insbesondere folgt also auch: $\frac{\partial T}{\partial x}(x_0 + \pi, t) = 0$ für alle $t > 0$).

Beweis: Œ: wähle wiederum $x_0 = 0$. Dann gilt:

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0,t) = \sum_{-\infty}^{\infty} in\tilde{f}_n e^{-cn^2t} \overset{\text{Vor.}}{=} 0,$$

was man zu

$$\sum_{1}^{\infty}\left(in\tilde{f}_n - in\tilde{f}_{-n}\right)e^{-cn^2t} = 0$$

umschreiben kann. Analog zum Beweis der vorhergehenden Aussage, gilt nach dem Identitätssatz für Potenzreihen: $\tilde{f}_n - \tilde{f}_{-n} = 0$, d. h. $\tilde{f}_n = \tilde{f}_{-n}$. Nach dem Identitätssatz für die Fourierkoeffizienten folgt dann analog zu oben: $f(x) = f(-x)$.

[10] vgl. [Ra], 3.2 (ii)

[11] vgl. [Ra], 3.4

[12] Definiere $g(x) := -f(-x)$. Dann:

$$c_n(g) = -c_{-n}(f) = c_n(f), \qquad \text{wobei die letzte Gleichung wegen } \tilde{f}_n = \tilde{f}_{-n} \text{ gilt.}$$

Also nach 3.4, [Ra]: $-f(-x) = g(x) = f(x)$.

Fortsetzung von Funktionen

Vorgegeben sei eine Funktion $T(x,t) : [0,\pi] \times I\!R_+ \longrightarrow I\!R$, die folgende Bedingungen erfüllt: Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial T}{\partial t}$ existieren und sind stetig, wobei die partiellen Ableitungen an den Rändern 0 und π als linksseitiger (l-lim) bzw. rechtsseitiger (r-lim) Limes zu verstehen sind, und $T(x,t)$ erfüllt die Wärmegleichung (5).

Wir fragen nach den zusätzlichen Voraussetzungen, die wir an $T(x,t)$ stellen müssen, um $T(x,t)$ als ungerade oder gerade Funktion auf $[-\pi,\pi]$ fortsetzen zu können und welche Voraussetzungen nötig sind, um diese Funktionen 2π–periodisch auf ganz $I\!R$ fortsetzen zu können.

Wir betrachten als erstes die Zusatzbedingung $T(0,t) \equiv 0$. Für diesen Fall ist eine differenzierbare Fortsetzung auf $[-\pi,\pi]$ als ungerade Funktion möglich. Denn: Definiere: $T(-x,t) := -T(x,t)$ für $x \in [0,\pi]$. Die so erhaltene Funktion ist stetig (Aneinanderheften stetiger Funktionen). Auch $\frac{\partial T}{\partial x}(0,t)$ ist im rechts- und linksseitigen Limes gleich (also existiert diese Ableitung in 0):

$$\frac{T(-h,t)}{-h} = \frac{-T(h,t)}{-h} = \frac{T(h,t)}{h} \tag{15}$$

Da $T(0,t) \equiv 0$, gilt auch für jedes t in den beidseitigen Limetes: $\frac{\partial T}{\partial t}(0,t) = 0$. Somit unter Ausnutzung der Wärmeleitungsgleichung (die nur im rechtsseitigen Limes vorausgesetzt ist):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(0,t) = 0 \qquad \text{im rechtsseitigen Limes.}$$

Da zweite Ableitungen ungerader Funktionen wieder ungerade sein müssen, gilt also:

$$0 = \left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(0,t)\right|_{\text{(r-lim)}} = -\left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(0,t)\right|_{\text{(l-lim)}}$$

und somit existiert $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ stetig. Damit erfüllt die erweiterte Funktion die gleichen Voraussetzungen wie die Ausgangsfunktion, jetzt auf $[-\pi,\pi]$, eine ungerade differenzierbare Erweiterung ist also möglich.

Um diese Funktion 2π–periodisch fortsetzen zu können, muß $T(\pi,t) = T(-\pi,t) = -T(\pi,t)$ gelten, also: $T(\pi,t) = T(-\pi,t) = 0$. Mit Argumenten analog zu den obigen sieht man, daß die ungerade differenzierbare Fortsetzung auf ganz $I\!R$ unter den Voraussetzungen $T(0,t) = T(\pi,t) = 0$ möglich ist.

Als zweites wollen wir die Zusatzbedingung $\frac{\partial T}{\partial x}(0,t) \equiv 0$ im rechtsseitigen Limes betrachten. Für diesen Fall ist eine differenzierbare Fortsetzung auf $[-\pi,\pi]$ als gerade Funktion möglich. Denn: Definiere: $T(-x,t) := T(x,t)$ für $x \in [0,\pi]$. Die so erhaltene Funktion ist wieder stetig. Für $\frac{\partial T}{\partial x}(0,t)$ im linksseitigen Limes gilt:

$$\text{l-lim}\frac{\partial T}{\partial x}(0,t) = \lim_{h\to 0+}\frac{T(-h,t)}{-h} = \lim_{h\to 0+}\frac{T(h,t)}{-h} = -\text{r-lim}\frac{\partial T}{\partial x}(0,t) \overset{\text{Vor}}{=} 0,$$

also ist $\frac{\partial T}{\partial x}$ im rechts- und linksseitigen Limes gleich. Da zweite Ableitungen gerader Funktionen wieder gerade sein müssen, gilt analog zu der Gleichung (15), daß $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(0,t)$ im links- und rechtsseitigen Limes gleich ist. Natürlich ist auch $\frac{\partial T}{\partial t}$ gerade[13], also gilt auch die Wärmeleitungsgleichung, da sie ja für $x \in [0,\pi]$ gilt.

Um diese Funktion 2π–periodisch fortsetzen zu können, muß $\frac{\partial T}{\partial x}(\pi,t) = \frac{\partial T}{\partial x}(-\pi,t) = -\frac{\partial T}{\partial x}(\pi,t)$ gelten (denn auch diese Ableitung muß 2π–periodisch sein und als Ableitung einer geraden Funktion ungerade sein), also: $\frac{\partial T}{\partial x}(\pi,t) = \frac{\partial T}{\partial x}(-\pi,t) = 0$. Mit Argumenten analog zu den obigen sieht man, daß die gerade differenzierbare Fortsetzung auf ganz $I\!R$ unter den Voraussetzungen $\frac{\partial T}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial T}{\partial x}(\pi,t) = 0$ möglich ist.

[13]
$$\frac{\partial T}{\partial t}(-x,t) = \lim_{h\to 0}\frac{T(-x,t+h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{T(x,t+h)}{h} = \frac{\partial T}{\partial t}(x,t).$$

1.2.3 Stäbe endlicher Länge

Satz 1: *Stab mit gleichen Randtemperaturen* $T_{\text{Rand}} \overset{\text{Œ}}{=} 0$*:*

Voraussetzung: Die Funktion f sei aus $\mathcal{C}^0([0,\pi])$ mit $f(0) = f(\pi) = 0$.

Behauptung: Dann existiert eine eindeutig festgelegte Funktion $T(x,t)$ für $t > 0$, $x \in [0,\pi]$, die folgende Eigenschaften erfüllt:

(i) Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial T}{\partial t}$ existieren und sind stetig für alle $x \in [0,\pi]$ und $t > 0$.

(ii) $T(x,t)$ erfüllt die Wärmegleichung (5).

(iii) $T(0,t) = T(\pi,t) = 0$ für alle $t > 0$.

(iv) $T(x,t)$ konvergiert für $t \to 0+$ gleichmäßig gegen f:

$$\lim_{t\to 0+} ||T - f||_\infty = \lim_{t\to 0+} \left[\max_x |T(x,t) - f(x)|\right] = 0.$$

Beweis: Wir erweitern $f(x)$ als ungerade, 2π–periodische Funktion (möglich nach letztem Abschnitt). Daraus ergibt sich ein $T(x,t)$ nach 1.2.1. Dieses $T(x,t)$ ist — wie schon früher festgestellt (f ungerade) — dann auch ungerade (und sowieso 2π–periodisch nach dem Theorem). Die Darstellung von $T(x,t)$ ist daher die Sinus–Reihe (13).

Satz 2: *Stab mit isolierten Rändern:*

Voraussetzung: Die Funktion f sei aus $\mathcal{C}^0([0,\pi])$, es gelte: $\frac{\partial T}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial T}{\partial x}(\pi,t) = 0$ für alle $t > 0$ (kein Wärmefluß durch 0 und π).

Behauptung: Dann gilt die Behauptung aus Satz 1 mit Ausnahme von (iii).

Beweis: Aufgrund der Voraussetzung muß eine Fortsetzung von $T(x,t)$ gerade sein (s. o.). Daher muß wegen Behauptung (iv) auch die Fortsetzung von f gerade sein. Deshalb erweitern wir f als gerade, 2π–periodische Funktion. Nach Theorem 1.2.1 ergibt sich ein $T(x,t)$, das gerade und natürlich 2π–periodisch ist. Die Darstellung von $T(x,t)$ ist daher die Kosinus–Reihe (14).

Satz 3: *Stab mit fester Randtemperatur* $T_{\text{Rand}} \overset{\text{Œ}}{=} 0$ *an einem Ende, das andere Ende isoliert:*

Voraussetzung: Die Funktion f sei aus $\mathcal{C}^0([0,\frac{\pi}{2}])$ mit $f(0) = 0$, (daher gilt auch: $T(0,t) = 0$ für alle $t > 0$); fordere weiter: $\frac{\partial T}{\partial x}(\frac{\pi}{2},t) = 0$ für alle $t > 0$. (Oder: Die Voraussetzungen mit 0 und $\frac{\pi}{2}$ vertauscht.)

Behauptung: Dann gilt die Behauptung aus Satz 1 mit Ausnahme von (iii) für $x \in [0,\frac{\pi}{2}]$.

Beweis: Wir setzen f zu einer ungeraden Funktion über $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ fort, diese Funktion erweitern wir zu einer geraden Funktion bzgl. $\frac{\pi}{2}$ bzw. $-\frac{\pi}{2}$ und letztlich ergänzen wir dies dann zu einer 2π–periodischen Funktion. (Dies alles funktioniert analog zu dem Satz 1 bzw. Satz 2.) Dann wenden wir wie üblich das Theorem 1.2.1 an. Da wir zunächst f ungerade erweitert haben, stellt sich zunächst die Lösung $T(x,t)$ als Sinus–Reihe dar (genau wie (13)):

$$T(x,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-cn^2 t}\left(\int_0^\pi f(y)\sin(ny)\,dy\right)\sin(nx)$$

Jetzt beachten wir, daß beim Bilden von $\frac{\partial T}{\partial x}$ in der Reihe jeweils $\cos(nx)$ (statt $\sin(nx)$) auftritt. Wegen der Voraussetzung $\frac{\partial T}{\partial x}(\frac{\pi}{2}, t) = 0$ müßte immer $\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = 0$ gelten. Da dies für gerade n nicht erfüllt ist, müssen diese Terme in der Reihe wegfallen. Außerdem ist der Übergang $\int\limits_0^\pi \ldots \rightsquigarrow 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ldots$ möglich, weil f gerade ist bzgl. $\frac{\pi}{2}$. Daher ergibt sich als Darstellung für $T(x,t)$:

$$T(x,t) = \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{2n-1 \\ n=1}}^{\infty} e^{-cn^2 t} \left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(y) \sin(ny)\, dy \right) \sin(nx) \tag{16}$$

Als letztes stellt sich noch die Frage: Was ist, wenn die Temperatur *an dem einen Ende des Stabes (z. B. bei* 0*) konstant bei* $T_{\text{Rand } 1} \overset{\text{Œ}}{=} 0$ *und das andere Ende des Stabes (z. B. bei* π*) konstant bei* $T_{\text{Rand } 2} = T_0 \neq 0$ *gehalten wird?*

Zur Beantwortung dieser Frage erinnern wir uns an die Feststellung, daß die Lösungen der bisherigen Probleme für $t \to \infty$ gegen einen an jedem Ort gleichen Wert, nämlich $\tilde{f}_0$, konvergieren. Dieser Grenzwert ist eine stationäre Lösung der Wärmeleitungsgleichung, d. h. die Lösung ändert sich zeitlich nicht ($\frac{\partial T}{\partial t} = 0$). Die Randbedingungen unseres neuen Problems lassen eine solche Lösung nicht zu. Wie lautet die stationäre Lösung (also ein $T(x)$) unserer Wärmegleichung (5), also der Gleichung

$$\frac{d^2 T}{dx^2}(x) = 0,$$

mit den jetzigen Randbedingungen? Na ja, klar: $T(x) = \frac{T_0}{\pi} \cdot x$. Dies ist die eindeutige stationäre Lösung (weil lineare Dgl.), die unsere Randbedingungen beachtet. Wenn wir nun von einem auf $[0, \pi]$ vorgegebenem f diese stationäre Lösung subtrahieren, so erhalten wir ein modifiziertes f^*, das die Voraussetzungen von Satz 1 erfüllt. Wir erhalten also eine modifizierte Lösung $T^*(x,t)$. Eine endgültige Lösung unseres Problems ist daher

$$T(x,t) = \frac{T_0}{\pi} x + T^*(x,t).$$

1.2.4 Periodizität in der Zeit

Wir wollen jetzt eine ganz andere Problemstellung angehen. Motiviert durch Temperaturverteilungen an einem Ort, die sich jedes Jahr wiederholen, und dem Wunsch nach Kenntnis der Temperaturen im Inneren der Erde unter diesem Ort versuchen wir folgenden Satz zu beweisen:

Satz: **Voraussetzung:** Sei $f(t)$ eine stetige, ungerade, 2π–periodische Funktion der Zeit t.[14] Weiterhin existiere zusätzlich ein M, so daß $|T(x,t)| \leq M$ für alle t und $x \geq 0$.[15]

Behauptung: Dann gilt die Behauptung aus dem Theorem 1.2.1 mutatis mutandis (man vertausche x und t außerhalb der Funktion und den Ableitungen).

[14] Motivation für diese Voraussetzungen: Das Maß sei derart, daß ein Jahr das Maß 2π habe. Weil wir davon ausgehen wollen, daß zu einem Zeitpunkt $t_0 = 0$ die Temperaturen an jedem Ort $x > 0$ (entspricht der Tiefe im Erdinneren) den gleichen Wert haben (Œ $= 0$), und sich die Temperaturverteilung am Ort $x = 0$ jedes Jahr wiederholen soll, können wir die in einem Jahr gemessenen Werte als ungerade, 2π–periodische Funktion fortsetzen.

[15] Wäre dem nicht so, so könnte die Gesamttemperatur = Energie gegen ∞ wachsen. Dies ist unphysikalisch.

Beweis: Analog zum Beweis von 1.2.1, läßt sich $T(x,t)$ gleichmäßig (bzgl. t) durch seine Fourierreihe darstellen, da es stetig differenzierbar ist, für $f(t)$ hingegen können wir nur formal die Fourierreihe aufschreiben:

$$T(x,t) \overset{\text{glm.}}{=} \sum_{-\infty}^{\infty} c_n(x) e^{int}, \qquad f(t) \rightsquigarrow \sum_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}_n e^{int}$$

Wie sieht nun die Differentialgleichung für die $c_n(x)$ aus?

$$\begin{aligned}
2\pi \frac{d^2}{dx^2} c_n(x) &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x,t) e^{-int}\, dt \qquad (T \text{ ist stetig diffbar, } [0,2\pi] \text{ kompakt}) \\
&= \frac{1}{c} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} T(x,t) e^{-int}\, dt \qquad (\text{Dgl. für } T) \\
&= \frac{in}{c} \int_0^{2\pi} T(x,t) e^{-int}\, dt \qquad (\text{partiell integrieren; } 2\pi\text{–Periodizität von } T \text{ und } e^{-int}) \\
&= 2\pi \frac{in}{c} c_n(x)
\end{aligned}$$

Sei $\varepsilon := \operatorname{sgn}(n) = \frac{n}{|n|}$. Damit sieht die Differentialgleichung der Fourierkoeffizienten also so aus:

$$\frac{d^2}{dx^2} c_n(x) = \frac{in}{c} c_n(x) = \underbrace{\left[\sqrt{\left(\frac{1}{2c} |n| \right)} (1 + \varepsilon i) \right]^2}_{=:\lambda_n^2} c_n(x)$$

Die Lösung dieser Dgl. lautet:

$$c_n(x) = A_n e^{\lambda_n (x - x_0)} + B_n e^{-\lambda_n (x - x_0)}$$

Wegen $|T(x,t)| \leq M$ gilt auch $|c_n(x)| \leq M$ (vgl. (6)), daher muß A_n gleich Null sein, weil sonst für $x \to \infty$ ein Widerspruch entstände; somit verschwindet der erste Summand. Wegen der Konvergenz von $T(x,t)$ gegen $f(t)$ für $x \to 0$, konvergieren auch die $c_n(x)$ gegen $\tilde{f}_n$ für $x \to 0$. Für $x_0 \to 0$ ergibt sich also für die Fourierkoeffizienten: $c_n(x) = \tilde{f}_n e^{-\lambda_n x}$. Also ergibt sich für $T(x,t)$ die

Darstellung:

$$\boxed{T(x,t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}_n e^{-\sqrt{\frac{|n|}{2c}}x} \cdot e^{i(nt - \varepsilon \sqrt{\frac{|n|}{2c}} x)} = \sum_{n=1}^{\infty} \breve{f}_n e^{-\sqrt{\frac{n}{2c}}x} \sin\left(nt - \sqrt{\tfrac{n}{2c}} x\right)} \tag{17}$$

Dabei ist $\breve{f}_n = b_n$ der Sinusreihenkoeffizient nach 3.1, [Ra]. Die Existenz dieses Ausdrucks möchte ich hier nicht genau zeigen, denn die 2π–Periodizität und die Differenzierbarkeit läßt sich ganz analog wie im Beweis zu Theorem 1.2.1 zeigen (die Differenzierbarkeit (lokale Eigenschaft!) nach x (analog t in 1.2.1) muß hier allerdings mittels dem 3. Vererbungssatz auf den Intervallen $x \in [0, x_0]$ gezeigt werden). Die Erfüllung der Wärmeglg. (5) zeigt man einfach durch Nachrechnen (wie auch in Theorem 1.2.1). Nur die gleichmäßige Konvergenz des $T(x,t)$ gegen $f(t)$ für $x \to 0$ läßt sich nicht so einfach zeigen; analog Theorem 1.2.1 geschieht dies über eine Integraldarstellung. Das ist mir hier zu aufwendig (und dies ging auch dem [Za] so).

Was sagt uns jetzt die Darstellung? Dazu eine

Interpretation: Der Faktor $e^{-\sqrt{\frac{|n|}{2c}}x}$ beschreibt die *Dämpfung* der ‚Temperaturschwingung' am Ort $x = 0$ in der Tiefe x. Man erkennt, daß die Dämpfung um so größer ist, wenn entweder die Temperaturschwingung groß ist (großes n) oder die Tiefe groß ist (großes x), was beides sehr anschaulich ist.

Der Ausdruck $\varepsilon\sqrt{\frac{|n|}{2c}}x$ ist eine *Phasenverschiebung*. Man sieht also, daß die n–te Schwingung auch in der Tiefe gedämpft nachvollzogen wird, aber zeitlich verschoben.

Nun noch ein anwendungsbezogenes

Beispiel: Wir simulieren den Sommer–Winter–Rhythmus durch die einfache Funktion $f(t) = \sin(t)$. Da ja $(\sin(nt))_{n\in\mathbb{Z}}$ ein ONS, ist $\breve{f}_1 = 1$, die anderen $\breve{f}_n$, $n \neq 1$ sind Null. Also gilt mit $\alpha := \sqrt{\frac{1}{2c}}$:

$$T(x,t) = e^{-\alpha x}\sin(t - \alpha x)$$

Bei $50°C$ Temperaturunterschied an der Oberfläche und einem Keller in 4 Meter Tiefe ergibt sich bei realistischen Böden ein Temperaturunterschied von $2°C$ (Dämpfung $\frac{1}{25}$) und eine Phasenverschiebung um π im Keller (Quelle: [Za]). Das erklärt die Erfahrungstatsache, daß Keller im Winter warm und im Sommer angenehm kühl sind.

1.2.5 Bemerkung: Unendlich langer Stab

In den Beweis des folgenden Theorems geht folgende Aussage ein:

Aussage: Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in \mathcal{C}_C^m$ (C: kompakter Träger). Dann $f * g \in \mathcal{C}^m$ und $D^m(f*g) = f * D^m g$.

Beweis: Es genügt, die Aussage für $m = 1$ zu zeigen, weil das Ergebnis für $m > 1$ mittels Induktion folgt. Weil $g \equiv 0$ außerhalb eines kompakten Intervalls, gilt dasselbe auch für Dg, und daher ist Dg gleichmäßig stetig[16] auf $\mathbb{R}$ (weil stetig vorausgesetzt). Für $h \neq 0$ gilt daher:

$$\begin{aligned}\frac{(f*g)(x+h) - (f*g)(x)}{h} &= \int_{\mathbb{R}} f(y)\,\frac{g(x+h-y) - g(x-y)}{h}\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y)\,Dg(x+\theta h - y)\,dy\end{aligned}$$

für ein $\theta \in [0,1]$ (MWS). Also gilt mit $\theta h < \delta$, wobei δ aus der glm. Stetigkeitsabschätzung von Dg zu vorgegebenem ε kommt:

$$\begin{aligned}\left|\frac{(f*g)(x+h) - (f*g)(x)}{h} - (f*Dg)(x)\right| &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(y)|\cdot|Dg(x-y+\theta h) - Dg(x-y)|\,dy \\ &\leq \varepsilon\cdot\int_{\mathbb{R}} |f(y)|\,dy =: M\varepsilon \qquad (M \text{ ex., weil } f \in L^1)\end{aligned}$$

Daher ist $f * g$ differenzierbar und $D(f*g) = f * Dg$. Daß $f * Dg$ stetig ist, falls f und Dg stetig, lasse ich hier unbewiesen[17].

Theorem: **Voraussetzung:** Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Behauptung: Dann existiert eine eindeutig festgelegte Funktion $T(x,t)$ für $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, die folgende Eigenschaften erfüllt:

[16] Die Voraussetzung eines kompakten Trägers für g kann man fallenlassen, wenn man direkt voraussetzt, daß alle Ableitungen $D^k g$ $(1 \leq k \leq m)$ *gleichmäßig* stetig sind.

[17] (vgl. [Za], 17.9 und 18.1)

(i) Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial T}{\partial t}$ existieren für jedes (x,t).

(ii) $T(x,t)$ erfüllt die Wärmegleichung (5) mit $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ stetig in x für alle t.

(iii) Für alle t sind T und $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ aus $L^1(\mathbb{R})$.

(iv) T erfüllt
$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)^\wedge = \frac{\partial (T^\wedge)}{\partial t}$$

(v) $T(x,t)$ konvergiert für $t \to 0+$ gegen f bzgl. $||.||_1$:
$$\lim_{t\to 0+} ||T-f||_1 = 0.$$

Beweisskizze: Aufgrund der Behauptungen läßt sich folgendermaßen eine eindeutige Darstellung konstruieren:
$$\frac{\partial (T^\wedge)}{\partial t} \overset{\text{(iv)}}{=} \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)^\wedge \overset{\text{(ii), (iii)}}{=} c\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)^\wedge =^{18} -cx^2 T^\wedge$$

Lösung dieser Dgl. ist:
$$T^\wedge(x,t) = T^\wedge(x,t_0)e^{-cx^2(t-t_0)}$$

Wegen (v) gilt also:
$$T^\wedge(x,t) = f^\wedge(x)\underbrace{e^{-ctx^2}}_{=:p_t^\wedge(x)} = (p_t * f)^\wedge$$

Damit ergibt sich also die Darstellung:
$$T(x,t) = p_t * f = \frac{1}{\sqrt{2ct}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4ct}} f(x-y)\,dx \tag{18}$$

Diese Darstellung entspricht bis auf den Vorfaktor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ der der Glg. (10) aus 1.2.1.

Zur Existenz: p_t ist nach x differenzierbar. Man sieht: p_t, $\frac{\partial p_t}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 p_t}{\partial x^2}$ sind beschränkt, glm. stetig und $L_1(\mathbb{R})$–Funktionen. Nach dem Lemma gilt also:
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 p_t}{\partial x^2} * f$$

[18] Diese Gleichung muß noch extra bewiesen werden, weil wir nicht wissen, ob $\frac{\partial T}{\partial x} \in L^1(\mathbb{R})$. Damit können wir den Satz 1 (ii*), [Va], nicht direkt anwenden. Zum Beweis also ($f(x) := T(x,t)$): Es gilt für $-\infty < a \le b < \infty$:
$$\int_a^b f''(y)e^{-ixy}\,dy = \Big[f'(y) + ixf(y)\Big]\,e^{-ixy}\Big|_{y=a}^{b} - x^2\int_a^b f(y)e^{-ixy}\,dy$$
Die Integrale besitzen für $a \to -\infty$ und $b \to \infty$ Grenzwerte, da die Integranden $\in L^1(\mathbb{R})$. Wenn nun noch der mittlere Term den Grenzwert 0 hat, so ist die Gleichung gezeigt. Also: Wir wissen, daß
$$\lim_{a\to-\infty} ixf(a)e^{-ixa} = \lim_{b\to\infty} ixf(b)e^{-ixb} = 0,$$
weil $f \in L^1(\mathbb{R})$. Gilt auch $f'(y) \overset{|y|\to\infty}{\longrightarrow} 0$? Dazu beachte, da $f'' \in L^1(\mathbb{R})$, wegen dem Cauchy–Kriterium ein x_0 existiert, so daß für alle x_1, $x_2 > x_0$ $(*)$ in
$$f'(x_2) - f'(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f''(y)\,dy \overset{(*)}{<} \varepsilon$$
gilt. Daher existieren Grenzwerte von $f'(y)$ für $y \to \pm\infty$. Sei solch ein Grenzwert $\alpha \neq 0$. Dann existiert ein x_0, so daß für alle $x \ge x_0$: $|f'(x) - \alpha| \le \frac{|\alpha|}{2}$. Dann gilt auch (alles für $x \ge x_0$):
$$|f(x) - f(x_0) - (x-x_0)\alpha| \le \frac{(x-x_0)|\alpha|}{2}.$$
Daraus folgt nun:
$$|f(x) - f(x_0)| \ge \frac{1}{2}|\alpha|(x-x_0) \quad \Longrightarrow |f(x)| \ge \frac{1}{2}|\alpha|(x-x_0) - |f(x_0)|,$$
was ein Widerspruch zu $f \in L^1(\mathbb{R})$ ist. Daher: $f'(y) \overset{|y|\to 0}{\longrightarrow} 0$ und die Gleichung gilt.

Damit ist (i), 1. Teil, und (iii) gezeigt. Den Beweis zu (v) zeige ich nicht[19].

$p_t = \frac{1}{\sqrt{2ct}} e^{-\frac{x^2}{4ct}}$ ist auch nach t differenzierbar:

$$\frac{\partial p_t}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{2c}} e^{-\frac{x^2}{4ct}} \left(\frac{x^2}{4c\sqrt{t^5}} - \frac{1}{2\sqrt{t^3}} \right)$$

Mittels geeigneten Ersetzungen[20] kann man nun zeigen, daß diese Funktion gegen eine von t unabhängige Funktion $\in L^1(\mathbb{R})$ auf einem Intervall $[t_1, t_2]$ abschätzbar ist. Daher ist $\frac{\partial p_t}{\partial t}$ auch eine $L^1(\mathbb{R})$–Funktion (für $t \in [t_1, t_2]$) und Differentiation unter dem Integral ist möglich:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial p_t}{\partial t}(y) f(x-y)\, dy = \frac{\partial p_t}{\partial t} * f$$

Also existiert $\frac{\partial T}{\partial t}$ ((i), 2. Teil) als $L^1(\mathbb{R})$–Funktion (bzgl. x) und auch $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)^\wedge$ existiert.

Ganz analog läßt sich auch $T(x,t)$ gegen eine von t unabhängige Funktion $\in L^1(\mathbb{R})$ auf einem Intervall $[t_1, t_2]$ abschätzen. Daher ist Differentiation unter dem Integral möglich:

$$\frac{\partial (T^\wedge)}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial T}{\partial t}(x,t) e^{-ixy}\, dx$$

Das ist gerade Behauptung (iv). Um die Gültigkeit der Wärmegleichung zu zeigen (Punkt (ii)), zeigen wir die äquivalente Behauptung (äquivalent, weil alle anderen Behauptungen bereits gezeigt) $\frac{\partial (T^\wedge)}{\partial t} = -cx^2 T^\wedge$. Dies gilt aber, weil $T = p_t * f$ und daher $T^\wedge = p_t^\wedge \cdot f^\wedge = e^{-ctx^2} f^\wedge$.

2 Die 1–dimensionale Wellengleichung

Wir interessieren uns im folgenden für die Schwingungen einer eingespannten Saite, die folgende Bedingungen erfüllt (Auslenkung $u(x,t)$, Länge L):

$$u \ll L\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} \ll 1$$

Diese Bedingungen werden von realen Geigensaiten, etc. in der Regel erfüllt.

Bemerkung: Freie elektromagnetische Wellen (*Licht, Radiowellen*) und Longitudinalwellen in Gasen oder Festkörpern (*Schall!*) erfüllen die Wellengleichung exakt und benötigen keine Näherungen wie die schwingende Saite.

In den meisten Fällen wird also eine Auslenkung $u(.,t_0)$ zu einem festen Zeitpunkt t_0 und eine Geschwindigkeit $\frac{\partial u}{\partial t}(.,t_0)$ bekannt sein und das Verhalten der Auslenkung zu späteren Zeitpunkten interessieren.[21]

2.1 Vom Problem zur partiellen Differentialgleichung

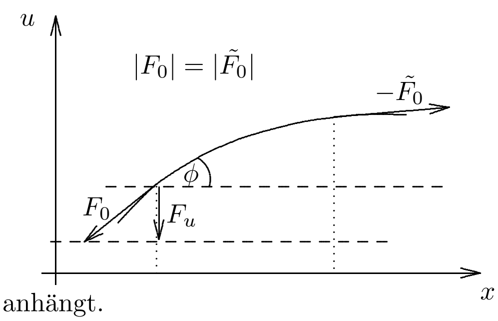
Um wiederum das soeben dargestellte physikalische Problem mit einem geeigneten mathematischen Modell beschreiben zu können, gehen wir diesmal von der *Grundgleichung der Mechanik* aus:

$$F = m \cdot a = \rho \cdot V \cdot a, \qquad a = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{19}$$

[19] er funktioniert wegen ein paar schönen Eigenschaften von p_t ($\int_{\mathbb{R}} p_t = \sqrt{2\pi}$). Man sucht im weiteren dann eine stetige Funktion q mit kompaktem Träger in der Nähe von f bzgl. $||.||_1$–Norm (vgl. [Za], 19.3).

[20] vgl. [Za], Kapitel 36

[21] Auch in diesem Abschnitt 2 sind alle Funktionen reellwertig, da 1-dim. Auslenkungen und deren Geschwindigkeiten reell sind.



Als zweite Gleichung, die aus nebenstehender Zeichnung ersichtlich ist, benutzen wir:

$$F_u(x) = F_0 \cdot \sin(\phi(x)) \tag{20}$$

Dabei ist F_0 eine feste Konstante; diese Modellierung ist für obige Saiten–Bedingungen ungefähr erfüllt, sie ist aber auch real exakt einstellbar (für beliebige Auslenkungen), indem man z. B. ein Saitenende fest einspannt und an das andere Ende über eine Umlenkrolle ein festes Gewicht anhängt.

Herleitung

Um die Kraft an einer Stelle x der Saite zu bestimmen, reicht es aber nicht, nur an dieser Stelle *eine* Kraft F_0 tangential angreifen zu lassen, da dadurch das Saitenstück an der Stelle x (oder im großen sogar die ganze Saite) auch longitudinal in x–Richtung ausgelenkt würde (und nicht nur transversal in u–Richtung). Um die Kraft greifen zu können, müssen wir ein Saitenstück im Bereich $[x, x + \Delta x]$ betrachten (dieses Stück hat dann auch eine definierte Masse Δm). Wir lassen also (vgl. Zeichnung) an der Stelle x die Kraft F_0 angreifen und an der Stelle $x + \Delta x$ die Kraft $-\tilde{F_0}$, die betraglich gleich F_0 ist. Der x–Richtungsanteil der Kräfte ($F_0 \cdot \cos(\phi(x))$ an der Stelle x) kompensiert sich dann in der Näherung (s. u.).

Nach Gleichung (20) gilt nun für das kleine Stück der Saite:

$$F_u(x) = F_0 \cdot \sin(\phi(x + \Delta x)) - F_0 \cdot \sin(\phi(x)) \tag{21}$$

Andererseits erhalten wir für das kleine Saitenstück aus der Grundgleichung der Mechanik (19), wenn wir $\Delta m = \rho \cdot \Delta V = \rho \cdot \Delta s \cdot A$ mit dem (konstanten) Querschnitt A einsetzen:

$$F_u = \Delta m \cdot a = \rho \cdot \Delta V \cdot a = \rho \cdot A \cdot \Delta s \cdot a, \qquad a = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{22}$$

Durch Gleichsetzen von (21) und (22) ergibt sich also (dabei bedeuten: Punkt: Zeitableitung, Strich: Ableitung nach x):

$$F_0 \cdot (\sin(\phi(x + \Delta x)) - \sin(\phi(x))) = \rho \cdot A \cdot \Delta s \cdot \ddot{u} \tag{23}$$

Für kleine Δs gilt nach Pythagoras:

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta u)^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta s = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x$$

Damit ergibt sich (in (23)):

$$F_0 \cdot \frac{(\sin(\phi(x + \Delta x)) - \sin(\phi(x)))}{\Delta x} = \rho \cdot A \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2}\ \ddot{u}$$

Mit dem Grenzübergang $\Delta x \to 0$ also:

$$F_0 \cdot (\sin(\phi(x))' = \rho \cdot A \cdot \sqrt{1 + (u')^2}\ \ddot{u}.$$ [22]

Jetzt wollen wir die Näherungen einbringen: Die Auslenkungen seien extrem klein ($u \ll L$), $u' \ll 1$ (daher auch $\phi \ll 1$). Das bedeutet:

$$\sin(\phi(x)) \quad \approx \phi(x) + \mathcal{O}(\phi^2) \quad \approx \tan(\phi(x)) = u' \qquad \text{(Taylor)}, \tag{24}$$

[22] Natürlich ist die Herleitung bis hierher sehr physikalisch geprägt. Mathematisch geht's ja auch: $dm = k \cdot ds = k \cdot v_\alpha dx$ mit einer Konstanten k, $v_\alpha = \sqrt{1 + (u')^2}$ für Graphen.

$$\begin{aligned} \sqrt{1+(u')^2} &\approx 1 \\ \cos(\phi(x)) &\approx 1+\mathcal{O}(\phi^2) \approx 1 \qquad \text{(Taylor)} \end{aligned} \tag{25}$$

Damit erhalten wir also:

$$F_0 \cdot (u')' = F_0 \cdot u'' = \rho \cdot A \cdot \ddot{u}$$

Man erhält nun also als partielle Differentialgleichung die sogenannte *Wellengleichung*:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \tag{26}$$

mit $c^2 = \frac{F_0}{\rho \cdot A}$, wobei c die Bedeutung einer Geschwindigkeit hat.

Noch einige wichtige **Bemerkungen**:

- Mit der Näherung (24) und Glg. (20) sehen wir: Die rücktreibende Kraft ist proportional zu $\frac{\partial u}{\partial x}$. Also:
$$F_u \approx F_0 \cdot u'. \tag{27}$$
- Der x–Richtungsanteil im obigen Ansatz kompensiert sich mit Näherung (25):
$$F_x(x) = F_0 \cdot \cos(\phi(x+\Delta x)) - F_0 \cdot \cos(\phi(x)) \approx F_0 - F_0 = 0.$$
- Der Beweis der Wellengleichung für freie elektromagnetische Wellen (*Licht, Radiowellen*) folgt aus den Maxwell'schen Gleichungen[23], bei den Longitudinalwellen in Gasen bzw. Festkörpern (*Schall!*) folgt er mittels Kompressionsmodul bzw. Elastizitätsmodul aus dem Hooke'schen Gesetz[24].

2.2 Lösungen der Wellengleichung

2.2.1 Theorem

Voraussetzungen: Die Endpunkte der Saite liegen bei $x = 0$ und $x = \pi$ (also sei die Länge der Saite so umtransformiert, daß sie gleich π ist). Die Auslenkung $u(.,0)$ und die Geschwindigkeit $\frac{\partial u}{\partial t}(.,0)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ seien als Funktionen $f \in \mathcal{C}^2([0,\pi])$ und $g \in \mathcal{C}^1([0,\pi])$ vorgegeben, wobei $f(0) = f(\pi) = g(0) = g(\pi) = 0$ gelten soll.

[23] Freie elektromagn. Welle: $\rho = 0$, $\underline{j} = 0$. Damit Maxwell–Gleichungen:

$$(1):\ \mathrm{div}\underline{E} = 0 \quad (2):\ \mathrm{rot}\underline{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \quad (3):\ \mathrm{div}\underline{B} = 0 \quad (4):\ \mathrm{rot}\underline{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \underline{E}}{\partial t}$$

Mittels Schwartz'schem Vertauschungssatz (S) gilt dann:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2} \overset{(4)}{=} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\underline{B} \overset{(S)}{=} \frac{1}{c}\mathrm{rot}\frac{\partial}{\partial t}\underline{B} \overset{(2)}{=} -\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\underline{E} = -(\mathrm{grad}\ \mathrm{div} - \mathrm{div}\ \mathrm{grad})\underline{E} \overset{(1)}{=} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\underline{E}$$

Ganz analog ergibt sich die Gleichung für $\underline{B}$ (mit Glg. (3) statt (1)).

[24] Nur für Festkörper (Gase analog): Ein Zug $\sigma = \frac{F}{A}$ bewirkt eine relative Längenausdehnung nach dem Hooke'schen Gesetz $\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E}\sigma$, wobei E das *Elastizitätsmodul* ist. Die Auslenkung u und den Zug σ, die von x abhängig sind, taylornähern wir (ist o. k., weil später Grenzübergang $dx \to 0$). Für infinitesimale Längenausdehnungen gilt also:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{u_{x+\Delta x} - u_x}{\Delta x} = \frac{u_x + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x - u_x}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E}\sigma \quad (*)$$

Damit gilt für die rücktreibende Kraft:

$$A\,\Delta x\,\rho\ddot{u} = \Delta m\ddot{u} = F_{\text{rück}} = A(\sigma_{x+\Delta x} - \sigma_x) = A\left(\sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial x}\Delta x\right) - A\sigma = A\frac{\partial \sigma}{\partial x}\Delta x \overset{(*)}{=} A \cdot E \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x$$

Also: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Behauptung: Dann existiert eine reellwertige Funktion $u(x,t)$ für $t>0$, $0 \le x \le \pi$, so daß:

(i) $u(x,t) \in \mathcal{C}^2([0,\pi] \times I\!R_+)$.

(ii) $u(x,t)$ erfüllt die Wellengleichung (26).

(iii) $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ für alle $t > 0$.

(iv) $u(x,t) \longrightarrow f(x)$, gleichmäßig für $t \longrightarrow 0+$.

(v) $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \longrightarrow g(x)$, gleichmäßig für $t \longrightarrow 0+$.

Beweis: Zunächst erweitern wir die Funktionen f und g zu 2π–periodischen ungeraden Funktionen (vgl. 1.2.2). Da $u \in \mathcal{C}^2$ und $g \in \mathcal{C}^1$ können diese Funktionen durch ihre Fourierreihen gleichmäßig bzgl. x dargestellt werden:

$$u(x,t) = \sum_1^\infty c_n(t)\sin(nx) \qquad \text{mit} \quad c_n(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(x,t)\sin(nx)\,dx \tag{28}$$

$$g(x) = \sum_1^\infty \tilde{g_n}\sin(nx) \qquad \text{mit} \quad \tilde{g_n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\sin(nx)\,dx$$

Für f wollen wir nur die Voraussetzungen der folgenden Bemerkung ausnutzen; wir können also f zumindest punktweise durch seine Fourierreihe darstellen:

$$f(x) = \sum_1^\infty \tilde{f_n}\sin(nx) \qquad \text{mit} \quad \tilde{f_n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

Wie sieht nun also die Differentialgleichung für die Fourierkoeffizienten von u, die $c_n(t)$, aus?

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}c_n(t) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\sin(nx)\,dx && (u \in \mathcal{C}^2,\ [0,2\pi] \text{ kompakt})\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sin(nx)\,dx && (\text{Dgl. für } u)\\
&= \frac{c^2}{\pi}\int_0^{2\pi} -n^2\cdot u(x,t)\sin(nx)\,dx && (\text{zweimal partiell integrieren; } 2\pi\text{–Periodizität von } u \text{ und } \sin)\\
&= -n^2c^2c_n(t)
\end{aligned}$$

Die Lösung dieser Dgl. lautet[25] (vgl. auch [Ra]: Lösung durch Separationsansatz):

$$c_n(t) = A_n\cos(nct) + B_n\sin(nct) \tag{29}$$

[25] Wenn wir hier richtigerweise *tippen* würden, daß die eindeutige Lösung dieser Dgl. 2π–periodisch ist, so kämen wir hier durch Fourierentwicklung der Fourierkoeffizienten (mathematisch sauber) zum Ergebnis:

$$c_n(t) = \sum_{-\infty}^\infty c_{nk}e^{ikt} \qquad \text{mit} \quad c_{nk} = \int_0^{2\pi} c_n(t)e^{-ikt}\,dt$$

Damit „transformiert" die Dgl. zur algebraischen Gleichung $-k^2c_{nk} = -n^2c^2c_{nk}$. Sie ist nur für $k = \pm nc$ lösbar, also mit $c_{nn} = \frac{1}{2}(a_1 - ib_1)$ und $c_{n,-n} = \frac{1}{2}(a_1 + ib_1)$ (vgl. [Ra], 2.1):

$$c_n(t) = c_{nn}e^{inct} + c_{n,-n}e^{-inct} = \ldots = a_1\cos(nct) + b_1\sin(nct)$$

Da u gleichmäßig gegen f konvergiert (für $t \to 0$), gilt ‚dasselbe' auch für die Fourierkoeffizienten, also: $c_n(t) \to \tilde{f_n}$ für $t \to 0$ (vgl. (6)). Da $c_n(t)$ für $t \to 0$ aber auch gegen A_n konvergiert, ergibt sich:

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx)\, dx \tag{30}$$

Da $u \in \mathcal{C}^2$ ist, läßt sich auch $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$ durch seine Fourierreihe gleichmäßig bzgl. x darstellen und daher gilt gleichmäßig (Fourierkoeffizient(Ableitung)$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial t} \sin(nx)\, dx = \frac{\partial c_n(t)}{\partial t}$):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_1^\infty \frac{dc_n}{dt}(t) \sin(nx)$$

Aus obiger Lösung erhält man für diese Fourierkoeffizienten $\frac{dc_n}{dt}(t)$ also

$$\frac{dc_n}{dt}(t) = -ncA_n \sin(nct) + ncB_n \cos(nct)$$

Da $\frac{\partial u}{\partial t}$ für $t \to 0$ gleichmäßig gegen g konvergiert, gilt $\frac{dc_n}{dt}(t) \to \tilde{g_n}$ für $t \to 0$. Da $\frac{dc_n}{dt}$ für $t \to 0$ aber auch gegen ncB_n konvergiert, ergibt sich:

$$B_n = \frac{1}{nc\pi} \int_0^{2\pi} g(x) \sin(nx)\, dx \tag{31}$$

Damit kann man $u(x,t)$ zunächst wie folgt darstellen, indem man in der Lösung (29) die A_n und B_n aus (30) und (31) einsetzt und diese Lösung dann in (28) einsetzt:

$$u_{(x,t)} = \overbrace{\sum_1^\infty \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx}_{=A_n=\tilde{f_n}} \cos(nct)\sin(nx)}^{\text{Term 1}} + \overbrace{\sum_1^\infty \frac{1}{nc\pi} \underbrace{\int_0^{2\pi} g(x)\sin(nx)\,dx}_{=\pi ncB_n=\pi\tilde{g_n}} \sin(nct)\sin(nx)}^{\text{Term 2}}$$

Wir wollen die Terme vereinfachen und beginnen mit Term 1: Mit dem Additionstheorem

$$\cos(nct)\sin(nx) = \frac{1}{2}\left[\sin(n(x+ct)) + \sin(n(x-ct))\right]$$

erhält man für den 1. Term den Ausdruck:

$$\text{Term 1} = \frac{1}{2}\sum_1^\infty A_n \sin(n(x+ct)) + \frac{1}{2}\sum_1^\infty A_n \sin(n(x-ct)) = \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right),$$

wobei die letzte Gleichung gilt, da die Fourierreihe von f punktweise gegen f konvergiert.

Für den 2. Term betrachten wir zunächst mittels eines zweiten Additionstheorems:

$$\frac{1}{\pi}\int_{x-ct}^{x+ct} \sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi n}\left[\cos(n(x-ct)) - \cos(n(x+ct))\right] = \frac{2}{\pi n}\sin(nct)\sin(nx) \tag{$*2$}$$

Damit folgt:

$$\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\,dy \quad = \quad \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \sum_1^\infty \overbrace{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\sin(nx)\,dx}^{=ncB_n} \sin(ny)\,dy$$

(Einsetzen der Fourierdarstellung)

$$= \frac{1}{2c}\sum_1^\infty ncB_n \int\limits_{x-ct}^{x+ct} \sin(ny)\,dy \qquad \text{(da die Fourierreihe von } g \text{ gleichmäßig konvergiert)}$$

$$= \sum_1^\infty B_n \sin(nct)\sin(nx) \qquad \text{mit } (*2)$$

Dies ist aber gerade der 2. Term aus obiger Gleichung.

Durch Einsetzen der neuen Ausdrücke für den 1. und 2. Term erhalten wir also die

Darstellung: $u(x,t)$ hat die eindeutige Gestalt

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}\cdot[f(x+ct)+f(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} g(y)\,dy} \tag{32}$$

Wir müssen jetzt noch die Existenz der Lösung nachweisen, indem wir für (32) die Behauptungen des Theorems nachweisen (jetzt wirklich $f \in \mathcal{C}^2$):

(i) $u \in \mathcal{C}^2$, da $f \in \mathcal{C}^2$ und $g \in \mathcal{C}^1$, daher $\int\limits_{x-ct}^{x+ct} g(y)\,dy \in \mathcal{C}^2$.

(ii) vgl. unten in Satz 2.2.3.

(iii) $u(0,t) = \frac{1}{2}[f(ct)+f(-ct)] + \frac{1}{2c}\int\limits_{-ct}^{ct} g(y)\,dy$. Beide Summanden sind Null, da f und g zu ungeraden Funktionen erweitert sind.

Weiter: $u(\pi,t) = \frac{1}{2}[f(\pi+ct)+f(\pi-ct)] + \frac{1}{2c}\int\limits_{\pi-ct}^{\pi+ct} g(y)\,dy$. Da f 2π–periodisch und ungerade, gilt: $f(\pi-ct) = f(-\pi-ct) = -f(\pi+ct)$ und der erste Summand verschwindet. Da auch g 2π–periodisch und ungerade, ist auch $g(\pi+t)$ ungerade, analog zu f. Daher: $\int\limits_{\pi-ct}^{\pi+ct} g(y)\,dy = \int\limits_{-ct}^{ct} g(\pi+z)\,dz = 0$. Also verschwindet auch der 2. Summand.

(iv) Zunächst betrachten wir den 2. Summanden:

$$\int\limits_{x-ct}^{x-ct} g(y)\,dy \le ||g||_\infty \cdot 2ct \overset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Da f stetig ist, gilt für den 1. Summanden nach Heine, daß er gegen $f(x)$ konvergiert. Also insgesamt tatsächlich: $u(x,t) \overset{t\to 0}{\longrightarrow} f(x)$.

(v) Die Ableitung $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$ ist in 2.2.3 berechnet. Man sieht, daß in diesem Ausdruck nur stetige Funktionen vorkommen, so daß man einfach nach Heine den Grenzwert für $t \to 0$ bestimmen kann. Er ist tatsächlich $g(x)$.

2.2.2 Bemerkung

Wenn man den Beweis nochmal durchdenkt, so sieht man: Die notwendige Gestalt (32) erhält man bereits unter den Voraussetzungen: $f \in \mathcal{C}^0([0,\pi])$ und die Fourier–Reihe von f konvergiere für alle x gegen $f(x)$. Diese Bedingungen erfüllen z. B. stetige Funktionen, die von beschränkter Variation sind (Konvergenztest von Jordan[26]), bzw. lipschitz–stetige Funktionen (Folgerung aus Konvergenztest von Dini[27]).

[26] vgl. Theorem 4.4, [Pü]
[27] vgl. Zusatz 4.1.1, [Pü]

Allerdings sind die $u(x,t)$ unter diesen Voraussetzungen im allg. keine Lösung der Wellengleichung, da dafür die $u(x,t)$ nicht hinreichend oft differenzierbar sind.

2.2.3 Satz

Die Länge einer Saite sei π, ihre Masse sei m. Dann gilt:

$$\int_0^\pi \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx + c^2 \int_0^\pi \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx = \int_0^\pi \left[c^2 \cdot (f')^2 + g^2\right] dx$$

Beweis: Zunächst bilde ich die ersten Ableitungen, dann (um den Beweis des Theorems zu vollenden) die zweiten:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{c}{2}\left(f'(x+ct) - f'(x-ct)\right) + \frac{1}{2}\left(g(x+ct) + g(x-ct)\right) \\
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{2}\left(f'(x+ct) + f'(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\left(g(x+ct) - g(x-ct)\right) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{c^2}{2}\left(f''(x+ct) + f''(x-ct)\right) + \frac{c}{2}\left(g'(x+ct) - g'(x-ct)\right) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{1}{2}\left(f''(x+ct) + f''(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\left(g'(x+ct) - g'(x-ct)\right)
\end{aligned}$$

An den letzten beiden Gleichungen erkennt man: Die Darstellung (32) erfüllt in der Tat die Wellengleichung (26). Damit ist das Theorem 2.2.1 bewiesen.

Zum Satz: Wir setzen die ersten Ableitungen ein:

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx + c^2 \int_0^\pi \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx &= \int_0^\pi \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + c^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right) dx \\
&= \int_0^\pi \frac{1}{4}\Bigg(\left(cf'(x+ct) - cf'(x-ct) + g(x+ct) + g(x-ct)\right)^2 \\
&\qquad + c^2\left(f'(x+ct) + f'(x-ct) + \frac{1}{c}g(x+ct) - \frac{1}{c}g(x-ct)\right)^2\Bigg) \\
&= \frac{1}{4}\int_0^\pi 2c^2 f'(x+ct)^2 + 2c^2 f'(x-ct)^2 + 2c(f'(x+ct) - f'(x-ct)) \\
&\qquad \times(g(x+ct) + g(x-ct)) + 2g(x+ct)^2 + 2g(x-ct)^2 \\
&\qquad + 2c(f'(x+ct) + f'(x-ct))(g(x+ct) - g(x-ct))\, dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi c^2 f'(x+ct)^2 + 2cf'(x+ct)g(x+ct) \\
&\qquad + g(x+ct)^2 + c^2 f'(x-ct)^2 - 2cf'(x-ct)g(x-ct) + g(x-ct)^2 \\
&= \frac{1}{2}\int_{ct}^{ct+\pi} c^2 f'(z)^2 + 2cf'(z)g(z) + g(z)^2\, dz \\
&\qquad + \frac{1}{2}\int_{-ct}^{-ct+\pi} c^2 f'(z)^2 - 2cf'(z)g(z) + g(z)^2\, dz
\end{aligned}$$

$$\stackrel{2\pi\text{–per.}}{=} \quad \frac{1}{2}\int\limits_{ct}^{ct+\pi} c^2 f'(z)^2 + 2cf'(z)g(z) + g(z)^2\,dz$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{-ct-2\pi}^{-ct-\pi} c^2 f'(z)^2 - 2cf'(z)g(z) + g(z)^2\,dz$$

f' gerade, g ungerade; Subst. $z \to -z$ im 2. Integral

$$= \quad \frac{1}{2}\int\limits_{ct}^{ct+2\pi} c^2 f'(z)^2 + 2cf'(z)g(z) + g(z)^2\,dz$$

$$\stackrel{2\pi\text{–per.}}{=} \quad \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi} c^2 f'(z)^2 + 2cf'(z)g(z) + g(z)^2\,dz$$

$f'g$ ungerade, Rest gerade

$$= \quad \int\limits_{0}^{\pi} c^2 (f'(x))^2 + (g(x))^2\,dx$$

Interpretation: Der erste Term auf der linken Seite ist das $\frac{2\pi}{m}$–fache der *kinetischen Energie*, denn $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx$ ist das über die Länge der Saite gemittelte Geschwindigkeitsquadrat.

Der zweite Term auf der linken Seite ist das $\frac{2\pi}{m}$–fache der *potentiellen Energie*. Allgemein gilt für die potentielle Energie für eine rücktreibende Kraft der Form $F_{\text{rück}}(x) = F_0 \cdot f(x)$ die Gleichung $E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}F_0\,(f(x))^2$. Hier gilt also für die potentielle Energie eines Saitenstückes: $E = \frac{1}{2}F_0\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$ (vgl. (27)). Da außerdem $c^2\frac{m}{\pi} \stackrel{L=\pi}{=} \frac{F_0 \cdot m}{\rho \cdot A \cdot L} = F_0$ (vgl. Definition bei (26)) gilt, sieht man, daß der zweite Term der linken Seite die potentielle Energie der Saite ist (über die Länge der Saite gemittelte potentielle Energien der Einzelstücke).

Damit ist also die rechte Seite das $\frac{2\pi}{m}$–fache der *Gesamtenergie*. Da die rechte Seite aber unabhängig ist von der Zeit t, erkennt man, daß, wie zu erwarten war, die Gesamtenergie zeitunabhängig ist.

3 Weitere Beispiele

Natürlich gibt es noch zahlreiche andere partielle Differentialgleichungen, die man mit obiger Methode lösen kann.

3.1 Die 1–dimensionale Schrödingergleichung

Ein weiteres wichtiges Beipiel zur Anwendung der Fouriertheorie ist die *Schrödingergleichung*. Diese bekannte Differentialgleichung ist grundlegend für die Quantenmechanik. Sie lautet:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right]\psi(x,t) \tag{33}$$

Dabei ist $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,0546 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{sec}$ das sogenannte *Planck'sche Wirkungsquantum*, m die Masse des zu beschreibenden Teilchens und V eine reellwertige Funktion, das sogenannte *Potential*.

Die komplexwertigen Lösungen $\psi(x,t)$ sind sogenannte *Wahrscheinlichkeitsamplituden*. Physikalisch treten sie nur als $|\psi(x,t)|^2 dx$ in Erscheinung. Dieses Betragsquadrat beschreibt die *Wahrscheinlichkeit*, das Teilchen der Masse m im Intervall $[x, x+dx]$ zum Zeitpunkt t anzutreffen.

Beispiel: Sei $V \equiv 0$ (freies Teilchen).

Sei $\psi(x,0) := \psi_0(x) := f(x) \in L^1(I\!R)$. Dann existiert eine eindeutige Lösung $\psi(x,t)$ für $t > 0$, $x \in I\!R$ mit den analogen Eigenschaften wie die im Theorem 1.2.5 mit Ausnahme von (ii). Natürlich erfüllt $\psi(x,t)$ stattdessen die Schrödingergleichung (33).

Ich konstruiere hier nur die Darstellung der Lösung; der Beweis der Existenz verläuft analog zu 1.2.5. Unter Fouriertransformation der Schrödingerglg. ergibt sich mit den Behauptungen (vgl. (iii), (iv) und Fußnote auf Seite 18):

$$i\hbar \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^\wedge (k,t) = i\hbar \frac{\partial(\psi^\wedge)}{\partial t}(k,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right)^\wedge (k,t) = \frac{\hbar^2}{2m} k^2 \psi^\wedge(k,t)$$

Die Lösung dieser Dgl. ist:

$$\psi^\wedge(k,t) = \psi_0^\wedge(k) \cdot e^{\frac{\hbar}{2im}k^2 t} = \psi_0^\wedge(k) \cdot e^{-i\frac{\hbar}{2m}k^2 t}$$

Damit gilt also für die Wahrscheinlichkeitsamplitude eines freien Teilchens:

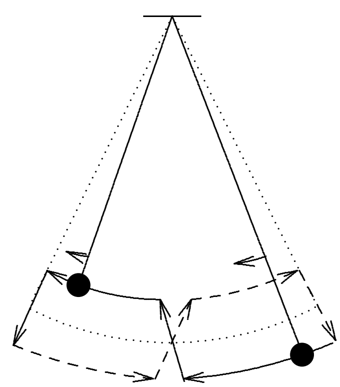
$$\boxed{\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0^\wedge(k) e^{i\left(-\frac{\hbar k^2}{2m}t + kx\right)}\, dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0^\wedge(k) e^{i(kx - \omega t)}\, dk,}$$

wobei $\omega := \frac{\hbar k^2}{2m}$ eine Frequenz ist.

3.2 Störungsrechnung

An dieser Stelle möchte ich ein Ergebnis aus [Zi] darlegen. Die einzelnen physikalischen Überlegungen sind sehr kompliziert; daher folgt hier nur eine Skizze darüber (hier nur ein bißchen ausführlicher als in Tischvorlage).

3.2.1 Parametrische Resonanz oder: Die Kinderschaukel



Pendel im Gravitationsfeld besitzen ein striktes Minimum (das „Herunterhängen“), das daher liapunov–stabil[28] ist. Reale Pendel schwingen gedämpft, also verlieren sie ständig an Energie (als Wärme und so natürlich (Energieerhaltung gilt noch immer, ha ha)), d. h. ihre Schwingungsauslenkung wird (bei einmaliger Auslenkung oder Anregung) zeitlich gegen die stabile Ruhelage konvergieren. Wenn man also eine Schaukel einmal von außen anstößt, so hängt sie irgendwann einfach wieder herunter.

[28]

Definition: Eine Gleichgewichtslage x_0 eines Vektorfeldes X heißt *liapunov–stabil* genau dann, wenn es für alle Umgebungen U von x_0 eine Umgebung $V \subseteq U$ von x_0 gibt, so daß für den Fluß ϕ_t von X gilt: $\phi_t(x) \in U$ für alle $x \in V$, $t \geq 0$

Falls ein Pendel mit kleinen Auslenkungen schwingt, so kann man es durch periodische Änderung eines Parameters dennoch zu großen Schwingungen anregen. Auf einer Schaukel verändert man z. B. die Lage seines Schwerpunktes geringfügig, wenn man schaukelt; dies bewirkt wegen $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ ($g = 9,81\frac{m}{sec^2}$, l: Länge Aufhängepunkt — Schwerpunkt) eine kleine periodische Schwankung der Schaukelfrequenz ω um $\pm\varepsilon$.[29]

Man sieht also: Eine nur sehr geringe Störung eines Parameters kann große Auswirkungen haben.

3.2.2 Kann die Erde von der Sonne wegfliegen?

Im allg. betrachtet man nur das System Erde — Sonne, wenn man die Bewegung der Erde um die Sonne untersucht. Dennoch wird die Erde auch von den anderen Planeten angezogen und somit periodisch gestört. Kann die Erde also (wie die Schaukel) ihre Ruhelage, die Erdumlaufbahn, verlassen?

Um dieses Problem anzugehen, beschreibt man das ungestörte System Erde — Sonne durch eine Hamiltonfunktion H_0 in Winkel- und Wirkungsvariablen ϕ und I. Dieses Problem kann man exakt lösen. Mit Störung gilt aber (t: Zeit):

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial t} &= \frac{\partial H_0}{\partial I}(I) && +\varepsilon\frac{\partial H_1}{\partial I}(\phi, I, t) \\ \frac{\partial I}{\partial t} &= && -\varepsilon\frac{\partial H_1}{\partial \phi}(\phi, I, t) \end{aligned}$$

Da man dieses Problem nicht exakt lösen kann (meist, weil Bewegungskonstanten fehlen), wendet man Störungsrechnung an, d. h. für $\varepsilon \ll 1$ entwickelt man in Potenzen von ε. Man vernachlässigt Potenzen der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ und sucht dann eine kanonische Transformation $(\phi,\ I) \rightarrow (\theta,\ J)$, so daß die Hamiltonfunktion $H = H_0 + \varepsilon H_1$ in eine der Form $K = K_0(J)$ übergeht. Damit werden θ und J zu neuen Winkel- und Wirkungsvariablen, also wird auch J zum Bewegungsintegral des neuen Hamilton'schen Systems und dieses wird lösbar.

Zur Konstruktion dieser Transformation bedient man sich einer sogenannten erzeugenden Funktion (vom Typ 2, reellwertig):

$$S(\phi, J, t) = \phi J + \varepsilon S_1(\phi, J, t) + \varepsilon^2 S_2(\phi, J, t) + \ldots$$

Solch eine erzeugende Funktion S existiert also in unserem Sinne, wenn eine Funktion S_1 existiert. Unter der Ausnutzung der allgemeinen Bedingungen an eine kanonische Transformation und den Wunsch an K (nur abhängig von J), erhalten wir nach längerer Rechnung und zahlreichen Näherungen[30] folgende Differentialgleichung als Bedingung für die Existenz eines geeigneten S_1. Unter diesen Umständen bleibt die Erde also in ihrer Umlaufbahn.

$$\omega\frac{\partial S_1}{\partial\phi}(\phi, J, t) + \frac{\partial S_1}{\partial t}(\phi, J, t) = -H_1(\phi, J, t) + h(J) \tag{34}$$

Dabei ist $\omega = \frac{dH_0(J)}{dJ}$ (und hat die Bedeutung der Frequenz des Erdumlaufs um die Sonne), H_1 ist als Teil einer Hamiltonfunktion aus $\mathcal{C}^1$ und reellwertig. Weiterhin wurden bzw. werden noch folgende Abkürzungen benutzt:

$$h(J) := \frac{\Omega}{(2\pi)^2}\int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}}\left(\int_0^{2\pi} H_1(\phi, J, t)\, d\phi\right) dt, \qquad H_2(\phi, J, t) := H_1(\phi, J, t) - h(J).$$

[29] Genaueres dazu steht im Kapitel 2.7, [Zi] (S. 78–81). Benutzt wird dort wesentlich die Bedingung, wann ein flächentreuer Endomorphismus eines zweidim. Vektorraumes stabil ist ($|\mathrm{spur}(A)| > 2$). (hierzu: vgl. auch den Satz aus LA18 des Skriptes zur Vorlesung *Elementare Differentialgeometrie*).

[30] diese Rechnung und die vollständige Ausformulierung dieser Vorgehensweise: s. Kapitel 5.2, [Zi] (S. 187–193)

Um die Fouriertheorie anwenden zu können, benötigen wir eine zusätzliche Voraussetzung für H_1, nämlich: $H_1(\phi, J, t) = H_1(\phi, J, t + \frac{2\pi}{\Omega})$ (dies beschreibt die $\frac{2\pi}{\Omega}$–periodische Störung.).

Um die Dgl. zu lösen, fourierentwickeln wir S_1 und H_2 bzgl. ϕ und t; und es gilt $h_{0,0} = 0$, weil $H_2(\phi, J, t) = H_1(\phi, J, t) - h(J)$; $s_{0,0}(J)$ ist uninteressant, da es in der Fourierreihe einen nur von J abhängigen Anteil liefert (und der ist unwichtig):

$$H_2(\phi, J, t) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\setminus(0,0)} h_{m,n}(J)e^{i(m\phi+n\Omega)}, \qquad S_1(\phi, J, t) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\setminus(0,0)} s_{m,n}(J)e^{i(m\phi+n\Omega)}$$

Für die Fourierkoeffizienten gilt dann die algebraische Gleichung $(i\omega m + in\Omega)s_{m,n}(J) = -h_{m,n}(J)$. Mittels dieser Gleichung lassen sich genau dann die $s_{m,n}$ definieren, wenn ω und Ω *nicht kommensurabel* sind (d. h. $\frac{\omega}{\Omega} \notin \mathbb{Q}$). Im allg. bedeutet die Berechenbarkeit von $s_{m,n}(J)$ zwar noch nicht, daß die Reihe für S auch konvergiert; falls sie es nicht tut, kann man mit anderen Mitteln zeigen, daß die Erde dennoch in ihrer Umlaufbahn verbleibt.

Falls aber $\frac{\omega}{\Omega} \in \mathbb{Q}$, so existieren (m, n), so daß $m\omega + n\Omega = 0$, also existiert $s_{m,n}$ nicht. Dann läßt sich zeigen, daß im allg. die Erde ihre Umlaufbahn chaotisch verläßt.

Kommensurabilität ist aber die Ausnahme, da die rationalen Zahlen eine λ–Nullmenge bilden. (Es ist hier entscheidend, ob das Verhältnis der Frequenzen *zufällig* rational ist (Nullmengenargument), nicht, ob neben einer irrationalen Frequenz noch eine rationale liegt (Dichtheitsargument).) Sollte die Erde eines Tages dennoch im Weltall verschwinden, so war dies ein „Spezialfall“ .

4 Literatur

[Ba] M. Barner, F. Flohr: *Analysis I.* Dritte Auflage. Berlin: de Gruyter–Verlag, 1987

[HE] H. Heuser: *Lehrbuch der Analysis*, Teil 2. Fünfte Auflage. Stuttgart: Teubner Verlag, 1990

[Za] A. C. Zaanen: *Continuity, Integration and Fourier Theory.* Berlin/Heidelberg: Springer–Verlag, 1989

[Ana] H. Reckziegel: *Definitionen, Formeln, Sätze zu den Vorlesungen Analysis I–III.* Vorlesungsskript. Köln, 1990–1992

[Zi] M. R. Zirnbauer: *Klassische Mechanik.* Vorlesungsskript. Köln, 1991–1992

[Ra] U. Radermacher: *Fourier–Reihen stetiger Funktionen.* Unveröffentlichter Seminarvortrag. Köln, 1992

[Pü] M. Pütz: *Fourier–Reihen integrierbarer Funktionen.* Unveröffentlichter Seminarvortrag. Köln, 1992

[Va] A. Vatter: *Fourier–Transformation, Fourier–Umkehr und der Satz von Plancherel.* Unveröffentlichter Seminarvortrag. Köln, 1993